

УДК 517.9

## НОВЫЕ ТИПЫ 3-D СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

В. Е. Белозеров, А. В. Белозеров

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,  
Днепропетровск, 49050. E-mail: belozvye@mail.ru*

Для некоторых типов 3-D систем квадратичных дифференциальных уравнений найдены новые типы хаотических аттракторов. Приводятся примеры.

**Ключевые слова:** система обыкновенных квадратичных дифференциальных уравнений, линейное преобразование, ограниченность, отрицательная определенность, гомоклиническая орбита, хаотический аттрактор, седло-фокус.

### 1. Введение

Хаос является очень интересным сложным нелинейным явлением, которое интенсивно изучается в последние четыре десятилетия в различных областях физики, биологии, математики, а также в инженерных приложениях. Недавно хаос был признан очень полезным феноменом, встречающимся во многих технологических дисциплинах, таких как синергетика, компьютерные науки, системы защиты информации, биомедицинские системы, динамика жидкости и газа и так далее. Поэтому не удивительно, что академические исследования в хаотической динамике эволюционировали от традиционного анализа нелинейных систем (бифуркации, устойчивость, периодичность) к современным исследованиям, в которых хаос понимается как новое направление в науке, дающее новые методы управления многими естественными процессами в окружающем нас мире (см., например, работы [1 – 4] и литературу, цитированную там же).

Сейчас имеется мало публикаций, в которых существование хаоса (с математической точки зрения) было строго доказано. Очень часто именно отсутствие таких доказательств не позволяет полностью понять причину возникновения хаотических процессов, происходящих в различных нелинейных динамических системах.

Настоящая работа является продолжением статьи [2]. Ее появление продиктовано желанием обобщить результаты, полученные в [2] и, одновременно, сделать эти результаты более строгими.

В данной работе для изучения хаоса в квадратичных 3-D системах используется 1-мерное неявное дискретное отображение, базирующееся на дискретной модели Риккера популяционной динамики [5]. Этот подход позволяет

установить сопряженность между отображением Риккера [2] и некоторым 1-мерным явным дискретным отображением, хаотические свойства которого известны. В результате можно прийти к утверждению о хаотичности процессов в непрерывной квадратичной 3-D системе, которая и порождает (через подходящие сечения Пуанкаре) упомянутое выше дискретное отображение Риккера.

Рассмотрим следующую систему (см. [2]):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1x(t) + a_{11}y^2(t) + a_{12}y(t)z(t) + a_{22}z^2(t), \\ \dot{y}(t) = b_1y(t) + c_1z(t) + bx(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = -c_1y(t) + b_1z(t) + cx(t)z(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

В дальнейшем будет показано, что система (1.1) обладает хаотическими аттракторами, не указанными в [2]. Существование этих аттракторов объясняется присутствием в системе (1.1) неявного итерационного процесса, порожденного дискретным отображением типа Риккера [2].

## 2. Исследование неявной функции

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \exp(\alpha \cdot \mathbf{y}) - \lambda \cdot \mathbf{x} \cdot \exp(\beta \cdot \mathbf{x}) = 0$$

(А) Для начала в этом разделе мы приведем несколько основных положений теории 1-мерных отображений.

Положим  $\mathbb{V} = [0, \infty)$ . Определим на множестве  $\mathbb{V}$  метрику  $d$  формулой:  $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V} \ d = \|v_1 - v_2\|$ . Определим формулой  $h(v) = v \cdot \exp(r - v)$  явную функцию  $h : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ , где  $r > 0$ ,  $v \in \mathbb{V}$ .

Пусть  $v^* \neq 0$  – неподвижная точка отображения  $h$ . Очевидно, что  $v^* = r$ .

Обозначим через  $B_\delta(a) = \{v \in \mathbb{V} : d(v, a) < \delta\}$  и  $\overline{B}_\delta(a) = \{v \in \mathbb{V} : d(v, a) \leq \delta\}$  открытый и замкнутый шары в  $\mathbb{V}$ . Ясно, что  $a \geq \delta \geq 0$ .

**Определение 2.1.** [3]. Точка  $v^* \in \mathbb{V}$  называется растягивающей неподвижной точкой отображения  $h$  в  $\overline{B}_\delta(v^*)$  для некоторой постоянной  $\delta > 0$ , если  $h(v^*) = v^*$  и существует константа  $\lambda > 1$  такая, что

$$d(h(x), h(y)) \geq \lambda d(x, y), \forall x, y \in \overline{B}_\delta(v^*).$$

Кроме того, точка  $v^*$  называется регулярной растягивающей неподвижной точкой отображения  $h$  в  $\overline{B}_\delta(v^*)$ , если  $v^*$  является внутренней точкой множества  $h(B_\delta(v^*))$ .

**Определение 2.2.** [3]. Предположим, что  $v^*$  – растягивающая неподвижная точка отображения  $h$  в  $\overline{B}_\delta(v^*)$  для некоторого  $\delta > 0$ . Тогда говорят, что  $v^*$  является грубым обратным репеллером отображения  $h$ , если существует точка  $v_0 \in B_\delta(v^*)$  такая, что  $v_0 \neq v^*$  и  $h^{(m)}(v_0) = v^*$  для некоторого положительного целого  $m$ . Кроме того, точка  $v^*$  называется невырожденным грубым обратным репеллером отображения  $h$ , если существуют положительные константы  $\mu$  и  $\delta_0$  такие, что  $B_{\delta_0}(v_0) \subset B_\delta(v^*)$  и

$$d(h^{(m)}(x), h^{(m)}(y)) \geq \mu d(x, y), \forall x, y \in \overline{B}_{\delta_0}(v_0).$$

**Определение 2.3.** [3]. Точка  $v^*$  называется регулярным грубым обратным репеллером отображения  $h$ , если множество  $h(B_\delta(v^*))$  открыто и существует положительная константа  $\gamma_0$  такая, что  $B_{\gamma_0}(v_0) \subset B_\delta(v^*)$  и  $v^*$  является внутренней точкой множества  $h^{(m)}(B_\gamma(v_0))$  для любого положительного  $\gamma < \gamma_0$ .

**Теорема 2.1.** [3]. Предположим, что  $h : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  имеет регулярный и невырожденный грубый обратный репеллер  $v^*$ , ассоциированный с  $v_0$ ;  $m$  и  $\delta$  указаны в определениях 2.1 – 2.3, отображение  $h$  является непрерывным в  $\overline{B_\delta(v^*)}$ , отображение  $h^{(m)}(v)$  непрерывно в некоторой окрестности  $v_0$ . Кроме того,  $h$  непрерывно в некоторых окрестностях точек  $v_1, \dots, v_{m-1}$ , где  $v_j = f^{(j)}(v_0)$  для  $j = 1, \dots, m-1$ . Тогда существует такое компактное совершенное инвариантное множество  $D \subset \mathbb{V}$ , содержащее канторово множество, что отображение  $h$  является хаотическим в смысле Дивани на  $D$  (так же как и в смысле Ли – Йорке) и это отображение имеет плотную орбиту в  $D$ .

Теперь, для функции  $h(v)$ , мы определим значения параметров, которые указаны в определениях 2.1 – 2.3. Тогда, в соответствии с теоремой 2.1, и будет доказана хаотичность отображения  $h$ .

(а1) Оценим расстояние между точками  $h(v^* - \delta)$  и  $h(v^* + \delta)$ , где  $\delta > 0$ . Имеем:

$$\begin{aligned} d(h(v^* - \delta), h(v^* + \delta)) &= \|(v^* - \delta) \exp(r - (v^* - \delta)) - (v^* + \delta) \exp(r - (v^* + \delta))\| = \\ &= \|v^* \exp(r - v^*) \cdot \exp \delta - \delta \cdot \exp(r - v^*) \exp \delta - \\ &- v^* \cdot \exp(r - v^*) \cdot \exp(-\delta) - \delta \cdot v^* \exp(r - (v^* + \delta))\|. \end{aligned}$$

Так как  $v^* \exp(r - v^*) = v^*$ , то из последней формулы следует:

$$\begin{aligned} d(h(v^* - \delta), h(v^* + \delta)) &= \|r \cdot (\exp(\delta) - \exp(-\delta)) - \delta \cdot (\exp(\delta) + \exp(-\delta))\| \geq \\ &\geq 2\delta \cdot (r - 0.5 \cdot (\exp(\delta) + \exp(-\delta))) = \lambda \cdot d(v^* - \delta, v^* + \delta), \end{aligned}$$

где  $\lambda = r - 0.5 \cdot (\exp(\delta) + \exp(-\delta))$ .

Пусть  $\exp(\delta) = u$ . Предположим, что

$$r - 0.5 \cdot (\exp(\delta) + \exp(-\delta)) = \lambda > 1.$$

Отсюда следует  $u^2 - 2(r-1)u + 1 < 0$ . Это неравенство имеет решение  $1 \leq u < [r-1 + \sqrt{r(r-2)}]$ . Таким образом, если

$$0 \leq \delta < \ln[r-1 + \sqrt{r(r-2)}] \quad \text{и} \quad r > 2,$$

то  $\lambda > 1$ .

(а2) Имеем  $h'(v) = (1-v) \cdot \exp(r-v)$ . Точка максимума функции  $h(v)$  может быть найдена из условия  $h'(v) = 0$ . Отсюда следует  $v_{\max} = 1$  и  $h_{\max} = \exp(r-1)$ . Таким образом, если  $r > 1$ , то функция  $h(v)$  будет немонотонной

и унимодальной на интервале  $[0, \infty)$ : интервал  $[0, 1)$  является интервалом возрастания, а интервал  $(1, \infty)$  является интервалом убывания. Принимая во внимание пункт (a1), мы получим, что при  $r > 2$  точка  $v^* = r$  является репеллером ( $\|h'(r)\| > 1$  при  $r > 2$ ). Ясно, что  $v^*$  – регулярная растягивающая точка отображения  $h$  в  $\overline{B_\delta(v^*)}$ .

(a3) Рассмотрим итерационный процесс

$$v_{i+1} = v_i \exp(r - v_i); i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

где  $r > 0$ ,  $v_i > 0$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots$

По определению положим  $\mathbb{W} = [0, 1]$ . Пусть  $\mathbf{T} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  – непрерывное отображение, заданное формулой  $w = (2/\pi) \cdot \arctan v$ . Так как  $\lim_{v \rightarrow \infty} (2/\pi) \cdot \arctan v = 1$ , то мы можем считать, что  $\mathbf{T}$  – гомеоморфизм и  $\mathbf{T}(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$ ,  $\mathbf{T}^{-1}(\mathbb{W}) = \mathbb{V}$ .

Символом

$$g(w) \equiv \mathbf{T}^{-1}(h(\mathbf{T}(w))) = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \tan \frac{\pi w}{2} \cdot \exp \left( r - \tan \frac{\pi w}{2} \right) \right) \quad (2.2)$$

определим непрерывное сопряженное  $h$  отображение  $g : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$  [4].

Функция  $g(w)$  похожа на функцию  $h(v)$ :  $w_{\max} = 0.5$  и  $g_{\max} = (2/\pi) \cdot \arctan \exp(r - 1) < 1$  ( $\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\max} = 1$ ); интервал  $[0, 0.5)$  является интервалом возрастания и интервал  $(0.5, 1]$  является интервалом убывания. Поэтому, если  $w^* = r > 0.5$ , то

$$(2/\pi) \cdot \arctan \exp(r - 1) > (2/\pi) \cdot \arctan r.$$

Отсюда следует  $\exp(r - 1) > r$  и  $r > 1$ .

Ясно, что обратное отображение  $g^{-1}(w)$  имеет две ветви:  $g_1^{-1}(w)$  и  $g_2^{-1}(w)$ , где каждое из отображений  $g_1^{-1}(w)$  и  $g_2^{-1}(w)$  обратимо.

Определим функцию  $G : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$  правилом

$$G(w) = g_{i_1}^{-1}(g_{i_2}^{-1}(\dots(g_{i_k}^{-1}(w))))), \quad k = 2, 3, \dots$$

где или  $i_k = 1$  или  $i_k = 2$ . Ясно, что отображение  $G(w)$  является монотонным.

Отображение  $G(w)$  имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку  $w^*$ . Известно, что неподвижная точка  $w^*$  отображения  $G(w)$  соответствует неподвижной точке  $w^{**}$  отображения  $g^{(k)}(w) = g(g(\dots g(w)))$ . Точка  $w^{**}$  отображения  $g^{(k)}(w)$  соответствует или неподвижной точке или  $p$ -циклу отображения  $g(w)$ . Первая ситуация возможна только при  $i_1 = i_2$ . Так как можно взять любое целое  $k$  и произвольно выбрать числа  $i_1, i_2$  равными 1 или 2, то из условия  $g_1^{-1}(g_2^{-1}(w)) \neq g_2^{-1}(g_1^{-1}(w))$  следует, что немонотонная функция  $g(w)$  может иметь любое число циклов различной кратности  $p$  и бесчетное множество непериодических траекторий.

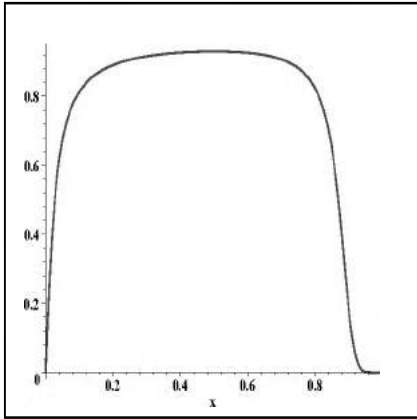


Рис. 1. Отображение  $g(x)$ ;  $r = 3.2$

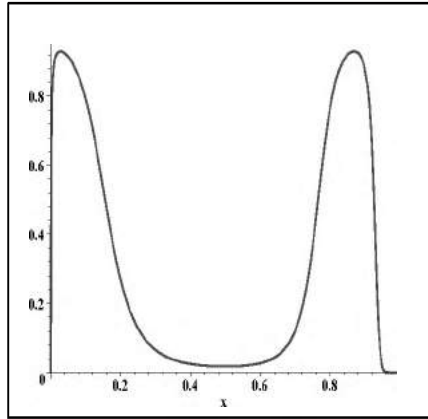


Рис. 2. Отображение  $g(g(x))$ ;  $r = 3.2$

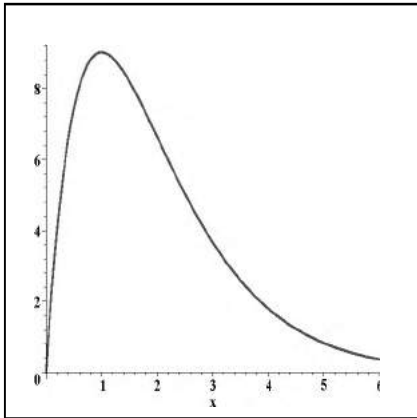


Рис. 3. Отображение  $h(x)$ ;  $r = 3.2$

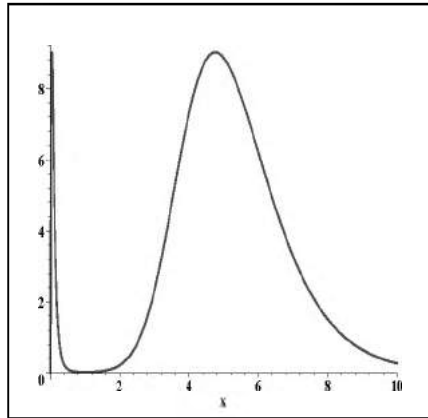


Рис. 4. Отображение  $h(h(x))$ ;  $r = 3.2$

Мы покажем, что при некоторых значениях параметра  $r$  функция (2.2) может быть хаотической. Для этой цели мы укажем те значения параметра  $r$ , при которых в системе  $w_{i+1} = g(w_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , будут присутствовать 3-циклы.

Уравнения  $w = g(w)$ ,  $w = g(g(w))$  и  $w = g(g(g(w)))$  трудно разрешимы. Поэтому для их исследования мы воспользуемся сопряженностью  $g$  и  $h$ . (На рис. 1 – 4 показаны две итерации отображений  $g$  и  $h$ .)

Пусть  $v = h(v) \equiv v \exp(r - v)$ . Тогда при  $r > 1$  в системе (2.1) существует 1-цикл. Пусть  $v = h(h(v)) \equiv v \exp(2r - v - v \exp(r - v))$ . В этом случае при  $r > 2.008$  в системе (2.1) существуют 1-циклы и 2-циклы. Пусть теперь  $v = h(h(h(v))) \equiv v \exp(2r - v - v \exp(r - v)) \cdot \exp(r - v \exp(r - v)) \exp(r - v \exp(r - v))$ . В этом случае при  $r > 3.103$  в системе (2.1) существуют 1-циклы, 2-циклы и 3-циклы. (Указанные значения  $r$  могут быть найдены с помощью любого математического пакета, который имеет в своем составе программу численного решения трансцендентных уравнений.)

Согласно теореме Шарковского [4] цикл периода 3 порождает циклы всех периодов. Таким образом, в системе  $w_{i+1} = g(w_i)$  существуют все циклы с периодами  $2^i, i = 0, 1, 2, \dots$ . Согласно теореме Зингера [4] в системе  $w_{i+1} = g(w_i), i = 0, 1, 2, \dots$ , при любом  $n$  и некотором значении параметра  $r = r_n$  присутствуют все неустойчивые циклы периодов  $2^i, i = 0, \dots, n - 1$ , и один устойчивый цикл периода  $2^n$ . Если  $r = r_\infty = 3.103$ , то отображение  $g(w)$  имеет полуустойчивую траекторию  $\mathbb{S}$  в любой окрестности любой точки которой лежат точки счетного множества неустойчивых циклов всех периодов  $2^i, i = 0, 1, 2, \dots$ . Поэтому множество всех периодических точек плотно в  $\mathbb{W}$ . (Любая точка множества  $\mathbb{S}$  с любой наперед заданной точностью может быть аппроксимирована некоторой периодической точкой.)

(а4) В этом пункте определения 2.1 – 2.3 будут перенесены на пространство  $\mathbb{W}$  и отображение  $g : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ .

Пусть  $w^* \neq 0$  – неподвижная точка отображения  $g$ . Предположим, что  $r > 3.103$ . Тогда для любой итерированной функции  $g^{(m)}(w)$  на интервале  $[0, 1]$  присутствует  $2^m$  неподвижных точек  $w_0^* = 0, w_1^*, \dots, w_{l-1}^*$ , где  $l = 2^m$ . Среди этих точек присутствует и неподвижная точка  $w^*$ .

Предположим, что  $w_{l-2}^* = w^*$ . Очевидно, что уравнение  $g^{(m)}(w) = w^*$  также имеет  $2^m$  действительных корней  $\xi_0, \dots, \xi_{l-1}$  на интервале  $[0, 1]$ . Так как множество  $\mathbb{W}$  ограничено, то расстояние между двумя фиксированными точками стремится к 0:  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(w^*, w_{l-1}^*) = 0$ . Это означает, что имеет место предельное равенство  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(w^*, \xi_{l-1}) = 0$ .

Ясно, что  $g(\xi_{l-2}) = g(w^*)$ . Отсюда вытекает, что существует точка  $w_0$  такая, что  $\xi_{l-2} = g^{(m-1)}(w_0)$  и  $g(g^{(m-1)}(w_0)) = g(g^{(m-1)}(w^*)) = w^*$ . Кроме того, мы имеем  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(w^*, w_0) = 0$ .

(а5) Напомним, что в силу сопряженности отображений  $g$  и  $h$ , все утверждения, которые справедливы для  $g$ , имеют место также и для  $h$  [4].

С помощью оператора  $\mathbf{T}^{-1}$  мы перейдем от пространства  $\mathbb{W}$  к пространству  $\mathbb{V}$ . Тогда существует точка  $v_0 = \mathbf{T}^{-1}(w_0)$ , для которой условия определения 2.2 будут выполнены.

В самом деле, пусть  $v^* = h^{(m)}(v_0)$  и

$$\overline{B_{\delta_2}}(v_0) \subset \overline{B_{\delta_1}}(v^*) \subset \overline{B_\delta}(v^*), \delta_2 < \delta_1 < \delta,$$

– последовательность вложенных шаров. Мы имеем:

$$\forall x, y \in \overline{B_{\delta_1}}(v^*) d(h^{(m)}(x), h^{(m)}(y)) \geq \lambda d(h^{(m-1)}(x), h^{(m-1)}(y)) \geq \dots \geq \lambda^m d(x, y).$$

Ясно, что  $\mu = \lambda^m$  и  $\delta_2^m < \delta_1^m < \delta$ . Рассмотрим последовательность  $\{v_j = h^{(j)}(v_0), j = 0, \dots, m\}$ , где  $v_j \in \overline{B_{\delta_1}}(v^*)$ . Пусть  $\delta_2 = \max(d(v_0, v_1), \dots, d(v_0, v_m))$ . В соответствии с пунктом (а4) для достаточно большого  $m$  расстояние  $d(v^*, v_0)$  может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому,

$$d(h^{(m)}(x), h^{(m)}(y)) \geq \mu d(x, y), \forall x, y \in \overline{B_{\delta_2}}(v_0)$$

и все условия определения 2.2 выполнены. Точка  $v^*$  является невырожденным грубым обратным репеллером отображения  $h$ .

Наконец, мы проверим реализацию условий определения 2.3. Предположим противное: точка  $v^*$  не есть внутренняя точка множества  $h^{(m)}(B_\gamma(v_0))$  для любого положительного  $\gamma < \delta_2$ . В этом случае точка  $v^*$  принадлежит границам множеств  $\overline{h^{(m)}(B_\gamma(v_0))}$ ,  $\overline{B_{\delta_1}(v^*)}$  и  $\overline{B_\delta(v^*)}$ . Поэтому мы получим  $\delta = \ln[r - 1 + \sqrt{r(r - 2)}]$ ,  $\lambda = 1$ , и  $r = 2$ , что противоречит предположению  $r > 2$ . Таким образом, мы имеем  $\gamma_0 = \delta_2$  и точка  $v^*$  является регулярным грубым обратным репеллером отображения  $h$ . Это означает, что все условия теоремы 2.1 удовлетворены. Поэтому отображение  $h : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  является хаотическим.

(В) В дальнейшем в этом пункте мы будем считать, что переменные  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  и параметры  $\lambda > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Следующая теорема может быть найдена в любом учебнике по математическому анализу.

**Теорема 2.2.** (Теорема о неявной функции.) Предположим, что функция  $H(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно дифференцируема для каждой точки  $(x, y)$  открытого множества  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Пусть  $(x_0, y_0)$  – точка в  $\mathbb{D}$ , для которой  $H(x_0, y_0) = 0$  и  $H'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Тогда существуют окрестности  $U \subset \mathbb{R}$  точки  $x_0$  и  $V \subset \mathbb{R}$  точки  $y_0$  такие, что для каждого  $x \in U$  уравнение  $H(x, y) = 0$  имеет единственное решение  $y \in V$ . Кроме того, это решение может быть представлено как  $y = h(x)$ , где функция  $h(x)$  непрерывно дифференцируема при  $x = x_0$ .

Определим критические точки функции  $F(x, y) = y \cdot \exp(\alpha \cdot y) - \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = 0$ . Эти точки являются корнями системы уравнений  $F'_x(x, y) = 0$ ,  $F'_y(x, y) = 0$ . Здесь мы получим единственную критическую точку  $(x_s, y_s) = (-1/\beta, -1/\alpha)$ . Так как  $x \geq 0, y \geq 0$ , то при  $\beta > 0, \alpha > 0$ ,  $\beta > 0, \alpha < 0$  и при  $\beta < 0, \alpha > 0$  первый квадрант не содержит критических точек.

Пусть  $\beta < 0, \alpha < 0$ . Вычислим дискриминант  $Disc$  функции  $F(x, y) = y \cdot \exp(\alpha \cdot y) - \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = 0$  при  $(x, y) = (x_s, y_s)$ :

$$Disc = F''_{xx} \cdot F''_{yy} - (F''_{xy})^2 = -\lambda\alpha\beta \cdot \exp(\alpha x + \beta y) < 0.$$

Таким образом, если  $\beta < 0, \alpha < 0$ , то функция  $F(x, y) = 0$  может иметь точку самопересечения. Эта точка существует при выполнении следующего условия:  $F(-1/\beta, -1/\alpha) = \lambda/(\beta \cdot e) - 1/(\alpha \cdot e) = 0$ . Последнее условие может быть переписано в форме  $\beta - \alpha\lambda = 0$ .

Рассмотрим следующие случаи: (а)  $\beta - \alpha\lambda < 0, \alpha < 0, \beta < 0$ ; (б)  $\beta - \alpha\lambda > 0, \alpha < 0, \beta < 0$ ; (с)  $\alpha > 0, \beta < 0$ ; (д)  $\alpha < 0, \beta > 0$ .

Мы имеем:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \lambda \frac{1 + \beta \cdot x}{1 + \alpha \cdot y} \exp(\beta \cdot x - \alpha \cdot y).$$

(а) Пусть  $y \cdot \exp(\alpha \cdot y) = \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = c \geq 0$ . Тогда уравнение  $\lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = c$  имеет два корня. Поэтому функция  $F(x, y) = y \cdot \exp(\alpha \cdot y) - \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = 0$  имеет две ветви.

Пусть  $1 + \beta \cdot x = 1 + \alpha \cdot y = 0$ . Это означает, что  $x = x_s = -1/\beta$ ,  $y = y_s = -1/\alpha$  и  $F(x_s, y_s) = (e\alpha)^{-1} - \lambda(e\beta)^{-1} = 0$ . Последнее уравнение противоречит условию  $\beta - \alpha\lambda < 0$ . Поэтому, если  $1 + \beta \cdot x = 0$ , то  $1 + \alpha \cdot y \neq 0$ .

Если  $\beta - \alpha\lambda = 0$ , то  $y_{max} = y_{min} = -1/\alpha$ . Поэтому, если  $\beta - \alpha\lambda < 0$ , то  $\forall x \in [0, \infty) y_{max} < -1/\alpha$  для нижней ветви кривой  $F(x, y) = 0$ , и  $y_{min} > -1/\alpha$  для верхней ветви кривой  $F(x, y) = 0$ .

Мы имеем  $y'_x = 0$  при  $x = x_s = -1/\beta$ . Так как для  $y \approx 0$  мы получаем  $1 + \alpha \cdot y > 0$ , то в силу теоремы о неявной функции точка  $x = x_s = -1/\beta$  является максимумом неявной функции  $y_l = f_l(x)$  (нижняя ветвь) и минимумом неявной функции  $y_u = f_u(x)$  (верхняя ветвь). Случай (а) показан на рисунке 5.

(b) Этот случай повторяет случай (а), если заменить  $x$  на  $y$ . Точка  $y = y_s = -1/\alpha$  является точкой максимума для левой ветви и точкой минимума для правой ветви кривой  $F(x, y) = 0$ . Случай (b) показан на рисунке 6.

(c) Пусть снова  $y \cdot \exp(\alpha \cdot y) = \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = c \geq 0$ . В этом случае уравнение  $y \cdot \exp(\alpha \cdot y) = c$  имеет только один корень. Поэтому функция  $F(x, y) = y \cdot \exp(\alpha \cdot y) - \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x) = 0$  имеет одну ветвь (см. рисунке 7).

(d) Этот случай повторяет случай (c), если заменить  $x$  на  $y$  (см. рисунке 8).

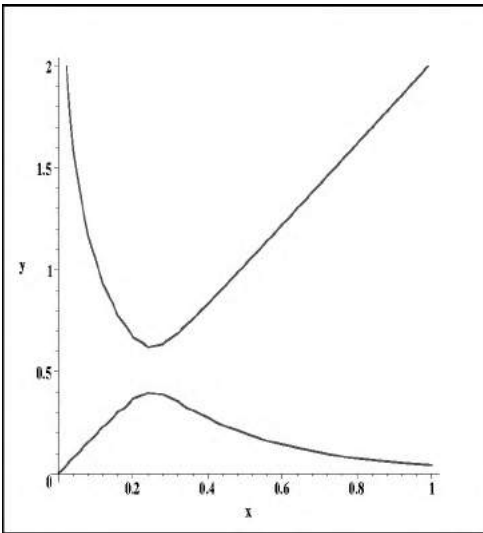


Рис. 5. Кривая  $y \cdot \exp(-2 \cdot y) - 1.95 \cdot x \cdot \exp(-4 \cdot x) = 0$

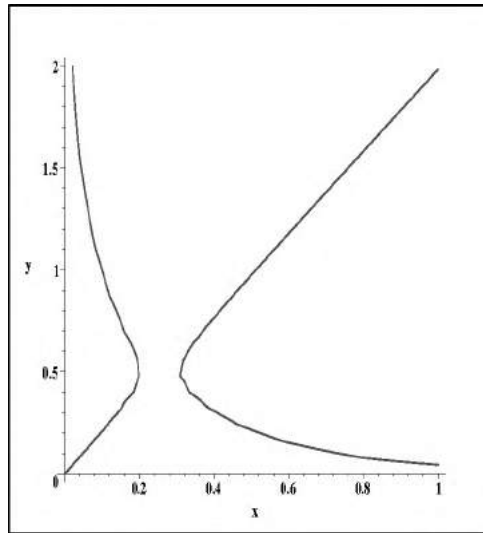


Рис. 6. Кривая  $y \cdot \exp(-2 \cdot y) - 2.05 \cdot x \cdot \exp(-4 \cdot x) = 0$



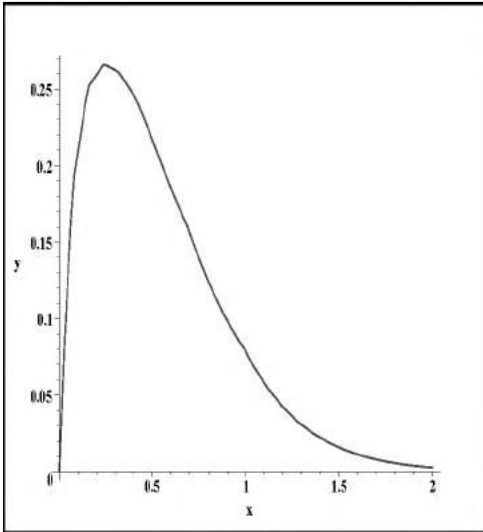


Рис. 7. Кривая  $y \cdot \exp(2 \cdot y) - 5 \cdot x \cdot \exp(-4 \cdot x) = 0$

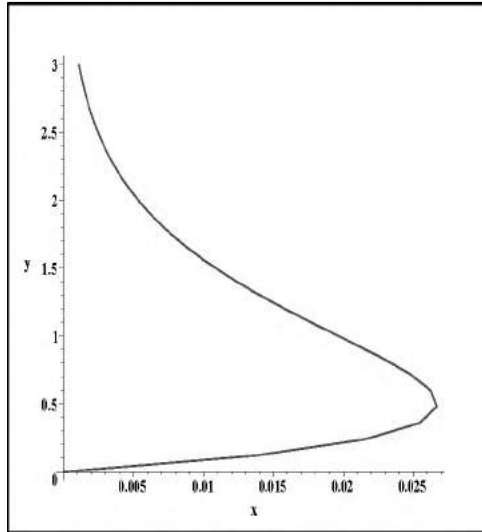


Рис. 8. Кривая  $y \cdot \exp(-2 \cdot y) - 5 \cdot x \cdot \exp(4 \cdot x) = 0$

Заметим, что если имеет место или условие (а) или условие (с), то величина  $y$  ограничена ( $y < -1/\alpha$ ). Так как при  $x \rightarrow \infty$  мы будем иметь  $y = \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x - \alpha \cdot y) < \lambda_1 \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x)$ , где  $\lambda_1 = \lambda \cdot e$ , то функция  $y = \lambda \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x - \alpha \cdot y)$  ведет себя так же, как функция  $\lambda_1 \cdot x \cdot \exp(\beta \cdot x)$  (здесь  $\beta < 0$ ).

Далее мы будем изучать только случаи (а) и (с). Пусть  $\beta = -p$ ,  $\alpha = -m$ , где  $p > 0$ . Тогда случай (а) имеет место при  $-p + \lambda \cdot m < 0$  и  $0 \leq y < 1/m$ ; случай (с) имеет место при  $-p + \lambda \cdot m < 0$  и  $m < 0$ .

Перепишем уравнение  $F(x, y) = 0$  в форме:  $y = \lambda x \cdot \exp(-px + my)$ .

Рассмотрим неявное дискретное отображение

$$x_{n+1} = \lambda x_n \cdot \exp(-px_n + mx_{n+1}), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

**Теорема 2.3.** *Предположим, что  $p > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $x_0 > 0$ . Пусть или*

1)  $m > 0$ ,  $-p + \lambda m < 0$ , и  $x_0 < 1/m$  (например,  $p = 1$ ,  $m = 0.1$ , и  $\lambda_{cr} = 9.025$ )

или

2)  $m \leq 0$  (например,  $p = 1$ ,  $m = 0$ , и  $\lambda_{cr} = 24.533$ ;  $p = 1$ ,  $m = -0.1$ , и  $\lambda_{cr} = 66.686$ ).

Тогда отображение (2.3) будет хаотическим.

*Доказательство.* Из условий теоремы 2.1 и теоремы о неявной функции следует, что явная функция  $y = f(x)$ , полученная из неявной функции  $F(x, y) = 0$ , удовлетворяет условию:  $f([0, \infty)) \subset [0, \infty)$ .

Пусть в (2.3)  $m \neq 0$ . С помощью замен  $v_i = px_i$  переменных  $x_i$  процесс (2.3) может быть представлен в форме:

$$v_{i+1} = v_i \exp(r - v_i + sv_{i+1}); i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

где  $s = m/p$ ,  $r = \ln \lambda > 0$ ,  $v_i > 0$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots$

Зафиксируем значение  $v_0 = v_0^*$ . Воспользуемся теоремой о неявной функции для получения решений  $v_1^*, v_2^*, \dots$  уравнений (2.4) относительно  $v_{i+1}$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда процесс (2.4) может быть переписан в явной форме:

$$v_{i+1} = v_i \exp(r + sv_{i+1}^* - v_i); i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Пусть  $m > 0$  ( $s > 0$ ). Тогда будем иметь  $v_i^* < 1/s$  и  $r + sv_{i+1}^* < r + 1$ . Поэтому процесс (2.5) может быть аппроксимирован процессом

$$t_{i+1} = t_i \exp(r + 1 - t_i); i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Так как хаос возникает в системе (2.6) при  $r + 1 = 3.103$ , в системе (2.5) он возникнет при  $r - 1 = 2.103$  (см. пункты (a1) – (a5)). Если  $m < 0$  ( $s < 0$ ), то процесс (2.1) может быть аппроксимирован процессом (2.5). В этом случае  $r - 1 = 3.103 < r - sv_{i+1}^*$  и хаос возникает в системе (2.5) при  $r + 1 = 4.103$ . Принимая во внимание, что  $\lambda = \ln r$ , мы получим утверждение теоремы 2.3. (На рис. 9–11 представлены бифуркационные диаграммы отображения  $x_{n+1} = \lambda \cdot \exp(-x_n + s \cdot x_{n+1})$ .)  $\square$

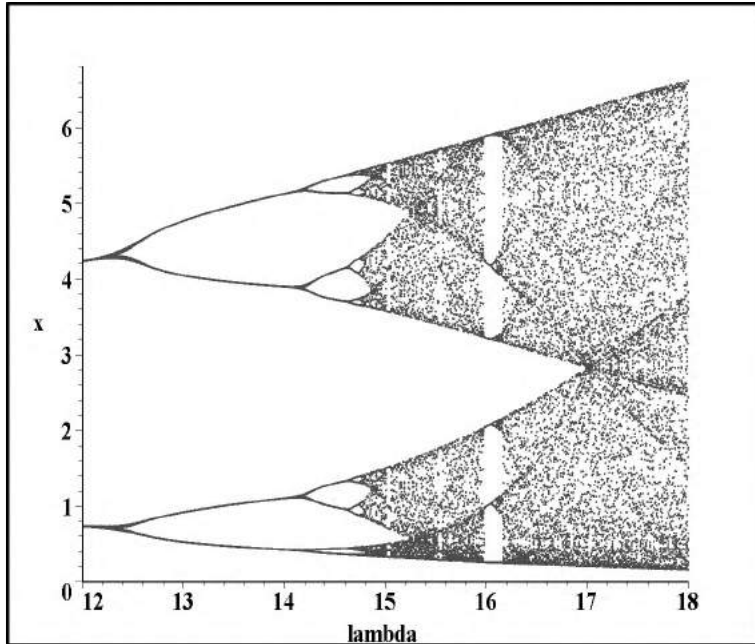


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма отображения  $x_{n+1} = \lambda x_n \cdot \exp(-x_n)$ ;  
 $\lambda_{cr} = 24.533$

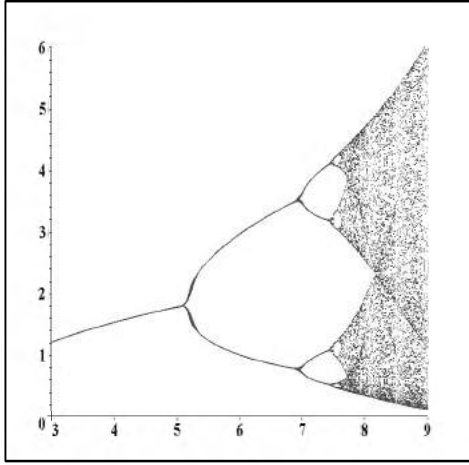


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма отображения  $x_{n+1} = \lambda x_n \cdot \exp(-x_n + 0.1 \cdot x_{n+1})$ ;  $\lambda_{cr} = 9.025$

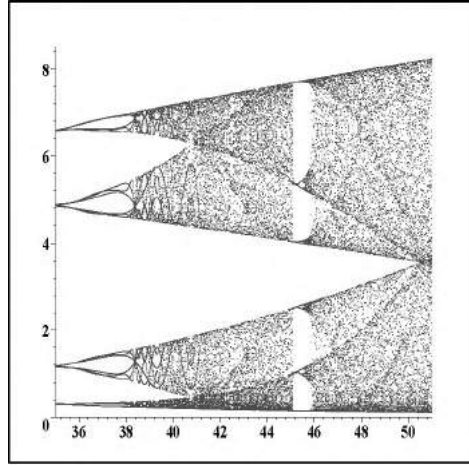


Рис. 11. Бифуркационная диаграмма отображения  $x_{n+1} = \lambda x_n \cdot \exp(-x_n - 0.1 \cdot x_{n+1})$ ;  $\lambda_{cr} = 66.686$

### 3. Хаотические аттракторы квадратичных систем

**Теорема 3.1.** Пусть для системы (1.1)  $a_1 > 0$ ,  $b_1 < 0$  и  $a_1 + 2b_1 < 0$ . Предположим также, что  $b + c = 0$ ,  $a_{12} = 0$ . Тогда любое решение системы (1.1) является диссипативным. Кроме того, существует множество  $W := \{x_0, y_0, z_0\}$  начальных данных такое, что  $\forall (x_0, y_0, z_0) \in W$  решение системы (1.1) с начальными данными  $(x_0, y_0, z_0)$  будет ограниченным.

*Доказательство.* (а) Перепишем систему (1.1) в форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Тогда дивергенция поля  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  может быть вычислена по формуле:  $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = a_1 + 2b_1 < 0$ . Это означает, что система (1.1) является диссипативной.

(б) Положим  $b_1 = c_1 = 0$ . Без потери общности можно считать, что  $a_{11} < 0$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} > 0$ . В этом случае должно быть  $b > 0$  и  $c < 0$ . Воспользовавшись заменой переменной  $x \rightarrow x/(2b)$ , мы можем считать, что  $b = 1$ ,  $c = -1$ . При этих условиях из (1.1) следует, что

$$\dot{x}(t) = a_1 x(t) + a_{11} y_0^2 \exp\left(\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau\right) + a_{22} z_0^2 \exp\left(-\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau\right).$$

Положим  $V(t) = \dot{x}(t) - a_1 x(t)$ , где функция  $V(t)$  определена на интервале  $[t_0, t] \in [0, \infty)$ . Тогда мы получим:

$$V(t) = a_{11} y_0^2 \exp\left(\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau\right) + a_{22} z_0^2 \exp\left(-\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau\right). \quad (3.1)$$

Вычислим производную по времени  $t$  от функции  $V(t)$ . С помощью уравнения (3.1) мы исключим выражение  $\exp(\pm \int_0^t x(\tau) d\tau)$  из формулы

$$\dot{V}(t) = a_{11}y_0^2 x(t) \exp\left(\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau\right) - a_{22}z_0^2 x(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau\right).$$

Тогда будем иметь  $(\dot{V}(t))^2 = x^2(t)(V^2(t) - 4a_{11}a_{22}y_0^2z_0^2)$ . Отсюда следует:

$$\dot{V}(t) = \pm x(t)\sqrt{V^2(t) + g}, \quad g = \frac{-4a_{11}a_{22}y_0^2z_0^2}{a_1^2} > 0.$$

Последнее выражение может быть преобразовано к виду:

$$\pm \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{dV}{\sqrt{V^2 + g}} = \ln \frac{V(t) + \sqrt{V^2(t) + g}}{V(t_0) + \sqrt{V^2(t_0) + g}}. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1)  $\forall t \in [t_0, \infty)$ , мы получим:

$$V(t) = a_{11}y_0^2 \frac{V(t) + \sqrt{V^2(t) + g}}{V(t_0) + \sqrt{V^2(t_0) + g}} + a_{22}z_0^2 \frac{V(t_0) + \sqrt{V^2(t_0) + g}}{V(t) + \sqrt{V^2(t) + g}}. \quad (3.3)$$

Ясно, что  $\forall V(t)$  величина  $V(t) + \sqrt{V^2(t) + g} > 0$ . Поэтому можно определить величины

$$-p = \frac{a_{11}y_0^2}{V(t_0) + \sqrt{V^2(t_0) + g}} < 0, \quad s = a_{22}z_0^2 \cdot (V(t_0) + \sqrt{V^2(t_0) + g}) > 0.$$

Тогда уравнение (3.3) принимает форму  $V = -p \cdot (V + \sqrt{V^2 + g}) + s \cdot (V + \sqrt{V^2 + g})^{-1}$ . Отсюда следует:

$$V = \pm \frac{s - pg}{\sqrt{(1 + 2p)(1 + 2p + 2s - 2pg)}}.$$

Таким образом, условия разрешимости уравнения (3.3) определены следующим неравенством:

$$1 + 2p + 2s - 2pg > 0. \quad (3.4)$$

Пусть условие (3.4) выполнено. Тогда из (3.1) следует:

$$\exp\left(\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau\right) = \frac{-V + \sqrt{V^2 + g}}{-2a_{11}y_0^2} > 0.$$

Так как функция  $V(t)$  ограничена, то функция  $\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau$  при  $t \rightarrow \infty$  также ограничена. Следовательно, должно быть  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  (условие сходимости несобственного интеграла) и  $\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{x}(t_i) = 0$ .

Введем в систему (1.1) новые переменные  $\rho$  и  $\phi$  по формулам:  $y = \rho \cos \phi$ ,  $z = \rho \sin \phi$ , где  $\rho > 0$ . Тогда получим:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1 \cdot x(t) + \rho^2(t) \cdot (a_{11} \cos^2 \phi(t) + a_{12} \cos \phi(t) \sin \phi(t) + a_{22} \sin^2 \phi(t)), \\ \dot{\rho}(t) = (b_1 + (b \cos^2 \phi(t) + c \sin^2 \phi(t)) \cdot x(t)) \cdot \rho(t), \\ \dot{\phi}(t) = -c_1 - (b - c) \cos \phi(t) \cdot \sin \phi(t) \cdot x(t). \end{cases} \quad (3.5)$$

Из первого уравнения системы (3.5) следует, что уравнение  $V(t) \equiv \dot{x}(t) - a_1 x(t) = 0$  имеет счетное число корней  $t_1, \dots, t_i, \dots$ , где  $\phi(t_i) = k_i \pi$ ;  $k_i$  целое число. Это означает, что функция  $V(t)$  меняет знак с периодом  $\pi$ . Следовательно, функции  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  также меняют знаки с периодом  $\pi$ .

Ясно, что существует  $t^* \in [0, \infty)$  такое, что при  $t > t^*$  функция  $|x(t)|$  является убывающей. Рисунок 12 демонстрирует это утверждение.

Наконец, если  $x(t) \rightarrow 0$ , то при  $b_1 = c_1 = 0$  и в силу сходимости интеграла  $\int_{t_0}^{\infty} x(\tau) d\tau$  из второго и третьего уравнений системы (1.1) следует, что решения  $y(t)$  и  $z(t)$  ограничены.

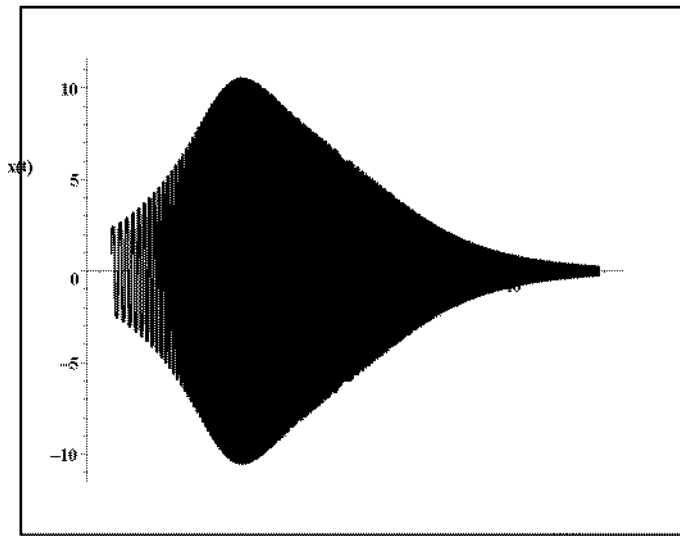


Рис. 12. Эволюция функции  $x(t)$

(с) Перепишем систему (1.1) в форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & -c_1 & b_1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ ;  $\mathbf{G}, \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Представим последнее уравнение в следующем интегральном виде:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(At)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp A(t - \tau)\mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau, \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{x}_0 \in W$ .

Из (3.6) следует:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k\|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t k\|\mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau))\| d\tau, \quad (3.7)$$

где  $k = \|\exp(At)\| < \infty$ .

При  $\mathbf{x}_0 \in W$  решение  $\mathbf{x}(t)$  уравнения  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$  ограничено. Следовательно, мы должны иметь  $\int_0^\infty \|\mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau))\| d\tau < \infty$ . Поэтому, воспользовавшись неравенством Гроноуола – Беллмана из (3.7), мы получаем:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k\|\mathbf{x}_0\| \exp \left[ \int_0^\infty k\|\mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau))\| d\tau \right] < \infty.$$

Теорема доказана.  $\square$

Пусть  $x(t_i) = x_i$ ,  $\rho(t_i) = \rho_i$ ,  $\phi(t_i) = \phi_i$ , где  $t_i$  – корни первого уравнения  $\dot{x}(t) = 0$  системы (3.5),  $i = 1, 2, \dots$ . Мы можем считать, что  $\dots < \phi_{i-1} < \phi_i < \phi_{i+1} < \phi_{i+2} < \dots$ .

Будем предполагать, что только одно из следующих двух условий имеет место:

или  $t_i, t_{i+1}$  и  $t_{i+2}$  являются последовательными минимумом, максимумом и минимумом  $\rho(t)$ ;  $i = 1, 2, \dots$ ;

или  $t_i, t_{i+1}$  и  $t_{i+2}$  являются последовательными максимумом, минимумом и максимумом функции  $x(t)$ ;  $i = 1, 2, \dots$ .

Предположим, что имеет место второй вариант.

**Теорема 3.2.** *Предположим, что существует момент  $t^*$  такой, что из условия  $t > t^*$  следует  $x(t) \geq 0$ . Пусть  $\forall i \in \{1, 3, 5, \dots\}$  выполняется условие*

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} \left[ b + c + (b - c) \cos 2\phi(\tau) - \frac{b_1(b - c)}{c_1} \sin 2\phi(\tau) \right] \cdot x(\tau) d\tau < 0. \quad (3.8)$$

Тогда в условиях теоремы 3.1 в системе (1.1) присутствуют или предельные циклы, или хаотические аттракторы.

Доказательство. Из системы (3.5) мы получаем:

$$x(t_i) = -\frac{\rho^2(t_i) \cdot (a_{11} \cos^2 \phi(t_i) + a_{12} \cos \phi(t_i) \sin \phi(t_i) + a_{22} \sin^2 \phi(t_i))}{a_1}, \quad (3.9)$$

$i = 1, 2, \dots$

Рассмотрим следующую дробь:

$$\frac{x_{i+2}}{x_i} = \frac{\rho_{i+2}^2 \cdot (a_{11} \cos^2 \phi_{i+2} + a_{12} \cos \phi_{i+2} \sin \phi_{i+2} + a_{22} \sin^2 \phi_{i+2})}{\rho_i^2 \cdot (a_{11} \cos^2 \phi_i + a_{12} \cos \phi_i \sin \phi_i + a_{22} \sin^2 \phi_i)}.$$

Из (3.9) следует, что  $\forall i$  величина  $\phi(t_{i+2}) - \phi(t_i) = \phi(T)$ , где  $\phi(T)$  – период функции  $a_{11} \cos^2 \phi(t) + a_{12} \cos \phi(t) \sin \phi(t) + a_{22} \sin^2 \phi(t)$ . Тогда

$$\frac{a_{11} \cos^2 \phi_{i+2} + a_{12} \cos \phi_{i+2} \sin \phi_{i+2} + a_{22} \sin^2 \phi_{i+2}}{a_{11} \cos^2 \phi_i + a_{12} \cos \phi_i \sin \phi_i + a_{22} \sin^2 \phi_i} = 1.$$

Любая функция вида  $d_{11} \cos^2 \phi + d_{12} \cos \phi \sin \phi + d_{22} \sin^2 \phi$  всегда может быть преобразована к форме  $g_1 + g_2 \cos 2\phi + g_{12} \sqrt{1 - \cos^2 2\phi}$ . Следовательно, период этих функций равен  $\pi$ . Тогда из третьего уравнения системы (3.5) вытекает

$$\phi(t_{i+2}) - \phi(t_i) = \pi = c_1(t_{i+2} - t_i) + \frac{b-c}{2} \int_{t_i}^{t_{i+2}} \sin 2\phi(t)x(t) dt; \quad c_1 < 0.$$

(Если  $c_1 > 0$ , то  $\phi(t_{i+2}) - \phi(t_i) = -\pi$ .)

Поэтому дробь  $x_{i+2}/x_i$  может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \frac{x_{i+2}}{x_i} &= \exp \left[ \frac{2b_1\pi}{c_1} + \int_{t_i}^{t_{i+2}} \left[ b+c + (b-c) \cos 2\phi(\tau) - \frac{b_1(b-c)}{c_1} \sin 2\phi(\tau) \right] \cdot x(\tau) d\tau \right] = \\ &= \lambda \exp \left[ \int_{t_i}^{t_{i+2}} \left[ b+c + (b-c) \cos 2\phi(\tau) - \frac{b_1(b-c)}{c_1} \sin 2\phi(\tau) \right] \cdot x(\tau) d\tau \right], \end{aligned}$$

где  $\lambda = \exp(2b_1\pi/c_1)$ .

Введем функцию

$$h(\phi) = b+c + (b-c) \cos 2\phi - \frac{b_1(b-c)}{c_1} \sin 2\phi.$$

Ограниченная функция  $x(t)$  является монотонно убывающей на интервале  $[t_i, t_{i+1}]$  и монотонно возрастающей на интервале  $[t_{i+1}, t_{i+2}]$ . Тогда мы имеем (из известной теоремы о среднем значении определенного интеграла):

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} h(\phi(\tau)) \cdot x(\tau) d\tau = \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(\phi(\tau)) \cdot x(\tau) d\tau + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} h(\phi(\tau)) \cdot x(\tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= x(t_i + 0) \int_{t_i}^{\xi} h(\phi(\tau)) d\tau + x(t_{i+1} - 0) \int_{\xi}^{t_{i+1}} h(\phi(\tau)) d\tau + \\
&+ x(t_{i+1} + 0) \int_{t_{i+1}}^{\zeta} h(\phi(\tau)) d\tau + x(t_{i+2} - 0) \int_{\zeta}^{t_{i+2}} h(\phi(\tau)) d\tau, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

где  $t_i \leq \xi \leq t_{i+1}$ ,  $t_{i+1} \leq \zeta \leq t_{i+2}$ . Мы можем считать, что  $t^* < t_i$ . Тогда функция  $x(t)$  является положительной на интервале  $[t_i, t_{i+2}]$ . Поэтому существуют величины  $\xi$  и  $\zeta$  такие, что

$$x(t_{i+1} - 0) \int_{\xi}^{t_{i+1}} h(\phi(\tau)) d\tau + x(t_{i+1} + 0) \int_{t_{i+1}}^{\zeta} h(\phi(\tau)) d\tau = 0.$$

Следовательно, из (3.10) следует:

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} h(\phi(\tau)) \cdot x(\tau) d\tau = p_i x_i + p_{i+2} x_{i+2},$$

где величины  $p_i = \int_{t_i}^{\xi} h(\phi(\tau)) d\tau$ ,  $p_{i+2} = \int_{\zeta}^{t_{i+2}} h(\phi(\tau)) d\tau$  могут иметь любые знаки.

Окончательно мы получаем:

$$x_{i+2} = \lambda x_i \exp(p_i x_i + p_{i+2} x_{i+2}); \quad i = 1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots \quad (3.11)$$

Очевидно, что если  $p_i x_i + p_{i+2} x_{i+2} < 0$ , то условие (3.8) будет выполнено. Предположим, что  $p_i = -p < 0$ ,  $p_{i+2} = m \in \mathbb{R}$ . Согласно теореме 3.1 все решения системы (1.1) ограничены. Поэтому условия (а) и (с) раздела 2 могут быть объединены в одно условие:  $-p + \lambda m < 0$  (см. раздел 2). Далее можно воспользоваться теоремой 2.3.

Например, положим  $\lambda = 20$ ,  $p_i = -4$ ,  $p_{i+2} = -1$ . Тогда после первой итерации мы получаем уравнение  $x = \lambda x \exp((p_i + p_{i+2})x)$ ; это уравнение имеет два корня: 0, 0.6. После второго шага итерации мы получаем уравнение  $x = \lambda^2 x \exp((p_i + 2p_{i+2})x + p_i \lambda \exp((p_i + p_{i+2})x))$ ; это уравнение имеет четыре корня: 0, 0.11, 0.6, 0.82 и так далее. Окончательно мы приходим к сценарию Фейгенбаума удвоения периода. Это означает существование в системе (1.1) предельных циклов или хаотических аттракторов.  $\square$

Пусть  $x_i = z_i > 0$ ,  $p_i = -1$ ,  $p_{i+2} = 0$ ,  $x_{i+2} = z_{i+1}$ . Тогда процесс (3.11) может быть переписан в виде:

$$z_{i+1} = z_i \exp(r - z_i), \quad r = \frac{2\pi b_1}{c_1} > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$



Процесс (3.12) называется дискретной популяционной моделью Риккера [5]. Известно [2], что модель Риккера имеет 2-циклы, 4-циклы и хаотический аттрактор когда, соответственно,  $r = 2.1$ ,  $r = 2.6$  и  $r = 3$ .

**Теорема 3.3.** *Предположим, что  $a_1 > 0$ ,  $a_1 + 2b_1 < 0$ ,  $a_{11}/b < 0$  и  $a_{22}/c < 0$ . Пусть также*

$$b + c \neq 0, \quad \frac{a_{12}^2}{(b+c)^2} - \frac{a_{11}a_{22}}{bc} < 0$$

*и существует момент  $t^*$  такой, что из условия  $t > t^*$  следует, что решение  $x(t)$  системы (1.1) положительно. Предположим также, что справедливы условия  $b_1 < 0$  и (3.8). Тогда в системе (1.1) существуют или предельные циклы, или хаотические аттракторы.*

*Доказательство.* Ограниченность решений системы (1.1), в условиях теоремы 3.3, следует из результатов работы [2]. С помощью замен переменных  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow -z$  всегда можно добиться того, что  $c_1 > 0$ . Поэтому мы можем считать, что в (3.5)  $c_1 > 0$ . Тогда из (3.5) будем иметь:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 + \int_0^t \left[ (b_1 + (b \cos^2 \phi(t) + c \sin^2 \phi(t)) \cdot x(t)) \cdot \rho(t) \right] d\tau < \\ &\rho_0 + \int_0^t \left[ (b \cos^2 \phi(t) + c \sin^2 \phi(t)) \cdot x(t) \cdot \rho(t) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Решение  $x(t)$  ограничено. Из (3.13) следует, что в условиях теоремы 3.2 решение  $\rho(t)$  также будет ограничено (мы напомним, что  $b_1 < 0$ ). Это означает, что и решения  $y(t)$  и  $z(t)$  системы (1.1) также будут ограничены.

Если мы постулируем ограниченность решения  $x(t)$ , то доказательство теоремы 3.3 полностью повторяет доказательство теоремы 3.2 при условии  $b + c \neq 0$ .  $\square$

Теорема 3.3 может быть обобщена следующим образом.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1x(t) + a_{11}y^2(t) + a_{12}y(t)z(t) + a_{22}z^2(t), \\ \dot{y}(t) = d_1x(t) + d_2y(t) + d_3z(t) + bx(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = e_1x(t) + e_2y(t) + e_3z(t) + cx(t)z(t). \end{cases} \quad (3.14)$$

Предположим, что матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

имеет спектр:  $0, \gamma \pm i\delta$ , где  $\gamma < 0, \delta \neq 0; \gamma, \delta, d_i, e_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 3$ .

Заменяем матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & -c_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

матрицей (3.15). Тогда для системы (3.14) мы можем получить результат, подобный теореме 3.3, в котором условие  $a_1 + 2b_1 < 0$  должно быть заменено условием  $a_1 + 2\gamma < 0$ .

Предположим, что система (1.1) при  $d_1 = e_1 = 0$  имеет хаотический аттрактор. Если значения  $d_1 = 0$ ,  $e_1 = 0$  не являются бифуркационными, то для достаточно малых величин  $|d_1|$  и  $|e_1|$  система (3.14) также имеет хаотический аттрактор.

#### 4. Примеры

Ниже, на рисунках 13 — 17, для системы (3.14) при различных значениях параметров, представлены новые типы хаотических аттракторов.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 20z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 20y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

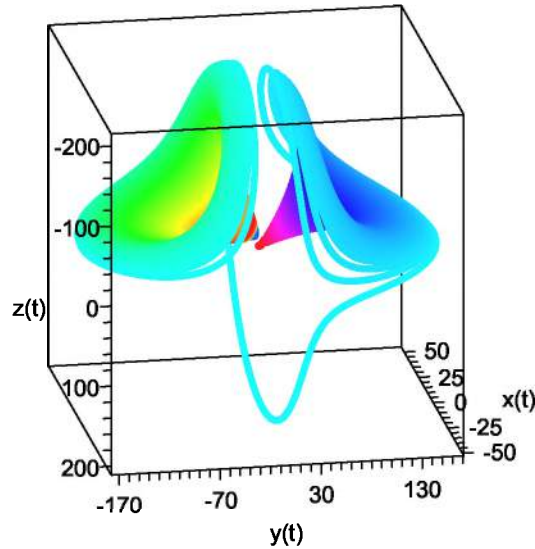


Рис. 13. Фазовый портрет системы (4.1) для  $t = 10$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4x(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 250z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 250y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases} \quad (4.2)$$

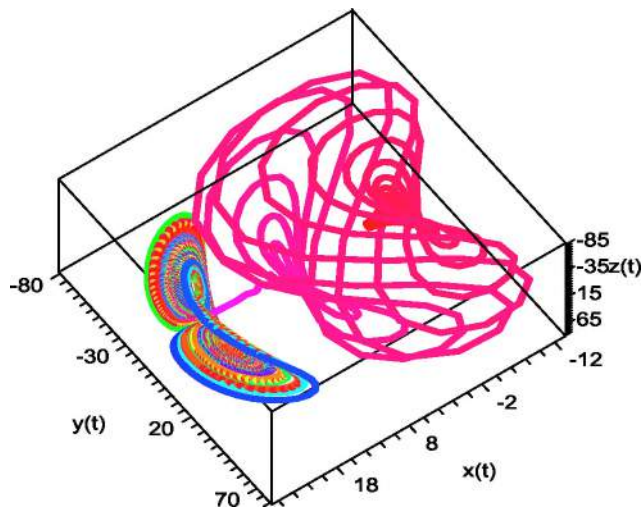


Рис. 14. Фазовый портрет системы (4.2) для  $t = 10$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) - 250z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = 250y(t) + z(t) - 15x(t)z(t), \end{cases} \quad (4.3)$$

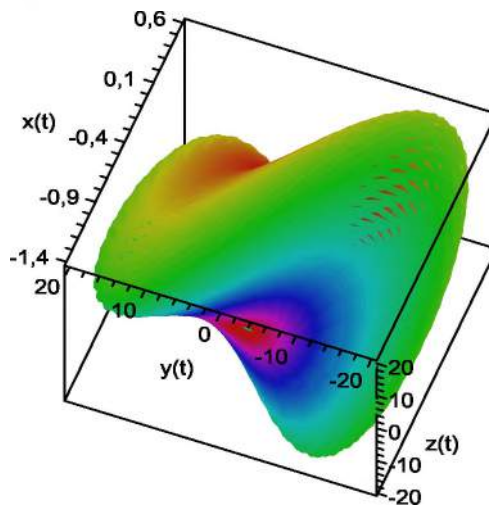


Рис. 15. Эволюции аттрактора системы (4.3) для  $t = 10$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -5x(t) + (1.6y(t) + z(t))(y(t) - z(t)), \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + 28z(t) - x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) - 28y(t) + 2z(t) + x(t)z(t). \end{cases} \quad (4.4)$$

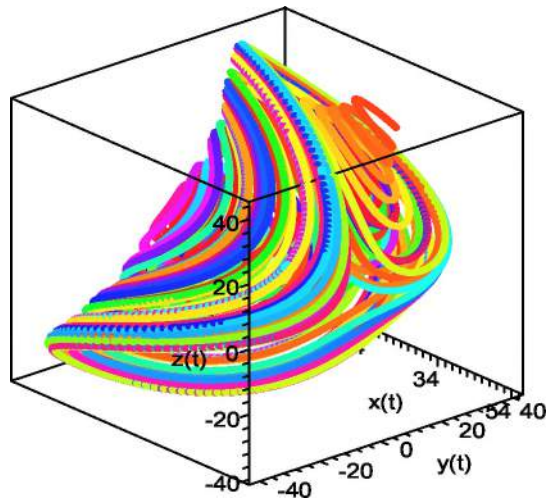


Рис. 16. Эволюции аттрактора системы (4.4) для  $t = 10$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - 10z(t) + 20(y^2(t) - z^2(t)), \\ \dot{y}(t) = 10z(t) - 20x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = 10x(t) - 10y(t) + 20x(t)z(t). \end{cases} \quad (4.5)$$

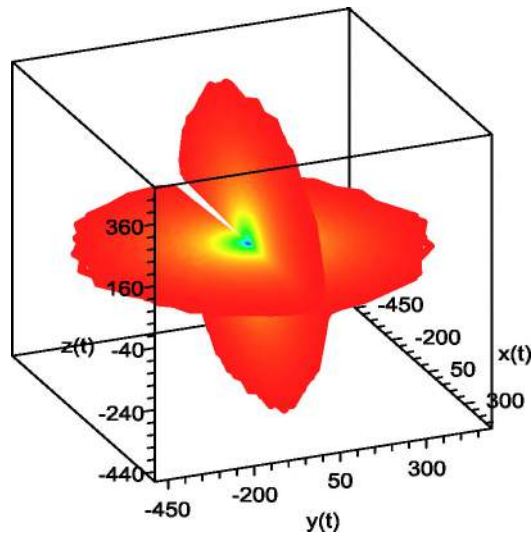


Рис. 17. Фазовый портрет системы (4.5) для  $t = 10$

В заключение заметим, что для систем (4.1), (4.2) и (4.5) условия теоремы 3.3 (и ее обобщений при  $d_1 = 0, e_1 = 1$ ) выполнены. Для систем (4.3), (4.4) эти условия не удовлетворены.

**Библиографические ссылки**

1. *Belozyorov V.Ye.* On existence of homoclinic orbits for some types of autonomous quadratic systems differential equations // Applied Mathematics and Computation, 2011. – Vol. 217. – P. 4582 – 4595.
2. *Belozyorov V.Ye.* New types of 3-D systems of quadratic differential equations with chaotic dynamics based on Ricker discrete population model // Applied Mathematics and Computation, 2011. – Vol. 218. – P. 4546 – 4566.
3. *Zhang X., Shi Y., Chen G.* Constructing chaotic polynomial maps // International Journal Bifurcation and Chaos, 2009. – Vol.19. – No. 2. – P. 531 – 543.
4. *Crownover R.M.* Introduction to Fractals and Chaos, Jones and Bartlett Publishers, Boston, London, 1995.
5. *Ricker W.E.* Stock and recruitment // Journal of Fisheries Research Board of Canada, 1954. – Vol. II. – P. 559 – 623.

Надійшла до редакції 26.12.2011