

УДК 536.24

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Ю. Л. Меньшиков

*Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара,
Днепропетровск, 49050, проспект Гагарина 72
E-mail: Menshikov2003@mail.ru*

Рассматривается обратная задача восстановления формы дна канала по экспериментальным измерениям уровня свободной поверхности жидкости. Задача исследуется в двумерной постановке для случая стационарного течения несжимаемой жидкости вдоль канала конечной глубины. Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром, которое определяется приближенно. Для получения устойчивого решения используется метод регуляризации А. Н. Тихонова с выбором специальной математической модели.

Ключевые слова. Течение жидкости, обратная задача, регуляризация, специальный оператор.

1. Введение

Проектирование эффективных средств защиты от волновой эрозии, задачи обнаружения движущихся под поверхностью воды предметов различной формы, проектирования транспортных средств на подводных крыльях и другие, сводятся к решению обратных задач течения жидкости со свободной поверхностью [2], [8], [9]. Алгоритмы решения такого рода задач могут быть использованы в разведывательных целях. В данной работе рассматривается обратная задача восстановления формы дна канала по экспериментальным измерениям уровня свободной поверхности движущейся жидкости [10].

2. Постановка обратной задачи

Рассмотрим плоское стационарное движение жидкости, которая предполагается несжимаемой и идеальной (рис. 1). Известно, что потенциал скорости $\Phi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа [3]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1)$$

Граничные и начальные условия имеют вид [5]:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=-h} = 0, \forall t > 0 \quad \text{на дне канала;} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (2.3)$$

на свободной поверхности;

$$\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{y=0, t=0} = f(x); \quad (2.4)$$

$$\Phi|_{y=0, t=0} = F(x). \quad (2.5)$$

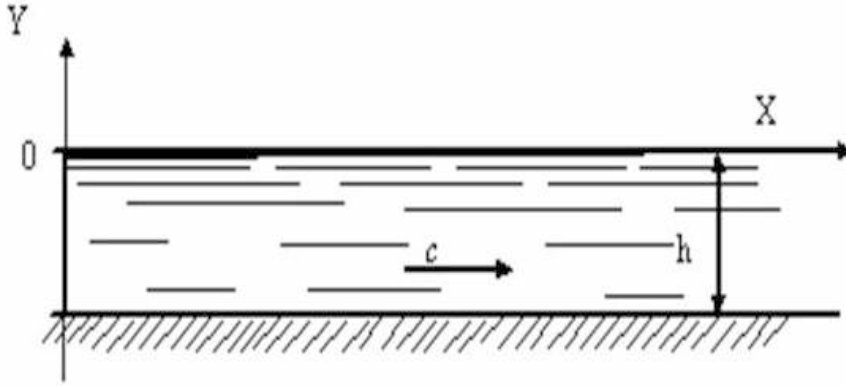


Рис. 1. Движение жидкости вдоль канала

Отклонение $w(x, t)$ точек поверхности движущейся жидкости от невозмущенного уровня определяется так:

$$w(x, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{y=0}. \quad (2.6)$$

Предположим, что вдоль канала конечной глубины h движется поток жидкости со скоростью c , при этом открытая поверхность остается совершенно гладкой. Некоторое возмущение изменяет этот закон течения, вызывая дополнительные скорости потенциального характера. Обозначим через u и v скорости координат Эйлера возмущенного движения:

$$u = c - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (2.7)$$

где Φ есть потенциал скоростей возмущенного потока.

Уравнения Бернулли имеет вид [3]:

$$\frac{p}{\rho} = N - gy - \frac{1}{2} \left[\left(c - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (2.8)$$

где p — давление, ρ — плотность, g — ускорение земного притяжения, N — const.

Если полагать, что скорости, которые возбуждаются, малы по сравнению с величиной c , будем иметь:

$$\frac{p}{\rho} = N - gy + c \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2.9)$$

Запишем (2.9) для открытой поверхности $\eta(x)$ при стационарном волновом движении:

$$\eta(x) = \frac{c}{g} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{y=0}. \quad (2.10)$$

Производная к профилю волны вдоль оси X должна совпадать с вектором скорости на поверхности жидкости:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(c - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^{-1} = - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{y=0}. \quad (2.11)$$

Из условий (2.10) и (2.11) вытекает условие для свободной поверхности жидкости [5] (при стационарном волновом движении):

$$\frac{c^2}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{y=0} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (2.12)$$

Будем полагать, что форма неровности дна канала имеет вид:

$$y = -h + \varepsilon \cos \alpha x, \quad (2.13)$$

где ε есть столь малое положительное число, что можно ограничиться лишь первыми степенями величин [5]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Граничное условие на дне канала имеет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0. \quad (2.14)$$

Условие на свободной поверхности остается в виде (2.12). Форма волны определяется выражением (2.10). Из граничных условий (2.2), (2.3) для формы дна в виде (2.13) получаем потенциал скоростей для канала конечной глубины:

$$\Phi(x, y) = \frac{\varepsilon c^3}{2\alpha \operatorname{ch} \alpha h (c^2 - c'^2)} \left[\left(\frac{g}{c^2} + \alpha \right) e^{\alpha y} + \left(\frac{g}{c^2} - \alpha \right) e^{-\alpha y} \right] \sin \alpha x, \quad (2.15)$$

где $(c')^2 = g \alpha^{-1} \operatorname{tg} \alpha h$ есть квадрат скорости распространения прогрессивных волн по поверхности канала постоянной глубины h .

Уравнение волны имеет вид:

$$\eta(x) = \frac{c}{g} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{y=0} = \gamma(\alpha) \cos \alpha x; \quad (2.16)$$

где $\gamma(\alpha) = c^2 \delta [\operatorname{ch} \alpha h (c^2 - (c')^2)]^{-1}$.

Полагаем теперь, что форма неровности дна канала имеет вид:

$$y_1 = -h + \delta \cos \alpha x = -h + z_1(x), \quad (2.17)$$

где δ – достаточно малое положительное число. Из граничных условий (2.8), (2.9) для формы дна в виде (2.17) получаем:

$$\Phi(x, y) = \frac{\delta c^3}{2\alpha \operatorname{ch} \alpha h (c^2 - c'^2)} \left[\left(\frac{g}{c^2} + \alpha \right) e^{\alpha y} + \left(\frac{g}{c^2} - \alpha \right) e^{-\alpha y} \right] \cos \alpha x, \quad (2.18)$$

Уравнение волны имеет вид:

$$\eta_1(x) = \frac{c}{g} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{y=0} = \frac{\delta c^2}{\operatorname{ch} \alpha h (c^2 - c'^2)} \sin \alpha x = \gamma_1(\alpha) \sin \alpha x, \quad (2.19)$$

где $\gamma_1(\alpha) = \delta c^2 [\operatorname{ch} \alpha h (c^2 - (c')^2)]^{-1}$.

В зависимости от величин c^2 и c'^2 изменяется взаимное расположение возвышенностей и впадин дна и поверхности. Если $c^2 > c'^2$, то взаимное расположение совпадает; если $c^2 < c'^2$, тогда будет обратная картина (возвышенности соответствует впадина).

Пусть $f(x)$ есть произвольная действительная непрерывная периодическая функция с периодом T . Тогда ее можно представить в виде тригонометрического ряда [1]:

$$f(x) = \frac{1}{c} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos \alpha_k x + b_k \sin \alpha_k x], \quad (2.20)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \cos \alpha_k \tau d\tau, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \sin \alpha_k \tau d\tau, \quad \alpha_k = 2\pi k T^{-1}.$$

По смыслу задачи функция $f(x)$ должна иметь нулевое среднее на периоде T , т. е. $a_0 = 0$. Каждое слагаемое функции $f(x)$ вызывает на свободной поверхности волну вида (2.16) или (2.19):

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(\alpha_k) \cos \alpha_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_1(\alpha_k) \sin \alpha_k x = \\ &= c^2 \sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k'^2)]^{-1} (a_k \cos \alpha_k x + b_k \sin \alpha_k x), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $c_k'^2 = g\alpha_k^{-1} \operatorname{th} dh$.

Из выражения (2.21) видно, что свободная поверхность в этом случае будет представлять собой периодическую непрерывную функцию периода T . Предположим, что свободная поверхность жидкости измерена экспериментальным путем и ее можно записать в виде:

$$\eta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos \alpha_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \sin \alpha_k x, \quad (2.22)$$

где

$$\lambda_k = \frac{2}{T} \int_0^T \eta(\tau) \cos \alpha_k \tau d\tau, \quad \sigma_k = \frac{2}{T} \int_0^T \eta(\tau) \sin \alpha_k \tau d\tau. \quad (2.23)$$

Если предположить, что каждое слагаемое в разложении (2.22) вызвано аналогичным слагаемым в разложении (2.20) функции $f(x)$, тогда имеем:

$$\lambda_k = \frac{a_k c^2}{\operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k^2)}, \quad \sigma_k = \frac{b_k c^2}{\operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k^2)},$$

$$a_k = \frac{\lambda_k}{c^2} \operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k^2), \quad b_k = \frac{\sigma_k}{c^2} \operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k^2),$$

$$f(x) = \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k \operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k^2) \cos \alpha_k x + \sigma_k \operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k^2) \sin \alpha_k x]. \quad (2.24)$$

Выражение (2.21) представим в виде:

$$\eta(x) = \int_0^T f(\tau) \frac{2c^2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k^2)} \cos \alpha_k (\tau - x) d\tau =$$

$$= \int_0^T f(\tau) K(x - \tau) d\tau = A_p f, \quad (2.25)$$

где

$$K(x - \tau) = 2c^2 T^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k^2)]^{-1} \cos \alpha_k (\tau - x),$$

A_p — интегральный оператор.

Представим выражение (2.24) в аналогичной форме:

$$f(x) = \frac{2}{Tc^2} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k^2) \int_0^T \eta(\tau) \cos \alpha_k (\tau - x) d\tau =$$

$$= \int_0^T \eta(\tau) K_1(x - \tau) d\tau = C_p \eta, \quad (2.26)$$

где $K_1(x - \tau) = 2(Tc)^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ch} \alpha_k h (c^2 - c_k^2) \cos \alpha_k (\tau - x)$, C_p — интегральный оператор.

Очевидно, что $C_p = A_p^{-1}$, так как

$$f(x) = C_p \eta = C_p A_p f = E f = f,$$

где E — единичный оператор (тождественный оператор).

Пусть теперь $f(x)$ есть произвольная абсолютно интегрируемая на оси $(-\infty, \infty)$ функция. Тогда ее можно представить в виде:

$$f(x) = \int_0^T [a(\xi) \cos \xi x + b(\xi) \sin \xi x] d\xi. \quad (2.27)$$

Форма свободной поверхности жидкости от слагаемого $a(\xi) \cos \xi x$ будет иметь вид:

$$\eta_0(x, \alpha) = \frac{c^2 a(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha h (c^2 - c_k^2)} \cos \alpha x,$$

а от слагаемого $b(\xi) \sin \xi x$ —

$$\eta_1(x, \alpha) = \frac{c^2 b(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha h (c^2 - c_k^2)} \sin \alpha x.$$

От двух слагаемых форма поверхности будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int_0^\infty \eta_0(x, \alpha) d\alpha + \int_0^\infty \eta_1(x, \alpha) d\alpha = \\ &= \int_0^\infty [a(\alpha) \cos \alpha x + b(\alpha) \sin \alpha x] \frac{c^2}{(c^2 - c_k^2) \operatorname{ch} \alpha h} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.28)$$

где

$$a(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \cos \alpha \xi d\xi, \quad b(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \sin \alpha \xi d\xi.$$

Далее

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int_0^\infty \frac{2c^2}{\pi(c^2 - c'^2) \operatorname{ch} \alpha h} \left[\int_0^\infty f(\xi) \cos \alpha \xi \cos \alpha x d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty f(\xi) \sin \alpha \xi \sin \alpha x d\xi \right] d\alpha = \\ &= \frac{2c^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(c^2 - c'^2) \operatorname{ch} \alpha h} \int_0^\infty f(\xi) \cos \alpha(x - \xi) d\alpha = \\ &= \int_0^\infty f(\xi) K(x - \xi) d\xi = Af, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$K(x - \xi) = 2c^2(\pi)^{-1} \int_0^\infty [(c^2 - c'^2) \operatorname{ch} \alpha h]^{-1} \cos \alpha(x - \xi) d\alpha, \quad c'^2 = g\alpha^{-1} \operatorname{th} \alpha h,$$

A — интегральный оператор.

Представим $\eta(x)$ в виде интеграла Фурье

$$\eta(x) = \int_0^\infty [\lambda(\alpha) \cos \alpha x + \sigma(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha. \quad (2.30)$$

$$\eta(x) = \int_0^L f(\xi) K(x - \xi) d\xi = \tilde{A}(L)f, \quad (2.31)$$

где $\tilde{A}(L)$ — интегральный оператор, зависящий от параметра L .

Кроме того, при приближенном решении уравнения (2.29) будем полагать, что спектр функции $z(x)$ ограничен константой N :

$$\alpha \leq N. \quad (2.32)$$

Неравенство (2.32) можно обосновать и с другой точки зрения. Предполагается в обратной задаче для течения жидкости вдоль канала со свободной поверхностью, что возмущения поверхности $\eta(x)$ измеряются экспериментально с помощью некоторого прибора или устройства. Для любого реального прибора полоса воспринимаемых частот ограничена сверху. Поэтому

в любом случае (даже если $f(x)$ имеет неограниченный спектр) при измерениях получаем функцию $\tilde{f}(x)$ с ограниченным спектром.

Отсюда имеем:

$$\tilde{\eta}(x) = \int_0^L \tilde{f}(\xi) K_N(x - \xi) d\xi = \tilde{A}(L, N) \tilde{f}, \quad (2.33)$$

где

$$K_N(x - \xi) = \frac{2c^2}{\pi} \int_0^N \frac{1}{(c^2 - c'^2) \operatorname{ch} \alpha h} \cos \alpha(x - \xi) d\alpha.$$

Для функции $\tilde{f}(x)$ получаем выражение:

$$\tilde{f}(x) = \int_0^L \tilde{\eta}(\xi) K_{1,N}(x - \xi) d\xi = \tilde{C}(L, N) \tilde{\eta}, \quad (2.34)$$

где

$$K_{1,N}(x - \xi) = \frac{2}{\pi c^2} \int_0^N (c^2 - c'^2) \operatorname{ch} \alpha h \cos \alpha(x - \xi) d\alpha, \tilde{C}(L, N)$$

есть интегральный оператор, зависящий от L, N . Очевидно, что $\tilde{C}(L, N) = \tilde{A}^{-1}(L, N)$, так как

$$\tilde{f}(x) = \tilde{C}(L, N) \tilde{\eta}(x) = \tilde{C}(L, N) \tilde{A}(L, N) \tilde{f}(x) = E \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x). \quad (2.35)$$

Введем обозначения: $u_\delta(x) = \tilde{\eta}(x)$, $z(x) = \tilde{f}(x)$, с целью перехода к традиционным обозначениям в теории некорректно поставленных задач. Тогда уравнение (2.33) будет иметь вид:

$$A_p z = u_\delta, \quad (2.36)$$

где $u_\delta \in U = L_2[c, d]$, $z \in Z = C[a, b]$, $A_p : Z \rightarrow U$ — интегральный оператор в (2.33), зависящий от вектор-параметров математической модели процесса $p = (h, g, c, N, L)^T$ ($(\cdot)^T$ — знак транспонирования). Нетрудно показать, что в этих условиях оператор A_p будет вполне непрерывным [6]. Это приводит к тому, что задача решения уравнения (2.36) будет неустойчивой к малым измерениям исходных данных [6].

Будем полагать, что правая часть уравнения (2.36) (функция u_δ) и оператор A_p заданы приближенно с некоторой фиксированной погрешностью δ и h :

$$\|u_\delta - u_T\|_U \leq \delta, \quad \|A_p - A_T\|_{Z \rightarrow U} \leq h,$$

где u_T есть точная правая часть, A_T — точный оператор в уравнении (2.36). Погрешность оператора A_p при этом определяется только погрешностью вектор-параметра математической модели процесса $p = (h, g, c, N, L)^T$.

Для получения устойчивого решения в работе используется метод регуляризации А. Н. Тихонова для уравнений с приближенно заданным оператором [6]. В качестве стабилизирующего функционала выбран следующий:

$$\Omega[z] = \int_a^b [z'^2(s) + z^2] ds. \quad (2.37)$$

Такой выбор стабилизирующего функционала дает возможность получать нижние оценки точного решения в смысле гладкости и максимального отклонения от нуля в квадратичной метрике.

За регуляризованное решение принимается решение следующей экстремальной задачи:

$$\Omega[\tilde{z}] = \inf_{z \in Q_{\delta, h} \cap Z_1} \Omega[z], \quad (2.38)$$

где $Q_{\delta, h} = \{z : z \in Z, A_p \in K_A, \|A_p z - u_\delta\| \leq \delta + h\|z\|_Z\}$, Z_1 — множество всюду плотное в Z . Предварительные расчеты показали, что точность приближенного решения очень невысокая и что оно практически всегда будет совпадать с тривиальным решением [10].

Для повышения точности приближенного решения использовался метод выбора специального оператора [4]. В общем случае вектор параметров математической модели имеет вид:

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T.$$

Будем полагать, что каждая компонента вектора p может принимать значения из заданного промежутка

$$p_i^0 \leq p_i \leq \hat{p}_i, i = \overline{1, n}, \quad (2.39)$$

где p_i^0, \hat{p}_i — известны, т. е. вектор $p \in D \subset R^n$, где D есть замкнутый параллелепипед в R^n (n есть размерность вектора p). Каждому вектору p соответствует определенный оператор A_p в уравнении (36). Множество таких вполне непрерывных операторов A_p обозначим как класс $K_A = \{A_p\}$. Совершенно очевидно, что абсолютно точный оператор в уравнении (2.36) не принадлежит классу K_A , так как его структура неизвестна и он не может быть записан в конечной форме (т. е. посредством конечного числа параметров). Однако будем предполагать, что при фиксированном уровне идеализации описания реального процесса существует некоторый оператор A_T , который имеет структуру, совпадающую со структурой операторов A_p и для которого выполняется равенство $A_T z_T = u_T$. Поэтому будем полагать, что параметры, соответствующие оператору A_T , также удовлетворяют неравенствам (2.39). Этот оператор можно трактовать как точный оператор (но не абсолютно точный оператор). Во всех дальнейших рассуждениях будем оператор A_T ($A_T \in K_A$) понимать именно в таком смысле. Под точным решением z_T уравнения (2.36) понимается функция из Z , которая удовлетворяет условию $A_T z_T = u_T$.

Для уменьшения погрешности приближенного регуляризованного решения уравнения (2.36) предлагается использовать метод специальной минимальной (максимальной) математической модели, или сокращенно СMinMM (СMaxMM) [4].

Допустим, что среди векторов $p \in D$ можно выделить некоторый вектор $p_0 \in D$, что выполняется неравенство: $\Omega[A_p^{-1}u] \geq \Omega[A_{p_0}^{-1}u]$ для любой допустимой функции $u \in U$ и любого вектора $p \in D$, где A_p^{-1} есть обратный оператор к A_p . Оператор $A_{p_0} \in K_A$ с параметрами, соответствующими вектору $p_0 \in D$, будем называть специальным минимальным оператором. Математическую

модель с параметрами, соответствующими вектору $p_0 \in D$, будем называть СMinMM.

Пусть среди векторов $p \in D$ можно выделить некоторый вектор $p^1 \in D$, что выполняется неравенство: $\Omega[A_p^{-1}u] \leq \Omega[A_{p^1}^{-1}u]$ для любой допустимой функции $u \in U$ и любого вектора $p \in D$. Оператор $A_{p^1} \in K_A$ с параметрами, соответствующими вектору $p^1 \in D$, будем называть специальным максимальным оператором. Математическую модель с параметрами, соответствующими вектору $p^1 \in D$, будем называть СMaxMM.

Рассмотрим теперь вопрос о свойствах функции

$$\Omega[N] = \int_0^T \left\{ \left[\int_0^L \tilde{\eta}(\xi) K_{1,N}(x - \xi) d\xi \right]^2 + \left[\int_0^L \tilde{\eta}(\xi) \frac{\partial}{\partial x} K_{1,N}(x - \xi) d\xi \right]^2 \right\} dx.$$

От свойств этой функции будет зависеть возможность использования в расчетах специальной математической модели. Можно показать, что производная этой функции по N будет положительной при любых значениях остальных параметров MM исследуемого процесса. Следовательно, СminMM будет соответствовать минимальному значению параметра N , а СmaxMM — максимальному значению параметра N .

Для численной реализации бесконечномерных задач необходимо аппроксимировать исходную задачу конечномерной задачей. В дальнейшем будем считать, что погрешность такой аппроксимации достаточно мала и она учтена при определении величин h и δ . Можно рассматривать переход к конечномерной аппроксимации как внесение дополнительной малой погрешности оператора A_p интегрального уравнения.

За основу численного алгоритма решения уравнения был выбран численный алгоритм, описанный в работе [6]. В данной работе численный алгоритм составлен на PASCAL, значительно переработана расчетная часть, модернизирован интерфейс, добавлены сервисные функции по контролю и управлению программой.

Изложим вначале общие принципы построения алгоритма, а дальше опишем специфику алгоритма относительно интегральных уравнений Фредгольма первого рода в данном случае. Будем считать, что точная искомая функция $z_T(s)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет почти всюду, по крайней мере, первую производную, что интегрируется с квадратом, то есть $z_T(s) \in W_2^1[a, b]$. Используя стандартную схему построения алгоритма регуляризации, получаем приближенное решение $z \in W_2^1[a, b]$, которое при $h \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$ сходится к $z_T(s)$ в норме пространства $W_2^1[a, b]$. А это означает, что $z_\alpha \rightarrow z_T$ при $h, \delta \rightarrow 0$ в равномерной метрике.

Сглаживающий функционал $M^\alpha[z]$ имеет стандартный вид [6]:

$$\begin{aligned} M^\alpha[z] &= \|A_p z - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2 = \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b K(x, s) z(s) ds - u_\delta(x) \right]^2 dx + \alpha \int_a^b [(z')^2(s) + z^2(s)] ds. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Прежде всего выбираются равномерные сетки $\{s_i\}_{i=1}^n$ и $\{x_j\}_{j=1}^m$ на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$, соответственно (h_s — шаг сетки по s , h_x — шаг сетки по x).

Для аппроксимации интегралов в формуле (2.40) используем формулы прямоугольников:

$$\int_c^d \left[\int_a^b K(x, s) z(s) ds - u_\delta(x) \right]^2 dx \approx \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i h_s - u_j \right]^2 h_x,$$

$$\int_a^b z^2(s) ds \approx \sum_{i=1}^n z_i^2 h_s, \quad \int_a^b z'^2(s) ds \approx \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{h_s},$$

$$a_{ij} = K(x_j, s_i), i = \overline{2, n-1}, j = \overline{1, m}; a_{ij} = 0.5K(x_j, s_i), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

После конечномерной аппроксимации сглаживающего функционала будем иметь

$$\tilde{M}^\alpha[z] = \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^n a_{ji} z_i h_s - u_j \right]^2 h_x + \alpha \sum_{i=1}^n z_i^2 h_s + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{h_s}. \quad (2.41)$$

Необходимые условия минимума функционала $\tilde{M}^\alpha[z]$ по переменным z_i , $i = \overline{1, n}$ имеют вид (при всех $j = \overline{2, n-1}$):

$$\begin{aligned} h_x h_s \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^m a_{ik} a_{i1} z_k + \alpha h_s z_1 - \frac{\alpha}{h_s} (z_2 - z_1) \right] &= \sum_{i=1}^m a_{i1} u_i h_s h_x; \\ h_x h_s \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^m a_{ik} a_{ij} z_k + \alpha h_s z_j - \frac{\alpha}{h_s} (z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}) \right] &= \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i h_s h_x; \\ h_x h_s \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^m a_{ik} a_{in} z_k + \alpha h_s z_n - \frac{\alpha}{h_s} (z_{n-1} - z_n) \right] &= \sum_{i=1}^m a_{in} u_i h_s h_x. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Введем обозначения: $h_x \sum_{i=1}^m a_{ik} a_{ij} = b_{jk}$ — элементы матрицы B ; $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i h_x = f_j$ — компонента вектора f ;

$$C = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{h_s^2} & -\frac{1}{h_s^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_s^2} & 1 + \frac{1}{h_s^2} & -\frac{1}{h_s^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h_s^2} & 1 + \frac{1}{h_s^2} \end{bmatrix}$$

Тогда система (2.42) запишется в виде:

$$Bz_\alpha + \alpha C z_\alpha = f \quad (2.43)$$

или

$$A_p^\alpha z_\alpha = A_p^T A_p z_\alpha + \alpha C z_\alpha = A_p^T u_\delta, \quad (2.44)$$

где: A_p^T — транспонированная матрица к A_p , $A_p = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{n,m}$. Параметр регуляризации определяется по методу обобщенной невязки.

Для устранения отрицательного влияния неконтролируемой погрешности в начальных условиях в программу введен блок, в котором происходит фильтрация исходных данных. Выбор способа специальной обработки (фильтрации) зависит от конкретной задачи.

Для проверки работоспособности предлагаемого алгоритма решения интегрального уравнения выполнен тестовый расчет.

Для тестового расчета выбрана задача обтекания плоского крылового профиля под свободной поверхностью идеальной несжимаемой жидкости [7]. Параметры математической модели в этом случае имеют следующие значения: $H = 10 \text{ m}$, $h = 1,5 \text{ m}$, $g = 9,82 \text{ m/c}^2$, $V = 70 \text{ m/c}$. Уравнение (2.36) будем рассматривать в безразмерных переменных, выбирая в качестве характерной длины глубину слоя жидкости H . Тогда

$$h = 0.15, g = 1 \text{ c}^{-2}, V = 7 \text{ c}^{-1}, Fr = V^2/gL = 100, [0, L] = [0; 0.5],$$

где Fr — число Фруда.

График свободной поверхности жидкости для данного примера показан на рисунке 2.

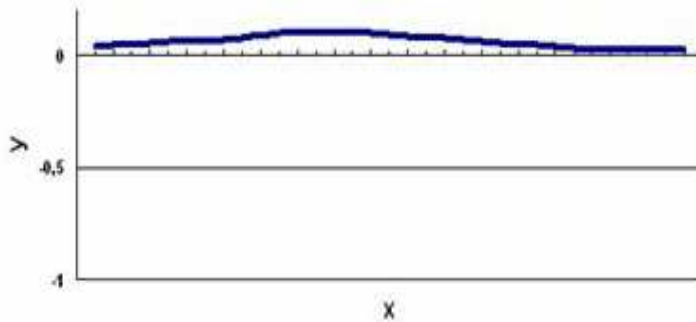


Рис. 2. Вид свободной поверхности жидкости

Численные значения функции $u_\delta(x)$ представлены в таблице:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_\delta(x)$	1.7	2.0	2.5	2.6	3.2	3.9	4.0	4.0	3.9
x	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$u_\delta(x)$	3.2	2.9	2.4	1.9	1.4	1.0	1.0	1.0	0.9

Погрешность функции $u_\delta(x)$ по отношению к точной функции $u_T(x)$ определяется величиной δ :

$$\|u_T - u_\delta\|_U \leq \delta = 7 \cdot 10^{-6}.$$

Величина погрешности оператора A_p в уравнении (2.36) по отношению к точному оператору A_T равна: $\|A_T - A_p\|_{C \rightarrow L_2} \leq h = 0.1$.

Результаты расчетов представлены на рисунке 3.

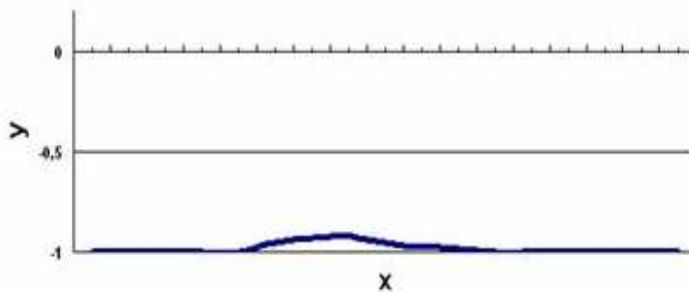


Рис. 3. Профиль дна канала

3. Выводы

Из рисунка 3 видно, что при относительно небольшой погрешности измерения уровня свободной поверхности жидкости возможно восстановление профиля дна канала, которое создает возмущение свободной поверхности, аналогичное возмущению от крыла.

Библиографические ссылки

1. Зорич В. А. Математический анализ. ч. II. // М.: Наука, 1984. — 640 с.
2. Ильинский Н. В. Обратные краевые задачи механики жидкости и газа // Современ. пробл. мех.: Тез. докл. Юбил. науч. конф., посвящ. 40-летию Ин-та мех. МГУ, Москва, 22–26 нояб., 1999. — С. 100–101.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М., ГИТТЛ, 1955, —560 с.
4. Меньшиков Ю. Л. Выбор оптимальной математической модели в задачах распознавания воздействий. // Сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения в физике.— Днепропетровск, Днепропетр. ун-т, 1991. — С. 25–33.
5. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1936. — 304 с.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. //М.: Наука, 1979. —288 с.
7. Ясько Н. Н. Численное решение нелинейной задачи о движении плоского крылового профиля под свободной поверхностью идеальной несжимаемой жидкости. // Изв. Академии наук. Механика жидкости и газа. М.: 1995, № 4. — С. 100–107.
8. Lonyangapuo J. K., Elliot L., Ingham D. B., Wen X Identification of the Shape of the Bottom Surface from a Given Free Surface Profile. // Boundary Element Research in Europe, Computational Mechanics Publications, 1998, — P. 81–90.
9. Lonyangapuo J. K., Elliot L., Ingham D. B., Wen X. Retrieval of the Shape of the Bottom Surface of a Channel when the Free Surface Profile is Given. // Engineering Analysis with Boundary Elements, 1999, — Vol. 23, Iss. 5–6, — P. 457–470.
10. Menshikov Yu. L. Inverse Problem for Stream Liquid with Free Surface. // Proc. of GAMM 2001, April 2–7, 2001, Zurich, Switzerland, 2001. —p.136.

Надійшла до редакції 15.04.2010