ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2012. Вип. 4. С. 3–18

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.9

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

І. Г. Баланенко*, П. І. Когут**

* *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: balanenko-ig@rambler.ru*

** *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: p.kogut@i.ua*

Досліджується задача оптимального керування для виродженого параболічного рівняння зі змішаними крайовими умовами на межі області. Із залученням нерівності типу Харді – Пуанкаре показано, що така задача має єдиний оптимальний розв'язок у вагових просторах Соболєва. Отримано та обгрунтовано необхідні умови оптимальності.

Ключові слова: оптимальне керування, принцип максимуму Понтрягіна, параболічне рівняння, необхідні умови оптимальності.

1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної роботи виступає задача оптимального керування для виродженого параболічного рівняння

$$\rho(x)\dot{y} - \nu \operatorname{div}\,(\rho(x)\nabla y) = f(t,x) + u(t,x) \quad \text{в } (0,T)\times\Omega$$

зі змішаними крайовими умовами на межі області. Початково-крайові задачі для вироджених параболічних рівнянь зазвичай виникають в задачах моделювання нестаціонарної дифузії з виродженням [10], в задачах дифузії на сингулярних та комбінованих структурах [4], а також в імовірнісних задачах, де ваговою функцією $\rho = \rho(x)$ виступає реалізація стохастично однорідного випадкового поля [5]. Характерною рисою вироджених параболічних рівнянь та пов'язаних із ними початково-крайових задач є та обставина, що проблема їх розв'язності суттєво залежить від властивостей вагової функції ρ. Той факт, що функція ρ може бути необмеженою на області Ω чи досягати нуля на підмножинах нульової міри Лебега, означає, що диференціальний оператор $\operatorname{div}\,(\rho(x)\nabla)$ втрачає властивість коерцитивності та неперервності на $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. У результаті, наведені задачі можуть успадковувати такі риси як неєдиність слабких розв'язків, ефект Лаврентьєва та інше. Зокрема, в контексті задачі, яка розглядається в даній статті, тут припускається, що простір фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним у ваговому просторі Соболєва $W_0^{1,2}(\Omega;\rho\,dx)$, який, як показано в [1,4], є базовим у теорії початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь. Разом з тим, залучаючи нерівність типу Харді – Пуанкаре, автори показали, що задача оптимального керування для вихідного виродженого параболічного рівняння має єдиний оптимальний розв'язок у вагових просторах Соболєва. Отримано та обгрунтовано необхідні умови оптимальності. Наведено постановку задачі керування, для якої єдиний оптимальний розв'язок можна отримати в явному аналітичному вигляді.

2. Основні позначення та факти

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ — обмежена відкрита підмножина з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ і при цьому $0 \in \mathbb{R}^N$ є внутрішньою точкою множини Ω. Нехай $Q = (0,T)\times\Omega$ є циліндром в $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^N$, де $T < +\infty$. Через $\Sigma = (0,T)\times\partial\Omega$ позначимо його бокову поверхню. Всюди далі будемо позначати через $C_0^\infty(\Omega)$ локально опуклий простір усіх нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в Ω і називати його простором фінітних функцій. Нехай $H_0^1(\Omega)$ є простором Соболєва, який утворено замиканням множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left[y^2(x) + |\nabla y(x)|^2_{\mathbb{R}^N}\right]\,dx\right)^{1/2}.$$

Зауважимо, що в силу нерівності Пуанкаре

$$\int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx \geq C\int_\Omega y^2\,dx \quad \forall\, y \in H_0^1(\Omega),$$

як норму в просторі $H_0^1(\Omega)$ достатньо взяти $\|y\|_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx$. Нехай функція $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ задовольняє умови: $\rho > 0$ майже скрізь (м. с.) на Ω і при цьому

$$\rho \in L^1(\Omega), \quad \rho^{-1} \in L^1(\Omega). \tag{2.1}$$

Зауважимо, що в загальному випадку $\rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$. Отже, функцію ρ можна утотожнити з мірою Радона на Ω, поклавши $\rho(E) = \int\limits_E \rho(x)\,dx$ для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$. Нагадаємо, що невід'ємною мірою Радона на Ω називають невід'ємну міру Бореля, яка є скінченною на кожній компактній множині. З функцією $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ надалі будемо пов'язувати вагові гільбертові простори $L^2(\Omega,\rho\,dx)$ та $L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx)$, де зокрема $L^2(\Omega,\rho\,dx)$ є гільбертовим простором вимірних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для яких

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega,\rho\,dx)} = (f,f)_{L^2(\Omega,\rho\,dx)} = \int_\Omega f^2\rho\,dx < +\infty.$$

Через $W_0^{1,2}(\Omega;\rho\,dx)$ (скорочено W_ρ) позначимо множину усіх функцій $y \in W_0^{1,1}(\Omega)$, для яких виконуються умови: $\rho y^2 \in L^1(\Omega)$, $\rho|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} \in L^1(\Omega)$, де градієнт ∇y варто розуміти в сенсі розподілень. Надалі W_ρ будемо називати ваговим простором Соболєва.

Наведемо один результат, який стосується нерівності типу Харді. Нехай $\lambda_* = (N-2)^2/4$. Тоді знайдеться стала $C(\Omega) > 0$ така, що (див. [7])

$$\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \geq C(\Omega) \int_\Omega y^2\, dx \quad \forall\, y \in H^1_0(\Omega). \tag{2.2}$$

Оскільки співвідношення (2.2) при $N = 2$ дає класичну нерівність Пуанкаре, то (2.2) називають нерівністю Харді – Пуанкаре (Hardy – Poincaré Inequality).

Зауваження 2.1. Нехай λ — довільна додатна стала така, що $\lambda < \lambda_*$. Тоді, залучаючи нерівність (2.2), приходимо до співвідношення:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx &= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, dx + \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda_*} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \geq \\ &\geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, dx + \frac{\lambda C(\Omega)}{\lambda_*} \int_\Omega y^2\, dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Отриманий результат означає, що вираз $\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx$ у випадку, коли $\lambda < \lambda_*$, можна брати як еквівалентну норму в просторі Соболєва $H^1_0(\Omega)$.

3. Постановка задачі оптимального керування та її попередній аналіз

Нехай $y_{ad} \in L^2(Q)$, $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho\, dx))$, та $y_0 \in L^2(\Omega)$ — задані функції. Нехай $\alpha > 0$ та $\nu > 0$ — фіксовані сталі. Нехай U_∂ — непорожня опукла замкнена підмножина в $L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx))$, яку для простоти будемо розглядати у вигляді:

$$U_\partial = \left\{ u \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)) \ : \ \|u - u_0\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\, dx))} \leq R \right\}. \tag{3.1}$$

Тут $u_0 \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx))$ та

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\, dx))} = \int_0^T \int_\Omega u^2(t,x) \rho^{-1}(x)\, dxdt.$$

Нехай межа області Ω розбита на дві підмножини додатної міри $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Покладемо далі $\Sigma_D = (0,T) \times \Gamma_D$ та $\Sigma_N = (0,T) \times \Gamma_N$. Нехай $\mathbf{n}$ є одиничним вектором зовнішньої нормалі до бокової поверхні Σ_N.

Розглянемо в циліндрі Q наступну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння із змішаними крайовими умовами:

$$I(u,y) = \frac{1}{2}\int_0^T \left\| y - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\Omega,\rho\,dx)} dt + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))} \longrightarrow \inf, \quad (3.2)$$

$$\rho(x)\dot{y} - \nu \operatorname{div}\,(\rho(x)\nabla y) = f(t,x) + u(t,x) \quad \text{в } Q = (0,T)\times\Omega, \quad (3.3)$$

$$y(t,x) = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_D, \quad \sqrt{\rho}\,\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} + \alpha y = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_N, \quad (3.4)$$

$$\sqrt{\rho(x)}\, y(0,x) = y_0 \ \text{ майже скрізь на } \ \Omega, \quad (3.5)$$

$$u \in U_\partial, \quad (3.6)$$

де позначено $\dot{y}(t,x) = \partial y(t,x)/\partial t$ та $\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\mathbf{n}, x_i)$.

Для того, щоб навести строгу математичну постановку задачі оптимального керування (3.2)–(3.6), введемо до розгляду наступні функціональні простори: $C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D) = \left\{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \ : \ \varphi = 0 \text{ on } \Gamma_D\right\}$ та $H_0^1(\Omega;\Gamma_D)$ як замикання $C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ відносно норми $\|y\| = \left(\int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx\right)^{1/2}$. Нехай простір $H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)$ є дуальним до простору Соболєва $H_0^1(\Omega;\Gamma_D)$. Позначимо через $W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D)$ та $\mathcal{W}_\rho$ замикання множини $C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ за нормами

$$\|y\|_{W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D)} = \|y\|_{L^1(\Omega} + \|\nabla y\|_{L^1(\Omega)^N}$$

та

$$\|y\|_{\mathcal{W}_\rho} = \int_\Omega y^2\,\rho\,dx + \int_\Omega \left|\nabla y + \frac{y}{2}\nabla \ln\rho\,\right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\,dx$$

відповідно. Отже, умова $y \in \mathcal{W}_\rho$ гарантує наступні властивості: $y \in L^2(\Omega,\rho\,dx)$ та $\left(\nabla y + \frac{1}{2}(\nabla\ln\rho)\,y\right) \in L^2(\Omega,\rho\,dx)^N$. Більше того, оскільки за нерівністю Коші – Буняковського мають місце оцінки

$$\left(\int_\Omega |y(x)|\,dx\right)^2 \le \int_\Omega y^2(x)\rho(x)\,dx\|\rho^{-1}\|_{L^1(\Omega)},$$

$$\left(\int_\Omega \left|\nabla y(x) + \frac{y}{2}\nabla\ln\rho\,\right|_{\mathbb{R}^N} dx\right)^2 \le \int_\Omega \left|\nabla y(x) + \frac{y}{2}\nabla\ln\rho\,\right|^2 \rho(x)\,dx\,\|\rho^{-1}\|_{L^1(\Omega)},$$

то простір $\mathcal{W}_\rho$ є повним відносно норми $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_\rho}$.

Таким чином, задача оптимального керування (3.2)–(3.6) полягає у визначенні пари функцій $(u^0,y^0) \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx)) \times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ (надалі її будемо називати оптимальною), яка б задовольняла співвідношенням (3.3)–(3.6) і на якій функціонал (3.2) досягав би свого найменшого можливого значення. Для того, щоб показати, що така постановка є коректною для задачі оптимального керування (3.2)–(3.6), перейдемо у співвідношеннях (3.3)–(3.5) до нових змінних, поклавши

$$y(t,x) = \rho^\beta(x)v(t,x),$$

де значення параметра β буде визначене нижче. Формальні перетворення дають $\nabla y = \beta v \rho^{\beta-1}\nabla\rho + \rho^{\beta}\nabla v$. Отже,

$$\begin{aligned}-\mathrm{div}\,(\rho\nabla y) =& -\mathrm{div}\,\left(\beta v\rho^{\beta}\nabla\rho + \rho^{\beta+1}\nabla v\right) = \\ =& -\beta\rho^{\beta}\,(\nabla v,\nabla\rho)_{\mathbb{R}^N} - \beta\rho^{\beta} v\Delta\rho - \beta^2\rho^{\beta-1}v\|\nabla\rho\|^2_{\mathbb{R}^N} - \\ & -(1+\beta)\rho^{\beta}\,(\nabla v,\nabla\rho)_{\mathbb{R}^N} - \rho^{\beta+1}\Delta v = \\ =& -\rho^{\beta+1}\Delta v - (1+2\beta)\rho^{\beta}\,(\nabla v,\nabla\rho)_{\mathbb{R}^N} - \\ & -\beta\rho^{\beta-1}\left(\rho\Delta\rho + \beta|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\right)v. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Поклавши в (3.7) $\beta = -1/2$, знаходимо:

$$-\mathrm{div}\,(\rho\nabla y) = -\sqrt{\rho}\,\Delta v - \frac{1}{2}\sqrt{\rho}\,V(x)v,$$

де позначено $V(x) = -\Delta\rho/\rho + |\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}/(2\rho^2)$. Далі зауважимо, що

$$|\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N} = \frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2},\quad \Delta\ln\rho = -\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} + \frac{\Delta\rho}{\rho}.$$

В результаті, маємо наступне подання для функції $V(x)$:

$$V(x) = -\Delta\ln\rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla\ln\rho(x)|^2_{\mathbb{R}^N}. \tag{3.8}$$

Означення 3.1. Будемо казати, що $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу, якщо $\rho > 0$ майже скрізь (м.с.) на Ω, $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$, існує підобласть $\Omega_* \subset \Omega$ така, що $\rho \in C^1(\overline{\Omega\setminus\Omega_*})$, де $\mathrm{dist}\,(\partial\Omega,\partial\Omega_*) > \delta$ при деякому $\delta > 0$, і при цьому виконуються наступні нерівності:

$$\rho(x) \ge \sigma \quad \text{на } \ \Omega\setminus\Omega_* \quad \text{при деякому } \ \sigma > 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}} < \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \quad \text{на } \ \Sigma_N, \tag{3.10}$$

$$-C \le -\Delta\ln\rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla\ln\rho(x)|^2_{\mathbb{R}^N} < \frac{2\lambda_*}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} = \frac{(N-2)^2}{2|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \quad \forall\, x\in\Omega. \tag{3.11}$$

Отже, у випадку коли функція $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ задовольняє умовам означення 3.1, приходимо до наступних співвідношень, які характеризують функцію v:

$$\dot v - \nu\,\Delta v - \frac{\nu}{2}V(x)\,v = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,f(t,x) + p\,(t,x) \quad \text{в } Q = (0,T)\times\Omega, \tag{3.12}$$

$$v(t,x) = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_D,\quad \frac{\partial v(t,x)}{\partial\mathbf{n}} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}}\right)v(t,x) = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_N, \tag{3.13}$$

$$v(0,x) = y_0(x) \ \text{ майже скрізь на } \ \Omega, \tag{3.14}$$

де $p(t,x) = u(t,x)/\sqrt{\rho(x)}$, а функція $V(x)$ означена в (3.8).

Приймаючи до уваги наведену заміну змінних та пов'язані з нею перетворення, введемо до розгляду нову задачу оптимального керування:

$$J(p,v) = \frac{1}{2}\,\|v - y_{ad}\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|p\|^2_{L^2(Q)} \longrightarrow \inf, \tag{3.15}$$

$$\text{при обмеженнях (3.12)–(3.14) та за умови, що} \tag{3.16}$$

$$p \in P_\partial := \left\{p \in L^2(Q) \;:\; \sqrt{\rho}\, p \in U_\partial\right\}. \tag{3.17}$$

Легко бачити, що у випадку (3.1), множина P_∂ набуває вигляду:

$$P_\partial = \left\{ p \in L^2(Q) \;:\; \left\| p - \frac{u_0}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(Q)} \le R \right\}.$$

Означення 3.2. Нехай $p \in P_\partial$ — довільне допустиме керування для задачі (3.15)–(3.17). Функцію $v \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega;\Gamma_D))$ будемо називати слабким розв'язком задачі (3.12)–(3.14), якщо виконуються такі умови:

(a) для кожного $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ та довільних $0 \le t_1 < t_2 \le T$ справджується інтегральна тотожність

$$\begin{aligned}(v(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \nu \int_{t_1}^{t_2} (\nabla v(t), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^N}\, dt - \frac{\nu}{2}\int_{t_1}^{t_2} (V v(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\, dt + \\ + \nu \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \mathbf{n}}\right) v(t)\varphi\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} f(t) + p(t), \varphi\right)_{L^2(\Omega)} dt;\end{aligned} \tag{3.18}$$

(b) при кожному $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ має місце рівність

$$\lim_{t\to 0+} (v(t),\varphi)_{L^2(\Omega)} = (y_0,\varphi)_{L^2(\Omega)}. \tag{3.19}$$

Для того, щоб довести розв'язність задачі (3.12)–(3.14) в сенсі означення 3.2, нагадаємо наступний результат (див., напр., [3, с. 75]):

Теорема 3.1. *Нехай V — рефлексивний сепарабельний банахів простір, який неперервно та компактно вкладений в гільбертів простір H, і нехай V^* — дуальний до V простір. Нехай $\mathcal{A} : V \to V^*$ — обмежений демінеперервний коерцитивний монотонний оператор. Тоді задача*

$$\dot y(t) + \mathcal{A}\, y(t) = f \quad \text{в} \;\; \mathcal{D}'(0,T),$$
$$y(0) = y_0$$

при кожних $f \in L^2(0,T;V^*)$ та $y_0 \in H$ має єдиний розв'язок $y \in \mathcal{W}(0,T)$, де

$$\mathcal{W}(0,T) = \left\{ y \in L^2(0,T;V) \;:\; \dot y \in L^2(0,T;V^*) \right\},$$

такий, що

$$(y(t),v)_H\big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathcal{A}\, y(t), v\rangle_{V^*;V}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v\rangle_{V^*;V}\, dt \quad \forall\, 0 \le t_1 < t_2 \le T,$$
$$\lim_{t\to 0+} \langle y(t), v\rangle_{V^*;V} = \langle y_0, v\rangle_{V^*;V} = (y_0, v)_H.$$

для довільного $v \in V$. *При цьому* $y \in C([0,T]; H)$.

Тут властивості монотонності, демінеперервності та коерцитивності оператора $\mathcal{A} : V \to V^*$ розуміються в такому сенсі:

$$\langle \mathcal{A}\, u - \mathcal{A}\, v, u - v\rangle_{V^*;V} \ge 0 \quad \forall\, u, v \in V; \tag{3.20}$$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \langle \mathcal{A}\, (u + tv)\,, w\rangle_{V^*;V} \quad \text{неперервне при всіх} \quad u, v, w \in V; \tag{3.21}$$

$$\lim_{\|v\|_V \to \infty} \langle \mathcal{A}\, v, v\rangle_{V^*;V}\, \|v\|_V^{-1} = +\infty. \tag{3.22}$$

Встановимо наступний результат:

Теорема 3.2. *Нехай* $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *є ваговою функцією потенціального типу. Тоді при заданих* $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho\, dx))$, $p \in L^2(Q)$ *та* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *початково-крайова задача* (3.12)–(3.14) *має единий слабкий розв'язок* $v = v(t,x)$ *(див. означення 3.2) такий, що*

$$\dot{v} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)) \quad і \quad v \in C([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{3.23}$$

Доведення. Покладемо

$$V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega;\Gamma_D) \;:\; \int_\Omega \left[|\nabla v|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2} V(x) v^2 \right] dx < +\infty \right\}, \quad H = L^2(\Omega)$$

і покажемо, що в цьому випадку виконуються усі передумови теореми 3.2. Справді, залучаючи нерівність (3.11) та аргументи, які наведені в зауваженні 2.1, доходимо висновку, що вираз $\int_\Omega \left[|\nabla v|^2_{\mathbb{R}^N} + \frac{1}{2} V(x) v^2 \right] dx$ є еквівалентним нормі в просторі $H_0^1(\Omega;\Gamma_D)$. Отже, $V = H_0^1(\Omega;\Gamma_D)$, що за теоремою Реліха–Кондрашова гарантує неперервність та компактність вкладення V в H. Пов'яжемо з задачею (3.12)–(3.14) лінійний оператор $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega;\Gamma_D) \to H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)$, який означимо за правилом:

$$\langle \mathcal{A} v, y\rangle_{H^{-1}(\Omega;\Gamma_D); H_0^1(\Omega;\Gamma_D)} = [v, y]_\rho \quad \forall\, y, v \in H_0^1(\Omega;\Gamma_D), \tag{3.24}$$

де $[\cdot,\cdot]_\rho : H_0^1(\Omega;\Gamma_D) \times H_0^1(\Omega;\Gamma_D) \to \mathbb{R}$ є наступною білінійною формою

$$[v, y]_\rho = \int_\Omega \left[(\nabla v, \nabla y)_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2} V(x) v y \right] dx + \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \mathbf{n}} \right) v y \, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.25}$$

Тоді, беручи до уваги співвідношення (3.9)–(3.10), теорему Соболєва про сліди та нерівність Харді–Пуанкаре (2.2), отримуємо: існують сталі $C_1, C_2 > 0$ такі, що

$$|[v,y]_\rho| \le (1+C_1)\,\|v\|_{H_0^1(\Omega;\Gamma_D)}\|y\|_{H_0^1(\Omega;\Gamma_D)},$$
$$[v-y,v-y]_\rho \ge \int_\Omega \left[|\nabla(v-y)|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2}V(x)(v-y)^2\right]dx \ge C_2\|v-y\|^2_{H_0^1(\Omega;\Gamma_D)}.$$

Тим самим, властивості монотонності, демінеперервності та коерцитивності оператора $\mathcal{A} : V \to V^*$ є виконаними. Оскільки умова $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho\,dx))$ гарантує, що $\frac{1}{\sqrt{\rho}} f \in L^2(Q) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Omega,\Gamma_D))$, то за теоремою 3.1 задача (3.12)–(3.14) має єдиний слабкий розв'язок у просторі $L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$ з властивостями (3.23), що і потрібно було встановити. $\square$

Зауваження 3.1. Як випливає з наведеного вище, оператор $\mathcal{A}$, який означений за правилом (3.24), допускає наступне подання $\mathcal{A} = -\Delta - \frac{1}{2}V(x)I$ і визначає ізоморфізм між просторами

$$\left\{v \in H_0^1(\Omega;\Gamma_D) \ : \ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \mathbf{n}}\right)v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_N\right\}$$

та $H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)$. Даний факт у поєднанні з компактністю вкладень $H_0^1(\Omega;\Gamma_D)$ в $L^2(\Omega)$ та $L^2(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)$ дозволяє отримати наступний висновок (див., напр., [9]): звуження оператора на простір $L^2(\Omega)$ дає необмежений самоспряжений оператор, для якого обернений оператор є компактним. Більше того, в цьому випадку існує ортонормований в $L^2(\Omega)$ базис $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, який утворено власними функціями оператора $\mathcal{A}$, та монотонно неспадна послідовність власних значень

$$0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \dots \le \mu_k \le \dots \to \infty$$

такі, що

$$-\Delta e_k - \frac{1}{2}V(x)e_k = \mu_k e_k \quad \text{в} \ \ \Omega, \tag{3.26}$$

$$e_k = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_D, \quad \frac{\partial e_k}{\partial \mathbf{n}} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \mathbf{n}}\right)e_k = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_N. \tag{3.27}$$

Зауваження 3.2. Залучаючи теорему 3.2, зауваження 3.1 та класичні результати теорії напівгруп [8], легко показати, що розв'язок початково-крайової задачі (3.12)–(3.14) в класі $C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$ можна єдиним чином подати у вигляді:

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\mu_k t}a_k + \int_0^t e^{-\mu_k(t-s)}[f_k(s)+p_k(s)]\,ds\right]e_k, \tag{3.28}$$

де функції $v_k(t) = e^{-\mu_k t}a_k + \int_0^t e^{-\mu_k(t-s)}[f_k(s)+p_k(s)]\,ds$ є розв'язками задач Коші

$$\dot{v}_k + \mu_k v_k(t) = f_k(t) + p_k(t), \ t \in (0,T), \ v_k(0) = a_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Тут $\{a_k\}$, $\{f_k(t)\}$ та $\{p_k(t)\}$ є коефіцієнтами Фур'є для функцій $y_0(x)$, $\frac{f(t,x)}{\sqrt{\rho(x)}}$ та $p(t,x)$, відповідно. Тобто,

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \quad f(t,x) = \sqrt{\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) e_k, \quad p(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) e_k.$$

Далі введемо до розгляду наступні множини:

$$\Lambda = \Big\{ (p,v) \in L^2(Q) \times L^2(0,T; H_0^1(\Omega;\Gamma_D)) \ \Big| \ p \in P_\partial, \text{ функція } v \text{ задовольняє} \\ \text{тотожності (3.18)–(3.19) при всіх } \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D) \text{ та } \ 0 \le t_1 < t_2 \le T \Big\}; \tag{3.29}$$

$$\Xi = \Big\{ (u,y) \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho\, dx)) \times L^2(0,T; \mathcal{W}_\rho) \ \Big| \ u \in U_\partial, \\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D) \text{ та } \ 0 \le t_1 < t_2 \le T \text{ виконуються тотожності} \\ \left(\rho\, y(t), \frac{\varphi}{\sqrt{\rho}} \right)_{L^2(\Omega)} \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \nu \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \left(\nabla y(t), \nabla \left(\frac{\varphi}{\sqrt{\rho}} \right) \right)_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx dt + \\ + \nu\alpha \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_N} y(t) \frac{\varphi}{\sqrt{\rho}}\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(f(t) + u(t), \frac{\varphi}{\sqrt{\rho}} \right)_{L^2(\Omega)} dt, \\ \lim_{t\to 0+} (y(t),\varphi)_{L^2(\Omega,\sqrt{\rho}\, dx)} = (y_0,\varphi)_{L^2(\Omega)} \Big\}, \tag{3.30}$$

які будемо надалі називати множинами допустимих розв'язків задач оптимального керування (3.12)–(3.14) та (3.2)–(3.6), відповідно.

Зауваження 3.3. Надалі функцію $y \in L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$, яка при кожному $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ задовольняє співвідношенням (3.30), будемо називати слабким розв'язком початково-крайової задачі (3.3)–(3.5).

Означення 3.3. Будемо казати, що пари функцій $(p^0,v^0) \in \Lambda$ та $(u^0,y^0) \in \Xi$ є оптимальними розв'язками задач (3.12)–(3.14) та (3.2)–(3.6), відповідно, якщо

$$\inf_{(p,v)\in\Lambda} J(p,v) = J(p^0,v^0), \qquad \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) = I(u^0,y^0).$$

Наступний результат є центральним у даному параграфі і показує, що означені задачі оптимального керування є в певному сенсі еквівалентними.

Теорема 3.3. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho\, dx))$, $y_{ad} \in L^2(Q)$ та $y_0 \in L^2(\Omega)$ є заданими функціями. Тоді допустима пара $(p^0,v^0) \in \Lambda$ є оптимальною в задачі* (3.12)–(3.14) *в тому і тільки тому випадку, коли*

$$(u^0,y^0) := (\sqrt{\rho}\, p^0, \frac{v^0}{\sqrt{\rho}}) \tag{3.31}$$

є оптимальною парою для вихідної задачі оптимального керування (3.2)–(3.6) *на множині* Ξ. *При цьому виконується рівність*

$$\inf_{(p,v)\in\Lambda} J(p,v) = J(p^0,v^0) = I(u^0,y^0) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y). \tag{3.32}$$

Доведення. Означимо на просторі $L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))\times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ відображення $\mathcal{F}$ за правилом $\mathcal{F}(u,y)=\left(\frac{u}{\sqrt{\rho}},\sqrt{\rho}\,y\right)$. Для початку покажемо, що $\mathcal{F}: L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))\times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)\to L^2(Q)\times L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D))$. Справді, для довільної пари $(u,y)\in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))\times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ маємо $(p,v)=\mathcal{F}(u,y)$, де

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))} = \int_0^T\int_\Omega \frac{u^2}{\rho}\,dxdt = \int_0^T\int_\Omega \left(\frac{u}{\sqrt{\rho}}\right)^2 dxdt = \|p\|^2_{L^2(Q)},$$

$$\begin{aligned}
\|y\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)} &= \int_0^T\int_\Omega y^2\,\rho\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \left|\nabla y + \frac{y}{2}\nabla\ln\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N}\rho\,dxdt = \\
&= \int_0^T\int_\Omega (\sqrt{\rho}\,y)^2\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \left|\sqrt{\rho}\,\nabla y + \frac{y}{2\sqrt{\rho}}\nabla\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N} dxdt = \\
&= \|\sqrt{\rho}\,y\|^2_{L^2(Q)} + \int_0^T\int_\Omega \left|\nabla\left(\sqrt{\rho}\,y\right)\right|^2_{\mathbb{R}^N} dxdt = \|v\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D))}.
\end{aligned}$$

Отже, як випливає з наведених співвідношень, $\mathcal{F}$ є ізометричним та бієктивним відображенням простору $L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))\times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ на простір $L^2(Q)\times L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D))$.

Далі покажемо, що $\mathcal{F}(\Xi)=\Lambda$. Нехай (u,y) — довільна пара множини Ξ і нехай $(p,v)=\mathcal{F}(u,y)$. Тоді умова (3.17) гарантує еквівалентність тверджень:

$$u\in U_\partial \;\Leftrightarrow\; p=\frac{u}{\sqrt{\rho}}\in P_\partial. \tag{3.33}$$

Далі зауважимо, що при кожному $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ має місце рівність

$$\lim_{t\to 0+}(y(t),\varphi)_{L^2(\Omega,\sqrt{\rho}\,dx)} = \lim_{t\to 0+}(v(t),\varphi)_{L^2(\Omega)} = (y_0,\varphi)_{L^2(\Omega)} \tag{3.34}$$

Отже, залишається показати еквівалентність інтегральних тотожностей (3.18) та $(3.30)_1$. Для цього скористаємося наступними перетвореннями:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \operatorname{div}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\rho\,y + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\rho\,y\right) = \\
&= -\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{4\rho\sqrt{\rho}}y + \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\Delta\rho\,y + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\operatorname{div}(\rho\nabla y) = \\
&= -\frac{1}{2}V(x)\sqrt{\rho}\,y + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\operatorname{div}(\rho\nabla y),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(t)}{\partial\mathbf{n}} &= \frac{\partial(\sqrt{\rho}\,y(t))}{\partial\mathbf{n}} = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}}y + \sqrt{\rho}\,\frac{\partial y(t)}{\partial\mathbf{n}} \overset{\text{залучаючи } (3.4)_2}{=} \\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}}\sqrt{\rho}\,y - \alpha y\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}\right)\sqrt{\rho}\,y.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

В результаті, маємо

$$
\begin{aligned}
0 &= (v(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \nu\int_{t_1}^{t_2} (\nabla v(t),\nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^N}\,dt+\\
&+\frac{\nu}{2}\int_{t_1}^{t_2}(Vv(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt+\nu\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_N}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}-\frac12\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}}\right)v(t)\varphi\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt-\\
&-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}f(t)+p(t),\varphi\right)_{L^2(\Omega)}dt=\\
&=(\sqrt{\rho}y(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\Big|_{t_1}^{t_2}-\nu\int_{t_1}^{t_2}\langle\Delta(\sqrt{\rho}\,y),\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega,\Gamma_D),H_0^1(\Omega,\Gamma_D)}\,dt-\\
&-\frac{\nu}{2}\int_{t_1}^{t_2}(V\sqrt{\rho}\,y(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt+\nu\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_N}\frac{\partial(\sqrt{\rho}\,y(t))}{\partial\mathbf{n}}\varphi\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt+\\
&+\nu\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_N}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}-\frac12\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}}\right)\sqrt{\rho}\,y(t)\varphi\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt-\\
&-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{f(t)}{\sqrt{\rho}}+\frac{u(t)}{\sqrt{\rho}},\varphi\right)_{L^2(\Omega)}dt\ \overset{(3.35)-(3.36)}{=}\\
&=(y(t),\varphi)_{L^2(\Omega,\rho^{1/2}\,dx)}\Big|_{t_1}^{t_2}-\nu\int_{t_1}^{t_2}\left\langle\operatorname{div}(\rho\nabla y),\frac{1}{\sqrt{\rho}}\varphi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega,\Gamma_D),H_0^1(\Omega,\Gamma_D)}dt-\\
&-\int_{t_1}^{t_2}(f(t)+u(t),\varphi)_{L^2(\Omega,\rho^{-1/2}\,dx)}\,dt=\\
&=\left(\rho\,y(t),\frac{\varphi}{\sqrt{\rho}}\right)_{L^2(\Omega)}\Bigg|_{t_1}^{t_2}+\nu\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\left(\nabla y(t),\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\rho}}\right)\right)_{\mathbb{R}^N}\rho\,dxdt+\\
&+\nu\alpha\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_N}y(t)\frac{\varphi}{\sqrt{\rho}}\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\left(f(t)+u(t),\frac{\varphi}{\sqrt{\rho}}\right)_{L^2(\Omega)}dt. \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Таким чином, інтегральні тотожності (3.18) та $(3.30)_1$ є еквівалентними. Отже, враховуючи отримані співвідношення (3.33), (3.34) та (3.37), робимо висновок: $\mathcal{F}(\Xi)=\Lambda$, що в силу отриманих вище властивостей відображення $\mathcal{F}$ дозволяє зробити висновок: пара (u,y) належить множині Ξ тоді і тільки тоді, коли $F(u,y)=(p,v)\in\Lambda$. Для завершення залишається зауважити, що для довільної допустимої пари $(u,y)\in\Xi$ маємо:

$$
\begin{aligned}
I(u,y)&=\frac12\int_0^T\left\|y-\frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}}\right\|^2_{L^2(\Omega,\rho\,dx)}dt+\frac12\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))}=\\
&=\frac12\int_0^T\|\sqrt{\rho}\,y-y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\frac12\int_0^T\int_\Omega\left|\frac{u}{\sqrt{\rho}}\right|^2dxdt=J(p,v).
\end{aligned}
$$

Отже, має місце рівність $J(F(u,y))=I(u,y)$, $\forall\,(u,y)\in\Xi$, що в силу бієктивності відображення $\mathcal{F}$ гарантує виконання співвідношення (3.32). $\square$

4. Теорема існування та умови оптимальності

Для доведення розв'язності задачі оптимального керування (3.2)–(3.6) скористаємося відомими результатами теорії оптимального керування системами з розподіленими параметрами (див., напр., [8]).

Теорема 4.1. *Нехай* $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *є ваговою функцією потенціального типу. Нехай* $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho\, dx))$, $y_{ad} \in L^2(Q)$ *та* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *є заданими функціями. Тоді задача оптимального керування* (3.2)–(3.6) *має єдиний розв'язок* (u^0, y^0) *в просторі* $L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)) \times L^2(0,T; \mathcal{W}_\rho)$.

Доведення. В силу теореми 3.3 задачі оптимального керування (3.12)–(3.14) та (3.2)–(3.6), при зроблених припущеннях, є еквівалентні. Отже, досить показати, що задача (3.12)–(3.14) є розв'язною і її розв'язок єдиний. Для цього зауважимо, що відображення $p \mapsto v(p)$ простору $L^2(Q)$ в простір $W(0,T) = \big\{v : v \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega; \Gamma_D)), \dot{v} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega; \Gamma_D))\big\}$, в силу зауваження 2.1 та умови (3.11), є неперервним, а функціонал вартості (3.15) — строго опуклий, обмежений знизу, коерцитивний та напівнеперервний знизу на $L^2(Q) \times L^2(0,T; H^1_0(\Omega; \Gamma_D))$. Отже, в силу теорем 1.1 та 1.2 в [8], існує єдина пара $(p^0, v^0) \in L^2(Q) \times L^2(0,T; H^1_0(\Omega; \Gamma_D))$ така, що $(p^0, v^0) \in \Lambda$ і $J(p^0, v^0) = \inf\limits_{(p,v)\in\Lambda} J(p,v)$, тобто (p^0, v^0) є оптимальною в задачі (3.12)–(3.14). Тоді, за теоремою 3.3, пара $(u^0, y^0) := (\sqrt{\rho}\, p^0, \frac{v^0}{\sqrt{\rho}})$ є єдиним оптимальним розв'язком для вихідної задачі (3.2)–(3.6), що і потрібно було встановити. □

Для того, щоб отримати умови оптимальності в задачі (3.2)–(3.6), скористаємося ідеями принципу максимуму та результатами з [2] (див. також [6, 8]). Нехай $p \in P_\partial$ — довільне допустиме керування в задачі (3.12)–(3.14), а $v = v(p)$ — відповідний йому розв'язок початково-крайової задачі (3.12)–(3.14) в $W(0,T)$. Введемо позначення: $[v] := v - v^0$ та $[p] := p - p^0$. Тоді $[v]$ є слабким розв'язком наступної задачі:

$$\dot{[v]} - \nu\,\Delta[v] - \frac{\nu}{2} V(x)[v] = [p] \quad \text{в } Q = (0,T)\times\Omega, \tag{4.1}$$

$$[v] = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_D, \quad \frac{\partial [v]}{\partial \mathbf{n}} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \mathbf{n}}\right)[v] = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_N, \tag{4.2}$$

$$[v]\big|_{t=0} = 0 \ \text{ майже скрізь на } \ \Omega. \tag{4.3}$$

Означимо функцію ψ як слабкий розв'язок задачі

$$-\dot{\psi} - \nu\,\Delta\psi - \frac{\nu}{2} V(x)\psi = v^0 - y_{ad} \quad \text{в } Q = (0,T)\times\Omega, \tag{4.4}$$

$$\psi = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_D, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \mathbf{n}}\right)\psi = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_N, \tag{4.5}$$

$$\psi(T,x) = 0 \ \text{ майже скрізь на } \ \Omega. \tag{4.6}$$

Оскільки $v^0 - y_{ad} \in L^2(Q)$, то, залучаючи аргументи теореми 3.2, легко показати, що такий розв'язок є єдиним у класі $W(0,T)$. Отже, обравши як тестову функцію $[v] := v - v^0$ і зауваживши, що $[v] \in W(0,T)$, а простір $W(0,T)$ неперервно вкладається в простір $C(0,T;L^2(\Omega))$ (див. [3]), маємо:

$$-\int_0^T (\dot{\psi}, [v])_{L^2(\Omega)}\, dt = \int_0^T (\psi, \dot{[v]})_{L^2(\Omega)}\, dt;$$

$$-\nu \int_0^T \langle \Delta\psi, [v] \rangle_{H^{-1}(\Omega,\Gamma_D);H_0^1(\Omega,\Gamma_D)}\ dt = \nu \int_0^T (\nabla\psi, \nabla[v])_{L^2(\Omega)^N}\ dt +$$
$$+\nu \int_0^T \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \mathbf{n}} \right) \psi[v]\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt.$$

Тому, помноживши співвідношення (4.4) на $[v] := v^0 - v$ і проінтегрувавши його в циліндрі Q за умов (4.5)–(4.6), отримаємо:

$$\begin{aligned} 0 = &\int_0^T (\psi, \dot{[v]})_{L^2(\Omega)}\, dt + \nu \int_0^T (\nabla\psi, \nabla[v])_{L^2(\Omega)^N}\ dt - \\ &- \frac{\nu}{2}\int_0^T (V\psi, [v])_{L^2(\Omega)}\ dt + \nu\int_0^T \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \mathbf{n}} \right) \psi[v]\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt - \\ &- \int_0^T \left(v^0 - y_{ad}, [v]\right)_{L^2(\Omega)}\ dt \overset{\text{за умов (4.1)–(4.2)}}{=} \int_0^T (\psi, [p])_{L^2(\Omega)}\ dt + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \psi \underbrace{\left(\dot{[v]} - \nu\,\Delta[v] - \frac{\nu}{2}V(x)[v] - [p] \right)}_{=0} dxdt - \\ &- \int_0^T \left(v^0 - y_{ad}, [v]\right)_{L^2(\Omega)}\ dt. \end{aligned} \tag{4.7}$$

В результаті приходимо до наступної рівності:

$$\left(v^0 - y_{ad}, [v]\right)_{L^2(Q)} = (\psi, [p])_{L^2(Q)}\,. \tag{4.8}$$

Отже, умова $J(p^0, v^0) = \inf_{(p,v)\in\Lambda} J(p,v)$ суть еквівалентна виконанню при всіх $p \in P_\partial$ нерівності

$$\begin{aligned} &\triangle\ J := J(p,v) - J(p^0,v^0) = J(p^0 + [p], v^0 + [v]) - J(p^0, v^0) = \\ &= \left(v^0 - y_{ad}, [v]\right)_{L^2(Q)} + \left(p^0, [p]\right)_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|[v]\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|[p]\|^2_{L^2(Q)} \ge 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

що вкупі з (4.8) дає:

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi + p^0)(p - p^0)\, dxdt \ge 0, \quad \forall\, p \in P_\partial. \tag{4.10}$$

Оскільки нерівність (4.9), а отже і (4.10), дає необхідні та достатні умови оптимальності в задачі (3.12)–(3.14), то основний результат даного розділу можна подати таким чином.

Теорема 4.2. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho\,dx))$, $y_{ad} \in L^2(Q)$ та $y_0 \in L^2(\Omega)$ є заданими функціями. Тоді оптимальний розв'язок $(u^0,y^0) \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx)) \times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ задачі (3.2)–(3.6) задається умовами:*

$$\left(\rho\Psi + u^0, u - u^0\right)_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))} \geq 0, \quad \forall\, u \in U_\partial, \tag{4.11}$$

де через Ψ позначено розв'язок в класі $L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ початково-крайової задачі

$$-\rho(x)\dot{\Psi} - \nu\,\mathrm{div}\,(\rho(x)\nabla\Psi) = y^0 - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \quad \text{в } Q = (0,T)\times\Omega, \tag{4.12}$$

$$\Psi(t,x) = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_D, \quad \sqrt{\rho}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} + \alpha\Psi = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_N, \tag{4.13}$$

$$\Psi(T,x) = 0 \ \text{ майже скрізь на } \ \Omega. \tag{4.14}$$

Доведення. Залучаючи теорему 3.3, співвідношення (3.31) та відображення $\mathcal{F}$, яке дається правилом $\mathcal{F}(u,y) = \left(\frac{u}{\sqrt{\rho}}, \sqrt{\rho}\,y\right)$, маємо:

$$\left(\rho\Psi + u^0, u - u^0\right)_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))} = \int_0^T\int_\Omega (\rho\Psi + u^0)(u-u^0)\rho^{-1}\,dxdt =$$
$$= \int_0^T\int_\Omega \left(\sqrt{\rho}\,\Psi + \frac{u^0}{\sqrt{\rho}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{\rho}} - \frac{u^0}{\sqrt{\rho}}\right)dxdt = \int_0^T\int_\Omega (\psi + p^0)(p - p^0)\,dxdt,$$

де позначено $\psi = \sqrt{\rho}\,\Psi$. Отже, в даному сенсі нерівності (4.10) та (4.11) є еквівалентні. Далі, залучаючи підстановку $\Psi = \psi/\sqrt{\rho}$ та перетворення типу (3.7), легко показати, що початково-крайова задача (4.12)–(4.14) еквівалентна задачі (4.4)–(4.4). Таким чином, в силу того, що виконання нерівності (4.10) є необхідною та достатньою умовою оптимальності в задачі керування (3.12)–(3.14), залишається скористатися теоремою 3.3. □

5. Аналітичне подання закону оптимального керування

Основним припущенням даного параграфа виступає така умова: $U_\partial = L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))$, яка по своїй суті означає, що на клас допустимих керувань не накладається жодних додаткових обмежень. Тоді з теореми 3.3 знаходимо $P_\partial = L^2(Q)$, а отже, умови оптимальності (4.10) гарантують, що оптимальне керування p^0 в задачі (3.12)–(3.14) задається правилом:

$$p^0(t,x) = -\psi(t,x) \quad \text{майже скрізь в } Q = (0,T)\times\Omega. \tag{5.1}$$

Таким чином, задача зводиться до визначення функцій p^0, v^0 та ψ. Нехай $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — повна ортонормована в $L^2(\Omega)$ система власних функцій крайової задачі (3.26)–(3.27), а $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — відповідна їй система власних значень (див. зауваження 3.1). Тоді, поклавши

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k e_k, \quad f(t,x) = \sqrt{\rho(x)}\sum_{k=1}^\infty f_k(t)e_k, \quad p^0(t,x) = \sum_{k=1}^\infty p_k(t)e_k, \tag{5.2}$$

відповідний оптимальний розв'язок v^0 початково-крайової задачі (3.12)–(3.14) в класі $C([0,T];L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$ можна єдиним чином подати у вигляді (3.28). Разом з тим, якщо в (4.4)–(4.6) покласти $\psi(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)e_k$, $y_{ad}(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k^{ad}(t)e_k$, то знаходимо $\dot{\psi}_k-\mu_k\psi_k(t)=v_k(t)-y_k^{ad}(t),\ t\in(0,T),\ \psi_k(T)=0,\ \forall\, k\in\mathbb{N}$, а отже,

$$p_k(t)=-\psi_k(t)=\int_t^T e^{\mu_k(t-\gamma)}\left(v_k(\gamma)-y_k^{ad}(\gamma)\right)d\gamma,\quad \forall\, k\in\mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Таким чином, підставляючи (3.28) в (5.3), приходимо до наступної системи інтегральних рівнянь Фредгольма відносно $p_k(t)$:

$$p_k(t)=\int_0^T F_k(t,s)p_k(s)\,ds+G_k(t),\quad \forall\, k\in\mathbb{N}, \tag{5.4}$$

де позначено

$$F_k(t,s)=\left\{\begin{array}{ll}\mathrm{sh}\,(T-t)\,e^{-\mu_k(T-s)}, & s\le t\\ \mathrm{sh}(T-s)\,e^{-\mu_k(T-t)}, & s>t\end{array}\right\},$$

$$G_k(t)=\int_t^T e^{\mu_k(t-\gamma)}\left[e^{-\mu_k\gamma}a_k-y_k^{ad}(\gamma)+\int_0^{\gamma}e^{-\mu_k(\gamma-s)}f_k(s)\,ds\right]d\gamma.$$

Оскільки розв'язки таких інтегральних рівнянь можна подати у вигляді рядів Ліувілля – Неймана $p_k(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(F_{k,i}G_k\right)(t)\ \forall\, k\in\mathbb{N}$, де позначено

$$\left(F_{k,i}f\right)(t)=\int_0^T F_k(t,s)\left(F_{k,i-1}f\right)(s)\,ds,$$

то, підставляючи їх у (5.2) та (3.31), приходимо до аналітичного подання закону оптимального керування для вихідної задачі (3.2)–(3.6).

6. Заключні зауваження

Уперше ідея залучення нерівностей типу Харді – Пуанкаре до проблеми розв'язності та стійкості крайових задач для параболічних рівнянь типу

$$u_t=\Delta u+V(x)u,\qquad \text{де}\ \ V(x)=\frac{\lambda}{r^2},\ r=|x|_{\mathbb{R}^N}, \tag{6.1}$$

була запропонована в праці [11], де авторами було наведено детальний аналіз умов існування глобальних розв'язків таких задач та умов, за яких глобальні розв'язки не існують. Зокрема, було встановлено, що критичну роль в даному випадку відіграє параметр λ. А саме, запропонована авторами класифікація умов розв'язності таких задач стосувалася трьох випадків: субкритичного ($\lambda<\lambda_*$), критичного ($\lambda=\lambda_*$), та суперкритичного ($\lambda>\lambda_*$), де величина λ_* є точною константою в нерівності Харді – Пуанкаре, тобто $\lambda_*=(N-2)^2/4$. Окрім цього, в [11] показано, що рівняння типу (6.1) з умовами Діріхле на межі області навіть у субкритичному випадку можуть допускати існування так званих сингулярних розв'язків, які не належать просторам Соболєва. Зокрема, у випадку, коли Ω є кулею $B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$, розв'язками рівняння (6.1) є наступні радіально симетричні функції:

$$u_1(r) = Cr^{-(N-2)/2+m}, \quad u_2(r) = Cr^{-(N-2)/2-m}, \quad m^2 = \lambda_* - \lambda.$$

Як видно, $u_1 \in H_0^1(B_R(0))$, в той час як $u_1 \notin H_0^1(B_R(0))$ при жодному $\lambda > 0$.

Власне кажучи, наведені результати свідчать, що проблема розв'язності відповідних задач оптимального керування такими об'єктами суттєво залежить від вибору множин допустимих розв'язків. У даній роботі отримано достатні умови розв'язності таких задач у просторах Соболєва, коли сингулярні розв'язки не включаються в число допустимих. Разом з тим, аналіз проблеми їх розв'язності на інших класах, зокрема у вагових просторах Соболєва $W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$, для яких простір фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ не утворює щільну множину, на сьогодні залишається відкритою проблемою.

Бібліографічні посилання

1. *Баланенко І. Г.* Про класифікацію розв'язків початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь/ І. Г. Баланенко, П. І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання.— Д.: Вид-во ДНУ, 2011, Вип. 3, № 8, С. 55–73.
2. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами/ А. И. Егоров.— М. : Наука, 1978. — 463 с.
3. *Иваненко В. И.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами/ В. И. Иваненко, В. С. Мельник.— К. : Наукова думка, 1988. — 324 с.
4. *Жиков В.В.* Оценки типа Нэша – Аронсона для вырождающихся параболических уравнений/ В. В. Жиков // Современная математика. Фундаментальные направления, 2011, Том. 39, С. 66–78.
5. *Жиков В.В.* Усреднение случайных сингулярных структур и случайных мер/ В. В. Жиков, А. Л. Пятницкий // Изв. РАН. Сер: Математика, 2006, №. 1, Том. 70, С. 241–290.
6. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения/ А. В. Фурсиков.— Новосибирск : Научная книга, 1999. — 352 с.
7. *Brezis H.* Blow-up solutions of some nonlinear elliptic equations/ H. Brezis, J. L. Vazquez // Rev. Mat. Complut, 1997, No. 2, Vol. 10, P. 443–469.
8. *Lions J.-L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations/ J.-L. Lions.— Berlin, Springer-Verlag, 1971.
9. *Naylor A. W.* Linear Operator Theory in Engineering and Science/ A W. Naylor, G. R. Sell.— New York: Springer, 2000. — 624 p.
10. *Grigor'yan A.* Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds/ A. Grigor'yan // J. Differential Geometry, 1997, Vol. 45, P. 33–52.
11. *Vazquez J. L.* The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential/ J. L.. Vazquez, E. Zuazua // J. of Functional Analysis, 2000, Vol. 173, P. 103–153.

Надійшла до редколегії 14.01.2012