ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2010. Вип. 2. С. 124–136

УДК 517.9

СКАЛЯРИЗАЦІЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКУ НА МЕРЕЖІ

Т. А. Божанова

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ 49050. E-mail: tamara-bozhanova@ukr.net

Розглядається задача векторної оптимізації для транспортного потоку на мережі, де факторами керування виступають елементи матриці розподілу руху, які регулюють такий потік у вузлах мережі. Розглянуто випадок, коли цільове відображення діє в лебегів простір і є напівнеперервним зверху на області визначення. Встановлено існування ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації транспортного потоку на мережі, для знаходження яких використано процедуру скаляризації, що грунтується на побудові відповідних згорток.

Ключові слова. Гідродинамічна модель, транспортний потік на мережі, векторна оптимізація на мережі.

1. Вступ

На сьогоднішній день, у зв'язку зі значним збільшенням кількості транспортних засобів, проблема керування транспортними потоками, особливо на мережах зі складною конфігурацією, стає все більш актуальною. Існує досить обширна література, присвячена різним аспектам моделювання таких процесів (див [5, 6, 7, 9, 11, 14]), знаходженню необхідних умов оптимальності та методів побудови оптимальних законів регулювання транспортних потоків зі скалярними показниками вартості (див. [4, 10, 12]).

Основним об'єктом дослідження в даній роботі виступає гідродинамічна модель транспортного потоку на мережі, яка зумовлює розгляд нелінійної задачі Коші для рівняння у частинних похідних першого порядку. При цьому вважається, що мережа складається зі скінченної сукупності доріг та вузлів (точок сполучення). У припущенні, що такий потік є керованим процесом, ставиться задача його оптимізації у векторній формі, де параметрами керування виступають елементи матриці розподілу руху, які регулюють транспортний потік у вузлах мережі.

Будемо вважати, що якість керування транспортним потоком на мережі визначається нескалярним відображенням, що діє в нормований простір $L^2(\Omega)$, упорядкований за конусом Λ додатних елементів. За цих припущень доведено, що поставлена задача векторної оптимізації транспортних потоків на мережі допускає існування так званих ефективних розв'язків (див. [3]). Оскільки загальновідомим методом побудови розв'язків задач векторної оптимізації є залучення процедури їх скаляризації, то метою цієї роботи є аналіз такого підходу на прикладі найпростішої схеми скаляризації, яка грунтується на ідеї побудови відповідних згорток.

2. Основні поняття та позначення

У цьому параграфі наведемо короткий опис макроскопічної моделі для транспортного потоку на мережі (для більш детального ознайомлення див. [1, 3, 5, 11]) та нагадаємо деякі відомі факти, що стосуються векторнозначних відображень та частково впорядкованих нормованих просторів.

2.1. Макроскопічна модель транспортного потоку на мережі

Нехай $\Omega = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$ — мережа доріг, де $\mathcal{I}$ — скінченна сукупність ребер, що відповідають дорогам мережі та є відрізками $I_i = [a_i, b_i] \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, \mathbb{N}$, $\mathcal{J}$ — сукупність вершин, які відповідають вузлам даної мережі. На кожній окремо взятій дорозі рух транспортних засобів підкоряється так званому гідродинамічному закону збереження, який виражений нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних першого порядку :

$$\partial_t \rho_i(t,\ x) + \partial_x f_i(\rho_i(t, x)) = 0,\ \ \forall\ x \in (a_i,\ b_i),\ \forall\ t \in (0, T], \tag{2.1}$$

$$\rho_i(0,\ x) = \bar{\rho}_i(x), \quad \forall\ x \in [a_i,\ b_i], \tag{2.2}$$

де $\rho_i = \rho_i(t, x) \in [0, \rho_{max,i}],\ (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ — щільність машин на дорозі I_i, $\rho_{max,i}$ — максимально можлива щільність на дорозі I_i, яка відповідає появі затору на даній ділянці мережі;$f_i(\rho) = \rho_i \upsilon_i(\rho)$ — транспортний потік (кількість машин, що проїжджають за одиницю часу); $\upsilon_i(\rho)$ — швидкість транспортного потоку на дорозі I_i. При цьому $\upsilon_i(\rho)$ — неперервно диференційована, спадна функція свого аргументу ρ. Для функцій потоку f_i повинні виконуватися такі умови:

$$\begin{cases} f_i \text{ неперервно диференційовані на } \ [0,\ \rho_{max,\,i}], \\ f_i(0) = f_i(\rho_{max,\,i}) = 0, \\ f_i \text{ — строго угнуті функції}, \\ \exists\ \sigma \in (0, \rho_{max,i}) : f_i'(\sigma_i) = 0 \text{ та } (\rho - \sigma_i) f_i'(\rho) < 0,\ \forall\ \rho \neq \sigma_i. \end{cases} \tag{2.3}$$

Головною особливістю нелінійної системи (2.1)-(2.2) є той факт, що класичний розв'язок задачі Коші може не існувати для деякого $t > 0$, навіть якщо початкові умови є досить гладкими (див. [1, 9]). До того ж, для повноти моделі необхідно визначити потік через кожний вузол $J \in \mathcal{J}$ мережі. При цьому умова Rankine–Hugoniot у вузлах мережі (кількість вхідного транспорту дорівнює кількості вихідного) не є достатньою для знаходження єдиного розв'язку вихідної задачі. Проте, ввівши до розгляду у кожному вузлі мережі так званий розв'язник Рімана, який, у свою чергу, зумовлює введення матриці розподілу руху (див. [7, 8]),

$$A(J) = [\alpha_{ji}(J)],\ \ j \in \{n+1, \dots, n+m\},\ \ i \in \{1, \dots, n\}, \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \alpha_{ji}(J) \neq \alpha_{ji'}(J), \ \ \forall\ i \neq i',\ 0 < \alpha_{ji}(J) < 1, \\ \sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \alpha_{ji}(J) = 1 \text{ для кожного } i \in \{1, \dots, n\}\,, \end{cases} \tag{2.5}$$

та ентропійну умову Кружкова на мережі (див. [13]), можна гарантувати існування та єдинність слабкого розв'язку задачі Коші в класі функцій з обмеженою повною варіацією, де під розв'язком цієї задачі будемо розуміти таке:

Означення 1. Нехай J — вузол з n вхідними дорогами $I_1, \dots, I_n$ з кінцем b_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) у вузлі та m вихідними дорогами $I_{n+1}, \dots, I_{n+m}$ з кінцем a_i ($i \in \{n+1, \dots, n+m\}$). Нехай задано функції $\bar{\rho}_i \in L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Будемо казати, що сукупність функцій

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) : \prod_{i=1}^{N} ([0,\, T] \times I_i) \to R^N,$$

де

$$\rho_i \in C([0,T];\, L^1_{loc}(I_i)), \ \ i \in \{1, \dots, N\}\,,$$

є допустимим розв'язком задачі (2.1)-(2.5), якщо:

(а): $\rho_i : [0,\, T] \times I_i \to R$ є слабким ентропійним розв'язком задачі (2.1) на I_i, тобто

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \varphi + f_i(\rho_i) \partial_x \varphi) dx dt = 0, \tag{2.6}$$

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} \left(|\rho_i - k| \partial_t \tilde{\varphi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k)) \partial_x \tilde{\varphi} \right) dx dt \geq 0 \tag{2.7}$$

для довільної гладкої функції $\varphi : [0,T] \times I_i \to R$ з компактним носієм на множині $(0,T) \times (a_i,\, b_i)$ для $k \in R$ та для довільної гладкої додатної функції $\tilde{\varphi} : [0,T] \times I_i \to R$ з компактним носієм на $(0,T) \times (a_i,\, b_i)$, при цьому для $i \in \{1, \dots, n\}$ та $j \in \{n+1, \dots, n+m\}$ виконуються такі умови:

$$\varphi_i(\cdot,\, b_i) = \varphi_j(\cdot,\, a_j), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial\, x}(\cdot,\, b_i) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial\, x}(\cdot,\, a_j);$$

(б): $\rho_i(0,\, \cdot) = \bar{\rho}_i$ на I_i для $\forall\ i \in \{1, \dots, N\}$;

(в): $f_j(\rho_j(\cdot,\, a_j+)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} f_i(\rho_i(\cdot,\, b_i-))$ для $\forall\ j = n+1, \dots, n+m$;

(г): $L(J, A, \rho) := \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i-))$ досягає максимального значення на парі $(A,\, \rho)$ при обмеженнях (а)–(в), де $A(J) \in R^{n \times m}$ — матриця розподілу руху у вузлі.

Однак розглянута задача Коші (2.1)–(2.2) не є коректною за Адамаром, що означає відсутність неперервної залежності її розв'язків від початкових умов [9]. Тому як фактори керування, які впливають на поведінку таких задач, потрібно вибирати не початкові умови (з якими немає неперервної залежності), а елементи матриці розподілу транспортного потоку A у вузлах мережі.

2.2. Деякі положення про частково впорядкований простір $L^2(\Omega)$

Нехай Ω — мережа. Пов'яжемо з цією множиною дійсний простір $L^2(\Omega)$. Надалі, приймаючи позначення $y \in L^2(\Omega)$, вважаємо, що $y = (y_1, \dots, y_N)$ та $y_k \in L^2(I_k)$ для $k = 1, \dots, N$. Нагадаємо, що $L^2(\Omega)$, як топологічний простір, наділений слабкою топологією. Для підмножини $S \subset L^2(\Omega)$ позначимо через $\mathrm{int}_\omega S$ та $\mathrm{cl}_\omega S$ відповідно її внутрішність та замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$. Також припустимо, що $L^2(\Omega)$ є частково впорядкованим за конусом додатних елементів Λ, який визначається таким чином:

$$\Lambda = \left\{ f \in L^2(\Omega); \;\; f(x) \geq 0 \quad \text{майже скрізь на } \; \Omega \right\}. \tag{2.8}$$

Тоді для елементів $y, z \in L^2(\Omega)$ будемо записувати $y \leq_\Lambda z$ усякий раз, коли $z \in y + \Lambda$, і $y <_\Lambda z$, якщо $z - y \in \Lambda \setminus \{0\}$. Будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ є незростаючою та використовувати позначення $y_k \downarrow$ усякий раз, коли для всіх $k \in N$ маємо: $y_{k+1} \leq_\Lambda y_k$. Також будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ є обмеженою знизу, якщо існує елемент $y^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $y^* \leq_\Lambda y_k$ для $\forall\ k \in N$.

Для того, щоб означити "оптимальні"елементи для підмножини S частково упорядкованого простору $L^2(\Omega)$, скористаємося таким поняттям:

Означення 2. [12] Елемент $y^* \in S \subset L^2(\Omega)$ будемо називати максимальним елементом множини S, якщо не існує $y \in S$ такого, що $y \geq_\Lambda y^*,\ y \neq y^*$, тобто

$$S \cup (y^* + \Lambda) = y^*.$$

Позначимо через $Max_\Lambda(S)$ сукупність усіх максимальних елементів множини S. Введемо два додаткові елементи $-\infty_\Lambda$ і $+\infty_\Lambda$ у $L^2(\Omega)$. Припустимо, що ці елементи задовольняють такі умови:

$$1)\ -\infty_\Lambda \leq y \leq\ +\infty_\Lambda,\ \forall\ y \in L^2(\Omega); \quad 2)\ +\infty_\Lambda + (-\infty_\Lambda) = 0.$$

Позначимо через Y^* частково розширений простір Банаха: $Y^* = L^2(\Omega) \cup \{-\infty_\Lambda\}$, припускаючи, що

$$\| -\infty_\Lambda \|_{L^2(\Omega)} = +\infty \;\text{ і }\; y + \lambda(-\infty_\Lambda) = -\infty,\ \forall\ y \in L^2(\Omega),\ \forall\ \lambda \in R_+.$$

Означення 3. Будемо казати, що множина E є ефективним супремумом множини $S \subset L^2(\Omega)$ відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ за конусом Λ (або скорочено (Λ, ω)-супремумом), якщо E є сукупністю усіх максимальних елементів множини $cl_\omega S$ у випадку, коли ця множина непуста, і E дорівнює $+\infty_\Lambda$ інакше.

Надалі, $(\Lambda,\ \omega)$-супремум для множини E будемо позначати як $Sup^{\,\Lambda,\,\omega} S$. Таким чином, з огляду на попереднє означення, маємо:

$$Sup^{\,\Lambda,\,\omega} S := \begin{cases} Max_\Lambda(cl_\omega S), & Max_\Lambda(cl_\omega S) \neq \emptyset, \\ +\infty_\Lambda, & Max_\Lambda(cl_\omega S) = \emptyset. \end{cases}$$

Нехай X_∂ непуста підмножина банахового простору X та $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ — деяке відображення. Зауважимо, що відображення $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ можна пов'язати з його розширенням $\hat{I} : X \to Y^*$ на весь простір X, де

$$\hat{I} = \begin{cases} I(x), & x \in X_\partial \\ -\infty_\Lambda, & x \notin X_\partial. \end{cases} \tag{2.9}$$

Будемо казати, що відображення $I : X_\partial \to Y^*$ є обмеженим зверху, якщо існує елемент $z \in L^2(\Omega)$ такий, що $z \geq_\Lambda I(x)$ для всіх $x \in X_\partial$.

Означення 4. Підмножину $A \in L^2(\Omega)$ будемо називати ефективним супремумом відображення

$$I : X_\partial \to L^2(\Omega)$$

відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ і позначати $Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial}\, I(x)$, якщо A є (Λ,ω)-супремумом образу $I(X_\partial)$ із X_∂ на $L^2(\Omega)$, тобто,

$$Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial}\, I(x) = Sup^{\Lambda,\,\omega}\left\{I(x) :\ \forall\, x \in X_\partial\right\}.$$

Зауваження 1. Тепер зрозуміло, що якщо $a \in Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial}\, I(x)$, то

$$cl_\omega \left\{I(x) : \forall\, x \in X_\partial\right\} \cap (a + \Lambda) = \{a\}$$

за умови, що $Max_\Lambda[cl_\omega \left\{I(x) : \forall\, x \in X_\partial\right\}]$.

Нехай $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ послідовність у просторі $L^2(\Omega)$. Позначимо через $L^\omega\left\{y_k\right\}$ множину всіх її точок згущення відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$, тобто $y \in L^\omega\left\{y_k\right\}$, якщо існує підпослідовність $\{y_{k_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{y_k\}_{k=1}^\infty$ така, що $y_{k_i} \rightharpoonup y$ у $L^2(\Omega)$ при $i \to \infty$. Якщо ця множина не обмежена зверху, тобто $Sup^{\,\Lambda,\,\omega} L^\omega\left\{y_k\right\} = +\infty_\Lambda$, то припускаємо, що $\{+\infty_\Lambda\} \in L^\omega\left\{y_k\right\}$. Зафіксуємо елемент $x_0 \in X_\partial$. Тоді для довільного відображення $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ введемо до розгляду наступні множини:

$$L^{\sigma\times\omega}\left(I, x_0\right) := \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^\infty \in M_\sigma(x_0)} L^\omega\left\{\hat{I}(x_k)\right\}, \tag{2.10}$$

$$L^{\sigma\times\omega}_{max}\left(I, x_0\right) := L^{\sigma\times\omega}\left(I, x_0\right) \cap Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x), \tag{2.11}$$

де $M_\sigma(x_0)$ — це множина всіх послідовностей $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ таких, що $x_k \to x_0$ відносно σ-топології простору X.

Означення 5. Будемо казати, шо підмножина $A \subset L^2(\Omega) \cup \{\pm\infty_\Lambda\}$ є Λ- нижньою секвенціальною границею відображення $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ у точці $x_0 \in X_\partial$ відносно топології добутку $\sigma \times \omega$ простору $X \times L^2(\Omega)$ і використовувати позначення $A = \limsup^{\Lambda,\,\omega}_{x \xrightarrow{\sigma} x_0} I(x)$, якщо

$$\limsup^{\Lambda,\,\omega}_{x \xrightarrow{\sigma} x_0} I(x) := \begin{cases} L^{\sigma\times\omega}_{max}\left(I,\ x_0\right), & L^{\sigma\times\omega}_{max}\left(I, x_0\right) \neq \emptyset, \\ Sup^{\,\Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0), & L^{\sigma\times\omega}_{max}\left(I, x_0\right) = \emptyset. \end{cases} \tag{2.12}$$

Зауваження 2. У скалярному випадку $(I : X_\partial \to R)$ множини

$$Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x) \text{ та } Sup^{\ \Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0)$$

містять тільки один елемент. Тому, якщо $L^{\sigma\times\omega}_{max}(I, x_0) \neq \emptyset$, то маємо:

$$L^{\sigma\times\omega}_{\max}(I, x_0) = L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) \cap \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x) = \\ = Sup^{\ \Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) \cap Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x) = Sup^{\ \Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0).$$

Отже, в цьому випадку (2.12) дає класичне означення нижньої границі.

3. Постановка задачі векторної оптимізації для транспортного потоку на мережі

Оскільки транспортний потік на мережі надає можливість залучення факторів керування, котрі впливають на щільність транспортних потоків, надалі транспортний потік будемо трактувати як об'єкт керування. У цьому випадку необхідно формалізувати фізичні та математичні значення факторів керування та пов'язати з ними відповідний стан такого об'єкта керування.

Для простоти обмежимось випадком мережі $\Omega = (\mathcal{I},\, \mathcal{J})$, котра включає вузли $J \in \mathcal{J}$ лише двох видів: $J \in J^{1,\,2}$ та $J \in J^{2,\,1}$. Перший вид вузла $(J \in J^{1,\,2})$ має одну вхідну дорогу m з кінцем b_m у вузлі та дві вихідні дороги $r,\ s$ з кінцями $a_r,\ a_s$ у вузлі, відповідно. Згідно з підходом Coclite, Garavello& Piccoli [7, 9], у такому вузлі матриця розподілу потоку набуває вигляду $A(J) = [\alpha_m,\, 1-\alpha_m]^t$, де $0 \le \alpha_m \le 1$. Отже, у такому вузлі дійсний параметр $\alpha_m \in (0,\, 1)$ можна взяти за фактор керування.

Другий вид вузлів $(J \in J^{2,\,1})$ складається з двох вхідних доріг p та q з кінцями b_p і b_q у вузлі та однієї вихідної дороги r з кінцем a_r у вузлі. Для вузлів такого виду існує правило (див. [3]), яке описує у процентному співвідношенні кількість машин, що проїжджають із окремої вхідної дороги через ці вузли мережі. Більше того, це правило виконується для кожного вузла $J \in J^{2,\,1}$, і тому в таких вузлах транспортний потік уже не є керованим.

Припустимо, що мережа $\Omega = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$ має строго N доріг і $\mathcal{J} = J^{1,\,2} \cup J^{2,\,1}$, де множина $J^{1,\,2}$ містить K вузлів першого виду, а множина $J^{2,\,1}$ — M вузлів другого виду. Таким чином, маємо мережу з K параметрами керування $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ та M заданими параметрами $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{\mathcal{M}})$, $0 < \zeta_l < 1$ $l \in \{1, \ldots, \mathcal{M}\}$. При цьому на кожній дорозі $I_i = [a_i,\, b_i] \in \mathcal{I}$ швидкість $\upsilon = \upsilon(\rho)$ задовольняє такі вимоги:

$$\upsilon(\rho) \text{— неперервно-спадна фукнція на відрізку } [0, \max_{1\le i\le N} \rho_{max,i}] \tag{3.1}$$

$$0 \le \upsilon(\rho_i) \le \upsilon_{i,max}, \ \ \forall\ i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{3.2}$$

де $\upsilon_{i,max} \in L^2(I_i)$ $(1 \le i \le N)$ відомі функції.

Уведемо до розгляду такі позначення:

1. $\mathcal{A} = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K) |\, \beta \le \alpha_i \le 1-\beta,\ i = 1, \ldots, K\} \subset R^K$ — множина параметрів керування, де $\beta \in (0,\, 1/2)$ досить мале додатне число;

2. $X = R^K \times C(0,\, T;\, L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$ — простір допустимих пар $(\alpha,\, \rho)$;

3. $P : R^K \times C(0,\, T;\, L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)) \to L^2(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ — цільове відображення;

4. $\Lambda = \left\{ g \in L^2(\Omega) : g(x) \geq 0 \text{ майже скрізь на } \Omega \right\}$ — упорядкований конус додатних елементів у просторі $L^2(\Omega)$.

Відомо (див. [3]), що для $\forall\, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \in \mathcal{A}$ задача

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \varphi + f_i(\rho_i) \partial_x \varphi) dxdt = 0,\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty((0,T) \times (a_i,\, b_i)),\ \forall\, I_i \in \mathcal{I}, \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (|\rho_i - k| \partial_t \tilde{\varphi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k)) \partial_x \tilde{\varphi})\, dxdt \geq 0, \\ \forall\, d \in R,\ \forall\, \tilde{\varphi} \in C_0^\infty((0,T) \times (a_i,\, b_i)),\ \tilde{\varphi} \geq 0,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, N\}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\rho_i(0, \cdot) = \bar{\rho}_i \text{ на } I_i \text{ для } \forall\, i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} f_r(\rho_r(\cdot,\, a_r^+)) = \alpha_k f_m(\rho_m(\cdot,\, b_m^-)) \text{ та } f_s(\rho_s(\cdot,\, a_s^+)) = (1 - \alpha_k) f_m(\rho_m(\cdot,\, b_m^-)), \\ \text{для } \forall\, J_k \in J^{1,\,2} \text{ з однією вхідною дорогою } m \text{ з кінцем } b_m \text{ у вузлі } J_k \\ \text{та вихідними дорогами } r,\ s \text{ з кінцями } a_r,\ a_s \text{ у } J_k,\ \forall\, k \in \{1, \ldots, K\}, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} f_r(\rho_r(\cdot,\, a_r^+)) = \zeta_l f_p(\rho_p(\cdot,\, b_p^-)) + (1 - \zeta_l) f_q(\rho_q(\cdot,\, b_q^-)) \\ \text{для } \forall\, J_l \in J^{2,\,1} \text{ з двома вхідними дорогами } p,\ q \text{ з кінцями } b_p,\ b_q\ J_l \\ \text{та однією вихідною дорогою } r \text{ з кінцем } a_r \text{ у } J_l,\ \forall\, l \in \{1, \ldots, M\}, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} L(J,\, \alpha,\, \rho) := \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot,\, b_i^+)) \text{ досягає максимального значення при} \\ \text{обмеженнях (3.3)–(3.7) } \forall\, J \in \mathcal{J}, \text{ де } n = 1, \text{ якщо } J \in J^{1,\,2}, \\ \text{і } n = 2, \text{ якщо } J \in J^{2,\,1} \end{cases} \tag{3.8}$$

має єдиний розв'язок

$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N) : \prod_{i=1}^N ([0,\, T] \times I_i) \to R^N \text{ у просторі } C(0,T;\, L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$$

такий, що

$$Tot.\ V_{I_i}(\rho_i(t,\, \cdot)) \leq Tot.\ V_{I_i}(\bar{\rho}_i), \quad i \in \{1, \ldots, N\},$$

де $\bar{\rho} = \{\bar{\rho}_i \in L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)\}_{i=1}^N$ — початковий розподіл щільності потоку машин.

Пов'яжемо з задачею (3.3)-(3.8) наступну задачу векторної оптимізації:

$$\text{реалізувати } Sup^{\Lambda,\,\omega} \{P(\alpha,\, \rho)\} \tag{3.9}$$

для всіх $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \in R^K$ та $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N) \in C(0,T;\, L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$ за умов (3.3)-(3.8) та (3.1)-(3.2).

Означення 6. Будемо казати, що задача (3.9) є регулярною, якщо для заданої сукупності функцій потоку $f = (f_1, \ldots, f_N)$ з властивостями (2.3) існує пара

$$(\alpha,\, \rho) \in \mathcal{A} \times C(0,T;\, L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)),$$

де $\rho = \rho(\alpha)$ — це відповідний розв'язок задачі (3.3)–(3.8) такий, що ρ задовольняє умови (3.1)–(3.2), і $P(\alpha,\, \rho) >_\Lambda z$ для деякого елемента $z \in L^2(\Omega)$. У цьому випадку пару $(\alpha,\, \rho)$ будемо називати допустимою.

Позначимо через Ξ множину всіх допустимих пар задачі (3.3)–(3.9). Очевидно, що $\Xi \subset \mathcal{A} \times C(0,T;\, L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$. Надалі будемо пов'язувати цю задачу з четвіркою $< \Xi,\, P,\, \Lambda,\, \omega >$, де ω є слабкою топологією простору керувань $L^2(\Omega)$.

Означення 7. Допустиму пару $(\alpha^{eff},\, \rho^{eff}) \in \Xi$ будемо називати $(\Lambda,\, \omega)$-ефективним розв'язком задачі (3.1)-(3.9), якщо пара $(\alpha^{eff},\, \rho^{eff})$ реалізує $(\Lambda,\, \omega)$-супремум відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$, тобто

$$P(\alpha^{eff},\, \rho^{eff}) \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha,\, \rho) = \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}\left\{P(\alpha,\, \rho)\ :\ \forall\,(\alpha,\, \rho) \in \Xi\right\}.$$

Позначимо через $\mathrm{Eff}_\omega(\Xi; P; \Lambda)$ множину всіх (Λ, ω)-ефективних розв'язків векторно-оптимізаційної задачі (3.1)–(3.9), тобто

$$\mathrm{Eff}_\omega(\Xi;\, P;\, \Lambda) = \left\{(\alpha^{eff},\, \rho^{eff}) \in \Xi\ :\ P(\alpha^{eff},\, \rho^{eff}) \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi}\, P(\alpha,\, \rho)\right\}.$$

Тепер дамо наступний результат стосовно топологічних властивостей множини допустимих пар Ξ задачі (3.9). Нехай τ-топологія на

$$Y = R^K \times L^2(0,T;\, BV(\Omega)),$$

яка задана як добуток поточкової збіжності в R^K та слабкої топології в просторі $L^2(0,T;BV(\Omega))$. Тоді має місце теорема, доведення якої можна знайти у праці [2].

Теорема 1. *Нехай* $\left\{(\alpha^k,\, \rho^k) \in \Xi\right\}_{k=1}^\infty$ *довільна послідовність допустимих пар у задачі (3.3)-(3.8). Тоді знайдеться пара* $(\alpha^*,\, \rho^*) \in Y$ *і підпослідовність даної послідовності (для якої збережемо попередні позначення) такі, що*

$$(\alpha^*,\, \rho^*) \in \Xi,\ \ (\alpha^k,\, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (\alpha^*,\, \rho^*),$$

тобто множина Ξ *є секвенційно компактною відносно* τ*-збіжності.*

Наслідок 1. *Якщо* $\alpha \in \mathcal{A}$*, то відображення* $\alpha \mapsto \rho(\alpha)$ *є неперервним у топології поточкової збіжності в* R^K *та слабкої топології в* $L^2(0,T;\, BV(\Omega))$.

Нехай $\hat{P} : [R^K \times C(0,T;\, BV(\Omega))] \to Y^*$ — деяке розширення відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ на весь простір $R^K \times L^2(0,T;\, BV(\Omega))$. Тут через Y^* позначено частково розширений простір Банаха $L^2(\Omega) \cup \{-\infty_\Lambda\}$.

Означення 8. Будемо казати, що відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ є $(\Lambda,\, \tau\times\omega)$-напівнеперервним зверху ($(\Lambda,\, \tau\times\omega)$-нн. зв.) у точці $(\alpha^0,\, \rho^0) \in \Xi$, якщо

$$P(\alpha^0,\, \rho^0) \in \limsup^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\,\rho^0)}\, \hat{P}(\alpha,\, \rho)$$

Відображення P є $(\Lambda,\, \tau\times\omega)$-нн. зв. на множині Ξ, якщо P є $(\Lambda,\, \tau\times\omega)$-нн. зв. на кожній парі з Ξ.

Той факт, що множина Ξ допустимих пар задачі (3.9) є секвенційно компактною в заданій топології τ, дає нам підстави гарантувати розв'язність широкого класу оптимізаційних задач для транспортних потоків на мережах. Отже, має місце наступна теорема, яка торкається існування ефективних розв'язків векторно-оптимізаційної задачі (3.9), доведення якої можна знайти в [3].

Теорема 2. *Припустимо, що векторно-оптимізаційна задача (3.9) є регулярною. Нехай задано $(\Lambda,\, \tau\times\omega)$-нн. зв. відображення $P:\Xi\to L^2(\Omega)$. Тоді задача векторної оптимізації (3.9) має непусту підмножину $(\Lambda,\, \omega)$-ефективних розв'язків.*

4. Скаляризація задачі векторної оптимізації

Оскільки загальновідомим методом побудови розв'язків задач векторної оптимізації є залучення процедури їх скаляризації, розглянемо такий підхід на прикладі найпростішої схеми скаляризації, яка грунтується на ідеї побудови відповідних згорток. Наведемо деякі опорні означення та теореми.

Означення 9. Будемо казати, що $\lambda\in L^2(\Omega)$ є квазі-внутрішньою точкою конуса додатних елементів Λ, якщо $\lambda(x)\geq 0$ майже скрізь на Ω та для всіх $b\in\Lambda\setminus\{0\}$
$$\int_\Omega b(x)\lambda(x)dx\ >0.$$

Позначимо через $\Lambda^\sharp$ множину всіх квазі-внутрішніх точок конуса Λ. Очевидно, що
$$\Lambda^\sharp=\left\{\lambda\in L^2(\Omega):\lambda(x)>0 \text{ майже скрізь на } \Omega\right\}.$$

Пов'яжемо із задачею векторної оптимізації (3.9) наступну скалярну задачу мінімізації:

$$\begin{cases} P_\lambda(\alpha,\rho)=\displaystyle\int_\Omega P(\alpha,\rho)\lambda(x)dx\ \to sup, \\ \text{за умови, що } (\alpha,\rho)\in\Xi\subset R^K\times C(0,T;BV(\Omega)), \end{cases} \tag{4.1}$$

де λ — це елемент конуса (2.8). Надалі функціонал P_λ називатимемо λ-згорткою відображення P.

Основну властивість даної скалярної задачі можна означити таким чином:

Теорема 3. *Нехай $P:\Xi\to L^2(\Omega)$ — заданий оператор керування. Припустимо, що існує пара $(\alpha^0,\rho^0)\in\Xi$ та елемент $\lambda\in\Lambda^\sharp$ такі, що*
$$(\alpha^0,\rho^0)\in \underset{(\alpha,\rho)\in\Xi}{Arg\max}\int_\Omega P(\alpha,\rho)\lambda(x)dx.$$

Тоді (α^0,ρ^0) є (Λ,ω)-ефективним розв'язком задачі оптимізації (3.9).

Доведення. За початковими припущеннями для $\forall(\alpha,\rho)\in\Xi$ маємо:

$$P_\lambda(\alpha^0,\rho^0)-P_\lambda(\alpha,\rho)=\int_\Omega(P_\lambda(\alpha^0,\rho^0)-P_\lambda(\alpha,\rho))\lambda(x)dx\ \geq 0. \tag{4.2}$$

Нехай z — довільний елемент множини образів $cl_\omega P(\Xi)$. Тоді існує послідовність $\left\{(\alpha^k,\rho^k)\right\}_{k=1}^\infty\subset\Xi$ така, що $P(\alpha^k,\rho^k)\rightharpoonup z$ в $L^2(\Omega)$ при $k\to\infty$. Отже, беручи до уваги (4.2), отримаємо:

$$\int_\Omega(P_\lambda(\alpha^0,\rho^0)-P_\lambda(\alpha^k,\rho^k))\lambda(x)dx\geq 0 \text{ для } \ \forall k\in N. \tag{4.3}$$

Тоді, переходячи до границі в інтегральній нерівності (4.3) при $k\to\infty$, отримаємо:

$$\int_\Omega(P_\lambda(\alpha^0,\rho^0)-z)\lambda(x)dx\geq 0 \text{ для } \ \forall z\in cl_\omega P(\Xi). \tag{4.4}$$

Припустимо, що $(\alpha^0,\rho^0)\notin Eff_\omega(\Xi;P;\Lambda)$. Тоді існує елемент $h\in cl_\omega P(\Xi)$ такий, що $h>_\Lambda P(\alpha^0,\rho^0)$. Тому $h-P(\alpha^0,\rho^0)\in\Lambda\backslash\{0\}$. Отже, згідно з означенням (9), маємо:

$$\int_\Omega(h-P(\alpha^0,\rho^0))\lambda(x)dx>0,$$

що суперечить умові (4.4). Таким чином, $(\alpha^0,\rho^0)\in Eff_\omega(\Xi;P;\Lambda)$. Теорема доведена. □

Наслідок 2. *За умови виконання припущень теореми 3, маємо:*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda^\sharp} Arg\max_{(\alpha,\rho)\in\Xi}\int_\Omega P(\alpha,\rho)\lambda(x)dx\subseteq Eff_\omega(\Xi;P;\Lambda). \tag{4.5}$$

Зауважимо, що цільовий оператор у теоремі 3 у загальному випадку не є $(\Lambda,\tau\times\omega)$-напівнеперервним зверху. Таким чином, постає питання про розв'язність відповідної скалярної задачі мінімізації (4.1) з $\lambda\in\Lambda^\sharp$. Згідно з прямим методом варіаційного числення, задача умовної мінімізації (4.1) має непусту множину розв'язків за умови, що Ξ є τ-компактною підмножиною і

$$P_\lambda(\cdot,\cdot)=\int_\Omega P(\cdot,\cdot)dx:\Xi\to\bar{R}$$

є власною τ–нн.зв. функцією. Однак відмінною особливістю задачі векторної оптимізації (3.9) є той факт, що з будь-яким $(\Lambda,\tau\times\omega)$-напівнеперервним зверху оператором $P:\Xi\to L^2(\Omega)$, який не є ні нн. зв., ні квазі-нн. зв., можна завжди пов'язати скалярну задачу мінімізації (4.1), для якої відповідний функціонал вартості $P_\lambda:\Xi\to R$ не є τ–нн. зв. на Ξ. Справді, нехай (α^0,ρ^0) — пара з множини Ξ, на якій оператор P не є квазі-нн.зв. Тоді існує щонайменше один елемент $a^*\in cl_\omega(P(\Xi))$ такий, що

$$a^*\in\limsup{}^{\Lambda,\omega}_{(\alpha,\rho)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\rho^0)}P(\alpha,\rho),\ P(\alpha^0,\rho^0)\in\limsup{}^{\Lambda,\omega}_{(\alpha,\rho)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\rho^0)}P(\alpha,\rho) \tag{4.6}$$

$$\text{та } a^*\neq P(\alpha^0,\rho^0).$$

Нехай послідовність $(\alpha^k,\rho^k)_{k=1}^{\infty}\subset\Xi$ така, що $(\alpha^k,\rho^k)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\rho^0)$ у просторі Y та $P(\alpha^k,\rho^k)\rightharpoonup a^*$ в $L^2(\Omega)$. Оскільки $a^*\not\leq_\Lambda P(\alpha^0,\rho^0)$, то звідси випливає, що $P(\alpha^0,\rho^0)-a^*\notin\Lambda$, і тому існує вектор $\lambda\in\Lambda$ такий, що

$$\int_\Omega (P(\alpha^0,\rho^0)-a^*)\lambda^*(x)dx<0.$$

Як результат, маємо:

$$\liminf_{k\to\infty} P_{\lambda^*}(\alpha^k,\rho^k)=\lim_{k\to\infty}\int_\Omega P(\alpha^k,\rho^k)\lambda^*(x)dx=$$

$$=\int_\Omega a^*(x)\lambda^*(x)dx\ >\ \int_\Omega P(\alpha^0,\rho^0)\lambda^*(x)dx=P_{\lambda^*}(\alpha^0,\rho^0).$$

Таким чином, P_{λ^*} не є τ–нн. зв. на парі $\alpha^0,\rho^0)$. Цей факт приводить до наступного поняття.

Означення 10. Нехай задано відображення $P:\Xi\to L^2(\Omega)$. Конус виду

$$\Lambda_P^\tau:=\{\lambda\in\Lambda:\ P_\lambda \text{ є } \tau\text{-нн.зв. на } \Xi\}$$

будемо називати конусом τ-напівнеперервності для відображення P.

Тому теорему 3 можна посилити таким чином.

Теорема 4. *Нехай $P:\Xi\to L^2(\Omega)$ є $\Lambda,\tau\times\omega$-напівнеперервним зверху відображенням. Припустимо, що векторно-оптимізаційна задача (3.9) є регулярною та $\Lambda_P^\tau\setminus\{0\}\neq\emptyset$. Тоді*

$$Arg\max_{(\alpha,\rho)\in\Xi}\int_\Omega P(\alpha,\rho)\lambda(x)dx\cap Eff_\omega(\Xi;P;\Lambda)\neq\emptyset \tag{4.7}$$

Доведення. З теореми 2 та з означених вище припущень випливає, що

$$Eff_\omega(\Xi;P;\Lambda)\neq\emptyset.$$

Нехай λ елемент з множини $\Lambda_P^\tau\setminus\{0\}$. Тоді, залучаючи прямий метод варіаційного числення, отримаємо:

$$Arg\max_{(\alpha,\rho)\in\Xi}\int_\Omega P(\alpha,\rho)\lambda(x)dx\neq\emptyset.$$

Якщо $\lambda\in\Lambda^\sharp$, тоді співвідношення (4.7) стає очевидним за теоремою 3. Тому припустимо, що $\lambda\in\Lambda_P^\tau\setminus\left\{\Lambda^\sharp\cup 0\right\}$. Припустимо, що

$$Arg\max_{(\alpha,\rho)\in\Xi}\int_\Omega P(\alpha,\rho)\lambda(x)dx\not\subseteq Eff_\omega(\Xi;P;\Lambda).$$

Тоді існує пара $(\alpha^*,\rho^*)\in\Xi$ така, що

$$(\alpha^*,\rho^*)\in Arg\max_{(\alpha,\rho)\in\Xi}\int_\Omega P(\alpha,\rho)\lambda(x)dx, \tag{4.8}$$

$$(\alpha^*, \rho^*) \notin Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda). \tag{4.9}$$

Отже, згідно з умовою (4.9), існує елемент $y^* \in Max_\Lambda(cl_\omega P(\Xi)) \subseteq cl_\omega P(\Xi)$ такий, що $y^* >_\Lambda P(\alpha^*, \rho^*)$. Однак, з огляду на (4.8), приходимо до наступної рівності:

$$P_\lambda(\alpha^*, \rho^*) = \int_\Omega P(\alpha^*, \rho^*)\lambda(x)dx = \int_\Omega y^*\lambda(x)dx. \tag{4.10}$$

Нехай $\{(\alpha^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty$ послідовність з множини Ξ така, що

$$P(\alpha^k, \rho^k) \rightharpoonup y^* \text{ в просторі } L^2(\Omega) \text{ при } k \to \infty. \tag{4.11}$$

Оскільки множина Ξ є секвенційно τ-компактною (див. т. 1), будемо вважати, що існує пара $(\alpha^0, \rho^0) \in \Xi$ така, що $(\alpha^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (\alpha^0, \rho^0)$ в Y. З іншого боку, $y^* \in Max_\Lambda(cl_\omega P(\Xi))$. Тому, згідно з означенням (7), маємо, що $y^* \in Sup^{\Lambda,\omega}_{(\alpha,\rho)\in\Xi} P(\alpha, \rho)$. Звідки випливає, що пара $(\alpha^0, \rho^0) \in Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda)$. Далі, беручи до уваги τ-нн. зв. функціонала $P_\lambda : \Xi \to R$, отримаємо:

$$\int_\Omega P(\alpha^0, \rho^0)\lambda(x)dx \geq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega P(\alpha^k, \rho^k)\lambda(x)dx = \int_\Omega y^*\lambda(x)dx.$$

Тоді, залучаючи рівність (4.10), приходимо до наступної нерівності:

$$\int_\Omega P(\alpha^k, \rho^k)\lambda(x)dx \geq \int_\Omega P(\alpha^*, \rho^*)\lambda(x)dx,$$

тобто $(\alpha^0, \rho^0) \in Arg \max\limits_{(\alpha,\rho)\in\Xi} \int_\Omega P(\alpha, \rho)\lambda(x)dx$. Таким чином, показано, що існує щонайменше одна пара $(\alpha^0, \rho^0) \in \Xi$, яка є точкою об'єднання множин

$$Arg \max_{(\alpha,\rho)\in\Xi} \int_\Omega P(\alpha, \rho)\lambda(x)dx \text{ та } Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda)$$

відповідно. Теорема доведена. □

Наслідок 3. *Припустимо, що виконуються умови теореми 4 та існує елемент* $\lambda \in \Lambda_P^\tau \setminus \{0\}$ *такий, що супремум скалярної задачі*

$$Maximize P_\lambda(\alpha, \rho) = \int_\Omega P(\alpha, \rho)\lambda(x)dx, \text{ якщо } (\alpha, \rho) \in \Xi \tag{4.12}$$

досягається на єдиній парі $(\alpha^*, \rho^*) \in \Xi$. *Тоді* $(\alpha^*, \rho^*) \in Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda)$.

Бібліографічні посилання

1. *Божанова Т. А.* Об одной задаче Коши на транспортных сетях // Зб. наук. пр. "Питання прикладної математики і математичного моделювання". — ДНУ, 2009. — С. 51–63.
2. *Божанова Т. А.* О топологических свойствах множества допустимых решений одного класса транспортных сетевых задач. — Вісник ЗНУ, Сер. Фізико-математичні науки. —2009. —№ 1 — С. 31–41.
3. *Божанова Т. А.* Про існування ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації транспортного потоку на мережі. — Вісник ДНУ, Сер. Моделювання. — 2009. —Т. 17, № 8. — С. 132–148.

4. *Bardos C., Leroux A. Y., Nedeles J. C.* First-order quasilinear equations with boundary conditions //Communications in Partial Differential Equations — 4(1979). — p.1017-1034.
5. *Caascone A., D'Apice C., Piccoli B., Rarita L.* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences //SIAM Journal on Mathematical Analysis — 17(2007). —№10 — p.1587-1617.
6. *Caascone A., D'Apice C., Rarita L.* Circulation of car traffic in cingested urban areas //Preprint DIIMA— Universita degli Studi di Salerno (2006). — №22 — p.1-31.
7. *Coclite G. M., Piccoli B.* Traffic Flows on a Road Network. — SISSA, Preprint. — 2002.
8. *Coclite G. M., Garavelo M., Piccoli B.* Traffic Flow on Networks // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 36(2005). — p. 1862-1886.
9. *Garavelo M., Piccoli B.* Traffic Flow on Networks // AIMS Series on Appl. Math. — Vol. 1 — 2006.
10. *Gugat M., Herty M., Klar A., Leugering G.* Optimal Control for Traffic Flow Networks //Journal of optimization theory and applications. — 126(2005). — p. 589-616.
11. *Holden H., Riserbo N. H.* A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 4(1995). — p. 999-1017.
12. *Jahn J.* Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. — Berlin: Springer-Verlag, 2004. — 400 p.
13. *Kruzhkov S.* First-order quasilinear equations in several independent variables // Math. USSR Sbornic. — 10(1970). — p. 217-243.
14. *Lebecque J., Khoshyaran M.* First-order macroscopic traffic models for network in the context of dynamic assignment //In Transportation Planning-State of the Art, M. Patriksson and K.A.P. Labbe, eds. — 2002.

Надійшла до редакції 01.09.2009