ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2010. Вип. 2. С. 103–113

УДК 517.91

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

В. А. Остапенко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49010.

Рассматривается неоднородное уравнение Хилла, в котором коэффициенты и правая часть являются периодическими функциями одного и того же периода T. Показано, что только некоторые частные решения этого уравнения могут быть периодическими с периодом T. В то же время удается установить, что при определенных значениях параметров уравнения общее решение неоднородного уравнения Хилла становится периодическим с периодом, кратным T. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы общее решение неоднородного уравнения Хилла стало периодическим. Разработан алгоритм численного построения периодической фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения Хилла. Показано, как с помощью этой фундаментальной системы решений получить общее периодическое решение неоднородного уравнения Хилла. Указаны некоторые практические применения полученных результатов в инженерной практике.

Ключевые слова. Уравнение Хилла, периодическое общее решение, алгоритм численного решения.

Введение

В инженерной практике нередко возникают проблемы, связанные с необходимостью обеспечения периодических режимов работы различных механизмов и устройств. При этом условия начала движения таких механизмов носят случайный характер. Иными словами, начальные условия в таких задачах раз от раза могут существенно изменяться. В качестве примера таких механизмов можно назвать вибрационные классификаторы [1]. В этой конструкции жесткая рама классификатора приводится в колебательное движение с помощью дебалансных вибраторов. Вдоль рамы на равных расстояниях расположены жестко связанные с ней оси валков. Валки свободно посажены на оси. Под действием вибраторов рама и вместе с ней и оси валков совершают движение по эллиптической или, в частности, по круговой траектории в вертикальной плоскости [1– 4]. При этом под действием сил инерции в движение приводятся также валки, перекатываясь по осям без проскальзывания. В [4] показано, что перекатывание валков по осям происходит с углом запаздывания α по отношению к углу поворота рамы классификатора ψ. С точки зрения качественной работы классификатора важно выдерживать постоянный зазор между валками. А это значит, что вращения валков должны быть периодическими. Уравнение для угла запаздывания при вращении валков имеет вид [4]:

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} = -p(t)\sin\alpha(t) + \varepsilon\cos(\psi(t) - \alpha(t)).$$

В этом уравнении ε – малый параметр. При построении асимптотического разложения решения данного уравнения появляется последовательность неоднородных уравнений типа Хилла, из которых определяются коэффициенты разложения. В свою очередь, асимптотическое разложение решения может быть периодическим тогда и только тогда, когда все коэффициенты асимптотического разложения будут периодическими функциями одного и того же периода. Учитывая отмеченную выше неопределенность начальных условий, а также тот факт, что все многочисленные валки должны совершать периодические вращения, очень важно, чтобы решение рассматриваемого уравнения было периодическим при любых начальных условиях. А это значит, что общее решение каждого из уравнений для коэффициентов асимптотического разложения должно быть периодическим. Настоящая статья посвящена получению необходимых и достаточных условий, при которых общее решение неоднородного уравнения типа Хилла будет периодическим.

1. Постановка задачи

Рассмотрим проблему построения общего периодического решения неоднородного уравнения Хилла:

$$\ddot{z}(t) + q(t)z(t) = F(t), \tag{1.1}$$

в котором функции $q(t)$ и $F(t)$ являются $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическими. Возникает задача: выбрать параметры в уравнении (1.1) так, чтобы решение этого уравнения было периодическим независимо от начальных условий.

2. Однородное уравнение Хилла

С целью решения этой проблемы рассмотрим, прежде всего, однородное уравнение Хилла, соответствующее (1.1):

$$\ddot{z}(t) + q(t)z(t) = 0. \tag{2.1}$$

Решив для уравнения (2.1) две задачи Коши с начальными условиями

$$z_1(0) = 1; \quad \dot{z}_1(0) = 0; \qquad\qquad z_2(0) = 0; \quad \dot{z}_2(0) = 1, \tag{2.2}$$

получим две функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Эти решения будут линейно независимыми, так как для них определитель Вронского

$$W(t) = W(0) = \begin{vmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ \dot{z}_1(0) & \dot{z}_2(0) \end{vmatrix} = 1. \tag{2.3}$$

Располагая фундаментальной системой решений уравнения (2.1) $z_1(t)$ и $z_2(t)$, можно любое его частное решение выразить в виде:

$$z(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) \tag{2.4}$$

с произвольными постоянными C_1 и C_2. Эти постоянные определяются из начальных условий

$$z(0) = y_0; \quad \dot{z}(0) = y_1, \tag{2.5}$$

то есть частное решение с учетом (2.2) может быть записано в виде:

$$z(t) = y_0 z_1(t) + y_1 z_2(t). \tag{2.6}$$

Функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ в общем случае не будут $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическими функциями. Установим, при каких значениях y_0 и y_1 решение (2.6) будет $\frac{2\pi}{\omega}$ периодической функцией t. Так как коэффициенты в уравнении (2.1) являются $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическими функциями, для этого необходимо и достаточно выполнить условия [6]

$$z(\frac{2\pi}{\omega}) = z(0); \quad \dot{z}(\frac{2\pi}{\omega}) = \dot{z}(0). \tag{2.7}$$

Отсюда, (2.5) и (2.6), следует:

$$(z_1(\frac{2\pi}{\omega}) - 1)y_0 + z_2(\frac{2\pi}{\omega})y_1 = 0; \qquad \dot{z}_1(\frac{2\pi}{\omega})y_0 + (\dot{z}_2(\frac{2\pi}{\omega}) - 1)y_1 = 0. \tag{2.8}$$

При нулевом решении системы (2.8) частное решение (2.6) становится тривиальным. Поэтому для существования нетривиального $\frac{2\pi}{\omega}$ периодического решения уравнения (2.1) необходимо и достаточно обращение в нуль определителя системы (2.8), то есть выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} z_1(\frac{2\pi}{\omega}) - 1 & z_2(\frac{2\pi}{\omega}) \\ \dot{z}_1(\frac{2\pi}{\omega}) & \dot{z}_2(\frac{2\pi}{\omega}) - 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.9}$$

С учетом выражения (2.3) для определителя Вронского уравнение (2.9) может быть записано в виде:

$$1 - 2L + W(\frac{2\pi}{\omega}) = 0,$$

где обозначено

$$2L = z_1(\frac{2\pi}{\omega}) + \dot{z}_2(\frac{2\pi}{\omega}). \tag{2.10}$$

Число L называется характеристической постоянной Ляпунова [5] и достаточно часто используется при анализе решений дифференциальных уравнений и их устойчивости. Таким образом, оказывается, что нетривиальные $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические решения уравнения (2.1) могут существовать только при $L = 1$. При выполнении условия (2.9) система (2.8) имеет бесконечное число решений вида $y_1 = ky_0$, которым будет соответствовать также бесконечное количество частных решений (2.6). Однако несложно показать, что все эти решения будут линейно зависимы. Поэтому фундаментальная система решений уравнения (2.1) будет содержать решение, не являющееся $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическим. Следовательно, общее решение уравнения (2.1) не может быть $\frac{2\pi}{\omega}$ периодической функцией. При $L \neq 1$ решением уравнения (2.1) не может быть $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическая функция. Поэтому возникает следующая задача: построить фундаментальную систему периодических решений уравнения (1.1), но уже периода, отличного от $\frac{2\pi}{\omega}$. Для этого проводятся следующие рассуждения.

На основе фундаментальной системы решений уравнения (2.1) $z_1(t)$ и $z_2(t)$ строится произвольное решение этого уравнения вида (2.4). Осуществляется сдвиг этой функции на $\frac{2\pi}{\omega}$:

$$z(t+\frac{2\pi}{\omega}) = C_1 z_1(t+\frac{2\pi}{\omega}) + C_2 z_2(t+\frac{2\pi}{\omega}). \tag{2.11}$$

Так как коэффициенты уравнения (2.1) $\frac{2\pi}{\omega}$ периодичны по t, сдвиг в этом уравнении на $\frac{2\pi}{\omega}$ не изменит вид этого уравнения. Поэтому функция (2.11) является решением уравнения (2.1). В свою очередь, функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ также являются решениями уравнения (2.1), и поэтому при сдвиге на $\frac{2\pi}{\omega}$ они останутся решениями уравнения (2.1). Поэтому их можно представить в виде (2.4) с некоторыми частными значениями констант C_1 и C_2:

$$z_1(t+\frac{2\pi}{\omega}) = a_{11}z_1(t) + a_{12}z_2(t); \qquad z_2(t+\frac{2\pi}{\omega}) = a_{21}z_1(t) + a_{22}z_2(t). \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в (2.11), получим:

$$z(t+\frac{2\pi}{\omega}) = (C_1a_{11} + C_2a_{21})z_1(t) + (C_1a_{12} + C_2a_{22})z_2(t). \tag{2.13}$$

Введем параметр σ с помощью равенств

$$C_1a_{11} + C_2a_{21} = \sigma C_1; \qquad C_1a_{12} + C_2a_{22} = \sigma C_2, \tag{2.14}$$

эквивалентных равенствам

$$(a_{11} - \sigma)C_1 + a_{21}C_2 = 0; \qquad a_{12}C_1 + (a_{22} - \sigma)C_2 = 0. \tag{2.15}$$

Для того чтобы решение (2.11) было нетривиальным, необходимо и достаточно, чтобы определитель алгебраической системы (2.14) был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{2.16}$$

Из (2.12) и начальных условий (2.2) получаем:

$$z_1(\frac{2\pi}{\omega}) = a_{11}; \qquad \dot{z}_1(\frac{2\pi}{\omega}) = a_{12}; \qquad z_2(\frac{2\pi}{\omega}) = a_{21}; \qquad \dot{z}_2(\frac{2\pi}{\omega}) = a_{22}.$$

Поэтому равенство (2.16) приводится к виду:

$$\begin{vmatrix} z_1(\frac{2\pi}{\omega}) - \sigma & z_2(\frac{2\pi}{\omega}) \\ \dot{z}_1(\frac{2\pi}{\omega}) & \dot{z}_2(\frac{2\pi}{\omega}) - \sigma \end{vmatrix} = \sigma^2 - 2L\sigma + 1 = 0. \tag{2.17}$$

С учетом (2.14) равенство (2.13) можно записать в виде:

$$z(t+\frac{2\pi}{\omega}) = \sigma z(t). \tag{2.18}$$

Полагают $\sigma = e^{\frac{2\pi}{\omega}\mu}$ и вводят функцию

$$U(t) = e^{-\mu t}z(t). \tag{2.19}$$

Тогда по определению

$$U(t+\frac{2\pi}{\omega}) = e^{-\mu(t+\frac{2\pi}{\omega})}z(t+\frac{2\pi}{\omega}) =$$
$$= e^{-\mu t}e^{-\frac{2\pi}{\omega}\mu}z(t+\frac{2\pi}{\omega}) = e^{-\mu t}e^{-\frac{2\pi}{\omega}\mu}\sigma z(t) = e^{-\mu t}z(t) = U(t),$$

то есть введенная равенством (2.19) функция $U(t)$ при выполнении относительно $z(t)$ равенства (2.18) оказывается $\frac{2\pi}{\omega}$ периодической. При этом использованная в последнем равенстве функция $z(t)$ строится в виде (2.4) с постоянными C_1 и C_2, определяемыми из системы (2.15) при выполнении равенства (2.16). Таким образом, линейное однородное уравнение (2.1) с периодическими коэффициентами имеет решение вида:

$$z(t) = e^{\mu t}U(t), \tag{2.20}$$

где $U(t)$ —- периодическая, периода $\frac{2\pi}{\omega}$ функция. Причем из (2.15) следует, что

$$C_2 = -\frac{z_1(\frac{2\pi}{\omega}) - \sigma}{z_2(\frac{2\pi}{\omega})}C_1 = -\frac{\dot{z}_1(\frac{2\pi}{\omega})}{\dot{z}_2(\frac{2\pi}{\omega}) - \sigma}C_1, \tag{2.21}$$

где σ — корень уравнения (2.17). Корни уравнения (2.17) имеют вид:

$$\sigma_{1,2} = L \pm \sqrt{L^2 - 1}, \tag{2.22}$$

поэтому при $L \neq 1$ уравнение (2.17) имеет два различных корня: σ_1 и σ_2. Поэтому и равенств (2.21) будет два:

$$C_{12} = h_1 C_{11}; \qquad C_{22} = h_2 C_{12}, \tag{2.23}$$

где обозначено

$$h_1 = -\frac{z_1(\frac{2\pi}{\omega}) - \sigma_1}{z_2(\frac{2\pi}{\omega})} \qquad h_2 = -\frac{z_1(\frac{2\pi}{\omega}) - \sigma_2}{z_2(\frac{2\pi}{\omega})}. \tag{2.24}$$

Следовательно, равенствам (2.23) отвечают два решения уравнения (2.1) вида (2.4):

$$\eta_1(t) = C_{11}\left(z_1(t) + h_1 z_2(t)\right); \qquad \eta_2(t) = C_{12}\left(z_1(t) + h_2 z_2(t)\right). \tag{2.25}$$

Вычислив определитель Вронского от решений (2.25), можно убедиться, что вследствие $h_1 \neq h_2$, функции (2.25) являются линейно независимыми, то есть образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.1). При этом обе эти функции могут быть представлены в виде (2.20):

$$\eta_1(t) = e^{\mu_1 t}U_1(t); \qquad \eta_2(t) = e^{\mu_2 t}U_2(t). \tag{2.26}$$

где $U_1(t)$ и $U_2(t)$ — $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические функции,

$$\mu_i = \frac{\omega}{2\pi}\ln\sigma_i, \quad i = 1, 2. \tag{2.27}$$

При $|L| > 1$, как следует из (2.22) оба корня уравнения (2.17) будут вещественными и различными. Поэтому и μ_1 и μ_2 будут вещественны. А при вещественных μ_1 и μ_2 функции (2.26) не могут быть периодическими. Кроме того, по теореме Виета $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1$, что означает, что один из корней, например σ_1, будет по модулю больше единицы, а другой, σ_2 , меньше единицы по модулю. Отсюда следует, что μ_1 будет положительным вещественным числом. Поэтому функция $\eta_1(t)$ будет стремиться к бесконечности при $t \to \infty$.

Таким образом, при $|L| > 1$ решение уравнения Хилла (2.1) является непериодическим и, к тому же, неустойчивым. При $|L| = 1$ уравнение (2.16) имеет корень σ кратности 2, поэтому получается только одна функция $\eta_1(t)$, имеющая вид (2.12) и обладающая свойством (2.18). Другая же, имеющая вид (2.12) и линейно независимая с $\eta_1(t)$ функция должна иметь вид (2.12) с коэффициентом $a_{22} = \sigma$, так как в этом случае дискриминант уравнения (2.16) равен нулю и корень этого уравнения

$$\sigma = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}.$$

Но так как в представлении (13) $a_{11} = \sigma$, то отсюда следует, что и $a_{22} = \sigma$. Поэтому в случае кратного корня σ уравнения (2.9) два линейно независимых решения уравнения (2.2) будут иметь вид:

$$\eta_1(t + \frac{2\pi}{\omega}) = \sigma\eta_1(t); \qquad \eta_2(t + \frac{2\pi}{\omega}) = a_{21}\eta_1(t) + \sigma\eta_2(t). \tag{2.28}$$

Уравнение (2.9) не может иметь нулевого корня, так как это означало бы, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

а это, в свою очередь, значило бы, что функции $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ — линейно зависимы. При $|L| = 1$ представим функцию $\eta_2(t)$ в виде:

$$\eta_2(t) = e^{\mu_1 t}\zeta(t). \tag{2.29}$$

Подставив представления функций $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ в виде (2.26) и (2.29) соответственно во второе равенство (2.28) получим, учтя, что $e^{\frac{2\pi}{\omega}\mu_1} = \sigma$

$$e^{\mu_1(t+\frac{2\pi}{\omega})}\zeta(t + \frac{2\pi}{\omega}) = a_{21}e^{\mu_1 t}U_1(t) + \sigma e^{\mu_1 t}\zeta(t),$$

откуда следует

$$\zeta(t + \frac{2\pi}{\omega}) = \zeta(t) + \frac{a_{21}}{\sigma}U_1(t). \tag{2.30}$$

Определим теперь функцию $U_3(t)$ соотношением

$$\zeta(t) = \frac{\omega a_{21}}{2\pi\sigma}tU_1(t) + U_3(t). \tag{2.31}$$

(32) Подставив (2.31) в (2.30), получим:

$$\frac{\omega a_{21}}{2\pi\sigma}(t + \frac{2\pi}{\omega})U_1(t + \frac{2\pi}{\omega}) + U_3(t + \frac{2\pi}{\omega}) = \frac{\omega a_{21}}{2\pi\sigma}tU_1(t) + U_3(t) + \frac{a_{21}}{\sigma}U_1(t),$$

откуда с учетом $\frac{2\pi}{\omega}$ периодичности функции $U_1(t)$ следует:

$$U_3(t+\frac{2\pi}{\omega}) = U_3(t),$$

то есть функция $U_3(t)$ является $\frac{2\pi}{\omega}$ периодической. Поэтому, подставляя (2.31) в (2.30), получим, что в случае кратного корня уравнения (2.16), или (2.17), два линейно независимых решения уравнения (2.1) представляются в виде:

$$\eta_1(t) = e^{\mu_1 t}U_1(t); \quad \eta_2(t) = e^{\mu_1 t}\left[\frac{\omega a_{21}}{2\pi\sigma}tU_1(t) + U_3(t)\right], \tag{2.32}$$

где $U_1(t)$ и $U_3(t)$ — $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические функции. Отметим, что функция $\eta_2(t)$ является непериодической. Кроме того, при $t \to \infty$ модуль этой функции неограниченно возрастает. То есть решение $\eta_2(t)$ является неустойчивым. При $|L| < 1$ корни уравнения (2.17)

$$\sigma_{1,2} = L \pm i\sqrt{1-L^2} \tag{2.33}$$

будут комплексными сопряженными. При этом

$$|\sigma_{1,2}| = \sqrt{L^2 + (1-L^2)} = 1. \tag{2.34}$$

Введя обозначение $\gamma = L$, $\nu = \sqrt{1-L^2}$, получим, что $\sigma_1 = \gamma + i\nu$; $\sigma_2 = \gamma - i\nu$. Функция ln от комплексного аргумента определяется равенством

$$\ln\sigma = \ln(\gamma + i\nu) = \ln|\sigma| + i\arg\sigma, \tag{2.35}$$

где

$$\arg\sigma = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\nu}{\gamma}, & \gamma > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{\nu}{\gamma} + \pi, & \nu \le 0,\ \gamma < 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{\nu}{\gamma} - \pi, & \nu < 0,\ \gamma < 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Вследствие равенства модулей σ_1 и σ_2 единице, в равенстве (2.35) для этих величин получаем $\ln|\sigma_1| = \ln|\sigma_2| = 0$ и поэтому

$$\mu_1 = i\frac{\omega}{2\pi}\arg\sigma_1 \quad \mu_2 = i\frac{\omega}{2\pi}\arg\sigma_2. \tag{2.37}$$

Так как величины σ_1 и σ_2 являются комплексно сопряженными, для них справедливо равенство $\arg\sigma_2 = -\arg\sigma_1$. Поэтому, обозначив $\beta = \arg\sigma_1$, получим, что при $|L| < 1$ решения (2.26) будут представлены в виде:

$$\eta_1(t) = e^{i\frac{\omega\beta}{2\pi}t}U_1(t); \quad \eta_2(t) = e^{-i\frac{\omega\beta}{2\pi}t}U_2(t). \tag{2.38}$$

Функция $e^{i\frac{\omega\beta}{2\pi}t}$ при рациональном $\frac{\omega\beta}{2\pi}$ является периодической. При $\beta = 2\pi$ ее период равен $\frac{2\pi}{\omega}$. Однако в этом случае число σ_1 оказывается вещественным. Действительно, в этом случае $\ln\sigma_1 = i2\pi$, то есть $\sigma_1 = e^{2\pi i} = 1$. Но формулы (2.38) справедливы только для комплексных σ. Вообще, если

$$\beta = n\pi, \tag{2.39}$$

где n — натуральное число, то оказывается, что $\sigma_1 = \cos\beta + i\sin\beta = \pm 1$ в зависимости от четности или нечетности n. То есть и в этом случае число σ_1 оказывается вещественным, поэтому для значений β по формуле (2.39) формулы (2.38) несправедливы. В то же время любое другое значение β, отличающееся от (2.39), является допустимым. Заметим, что период T функции $e^{i\frac{\omega\beta}{2\pi}t}$ равен $T = \frac{4\pi^2}{\omega\beta}$. В частности, при $\beta = \frac{\pi}{2}$ получаем $T = \frac{8\pi}{\omega}$; при $\beta = \frac{2\pi}{3}$ имеем $T = \frac{6\pi}{\omega}$. Таким образом, показано, что существуют такие значения $\beta = \arg\sigma_1$, при которых период первых множителей в формулах (2.38) будет целым кратным $\frac{2\pi}{\omega}$, то есть будет справедливо представление периода в виде:

$$T_n = n\frac{2\pi}{\omega} \tag{2.40}$$

с натуральным $n \geq 3$. А так как в формулах (2.38) функции $U_1(t)$ и $U_2(t)$ имеют период $\frac{2\pi}{\omega}$, то и в целом период решений (2.38) будет равен T_n. Следовательно, при $|L| < 1$ удается получить T_n периодическую фундаментальную систему решений уравнения (2.1). Поэтому любое частное решение уравнения (2.1) в этом случае может быть представлено в виде:

$$z(t) = C_1\eta_1(t) + C_2\eta_2(t) \tag{2.41}$$

и это решение будет T_n периодическим. Здесь

$$\eta_1(t) = e^{i\frac{\omega\beta}{2n}t}U_1(t); \qquad \eta_2(t) = e^{-i\frac{\omega\beta}{2n}t}U_2(t), \tag{2.42}$$

с натуральным $n \geq 3$ и $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическими функциями $U_1(t)$ и $U_2(t)$.

3. Неоднородное уравнение Хилла

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение Хилла (1.1). Используя форму решения (2.41) и применяя метод вариации произвольных постоянных, получим, что общее решение уравнения (1.1) будет иметь вид:

$$z(t) = C_1(0)\eta_1(t) + C_2(0)\eta_2(t) - \\ - \eta_1(t)\int_0^t \frac{F(\tau)\eta_2(\tau)}{\Delta(\tau)}\,d\tau + \eta_2(t)\int_0^t \frac{F(\tau)\eta_1(\tau)}{\Delta(\tau)}\,d\tau. \tag{3.1}$$

Здесь определитель Вронского фундаментальной системы решений (2.42) обозначен

$$\Delta(t) = \eta_1(t)\dot{\eta_2}(t) - \dot{\eta_1}(t)\eta_2(t).$$

Коэффициенты в уравнении (1.1) можно считать имеющими период T_n. Поэтому для того чтобы решение (3.1) было T_n периодическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства [6]:

$$z(T_n) = z(0); \qquad \dot{z}(T_n) = \dot{z}(0). \tag{3.2}$$

Подставив (3.1) в (3.2), получим:

$$\begin{aligned} &C_1(0)\eta_1(T_n) + C_2(0)\eta_2(T_n) - \eta_1(T_n)I_1(T_n) + \eta_2(T_n)I_2(T_n) = \\ &\qquad = C_1(0)\eta_1(0) + C_2(0)\eta_2(0); \\ &C_1(0)\dot{\eta}_1(T_n) + C_2(0)\dot{\eta}_2(T_n) - \dot{\eta}_1(T_n)I_1(T_n) + \dot{\eta}_2(T_n)I_2(T_n) = \\ &\qquad = C_1(0)\dot{\eta}_1(0) + C_2(0)\dot{\eta}_2(0), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где обозначено

$$I_1(t) = \int\limits_0^t \frac{F(\tau)\eta_2(\tau)}{\Delta(\tau)}\,d\tau; \qquad I_2(t) = \int\limits_0^t \frac{F(\tau)\eta_1(\tau)}{\Delta(\tau)}\,d\tau. \tag{3.4}$$

С учетом T_n периодичности функций $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ из (3.3) следует:

$$-\eta_1(T_n)I_1(T_n)+\eta_2(T_n)I_2(T_n) = 0; \qquad -\dot{\eta}_1(T_n)I_1(T_n)+\dot{\eta}_2(T_n)I_2(T_n) = 0. \tag{3.5}$$

Определитель системы (3.5) есть определитель Вронского фундаментальной системы решений (2.42), взятый с обратным знаком. Поэтому он отличен от нуля, и система (3.5) имеет только тривиальное решение

$$I_1(T_n) = 0; \qquad I_2(T_n) = 0. \tag{3.6}$$

Равенства (3.6) являются необходимыми и достаточными условиями существования T_n периодических решений уравнения (1.1). Поэтому, если функция $F(t)$ в правой части неоднородного уравнения Хилла (1.1) удовлетворяет условиям (3.6), любое решение уравнения (1.1) будет T_n периодическим.

4. Алгоритм численно-аналитического построения периодического общего решения

Заметим, что построение общего периодического решения неоднородного уравнения Хилла (1.1) принципиально возможно выполнить в аналитическом виде. Для этого, как следует из формулы (3.1), достаточно найти периодическую фундаментальную систему $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ решений однородного уравнения (2.1). Для построения этой фундаментальной системы решений необходимо, прежде всего, вычислить аналитически непериодическую фундаментальную систему решений уравнения (2.1) $z_1(t)$ и $z_2(t)$ с начальными условиями (2.2). Функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ отыскиваются в виде рядов Фурье с неопределенными коэффициентами. Представление решения в таком виде требует, чтобы функция $q(t)$ также была разложена в ряд Фурье. Поэтому процедура подстановки формы решения в виде рядов Фурье в уравнение (2.1) приводит к необходимости почленного перемножения двух рядов Фурье в слагаемом $q(t)z(t)$. Это произведение рядов само нужно представить в виде ряда Фурье. После этого получается бесконечная система алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения решения. Решить такую систему можно лишь приближенно в виде достаточно громоздких выражений, мало пригодных для анализа. То есть уже на первом этапе построения решения в аналитическом виде возникают существенные неудобства. Поэтому, в данном случае, более рациональным представляется численно-аналитический алгоритм построения периодического общего решения уравнения (1.1). Этот алгоритм заключается в следующем.

1. Численно, например методом Рунге–Кутта, решить две задачи Коши для уравнения (2.1) с начальными условиями (2.2), определив тем самым фундаментальную систему решений уравнения (2.1) $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Так как для дальнейшего важно знать не только функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$, но и их первые производные, удобно уравнение (2.1) представить в виде системы:

$$\dot{z}(t) = u(t); \qquad \dot{u}(t) + q(t)z(t) = 0. \tag{4.1}$$

2. По формуле (2.10) вычислить L. Если $|L| \geq 1$, изменить параметры системы (в данном случае $q(t)$) и добиться, чтобы выполнялось неравенство $|L| < 1$.

3. Найти корни σ_1 и σ_2 уравнения (2.17).

4. Для этих σ_1 и σ_2 по формулам (2.23) и (2.24) вычисляют величины $C_{2s} = C_{2s}(C_{1s}, \sigma_s)$, $s = 1, 2$.

5. По коэффициентам C_{11}, C_{21} и C_{12}, C_{22} с помощью формулы (2.4) построить решения $z_1(t)$ и $z_2(t)$.

6. С помощью формулы (2.27) вычислить

$$\mu_s = \frac{\omega}{2\pi} \ln \sigma_s, \quad s = 1, 2.$$

7. С помощью формулы (2.20) вычислить функции

$$U_s(t) = e^{-\mu_s t} z_s(t), \quad s = 1, 2.$$

8. Подставить функции $U_s(t)$ в формулы (2.42), получив тем самым периодическую фундаментальную систему решений однородного уравнения (2.1).

9. В равенстве

$$T = \frac{4\pi^2}{\omega\beta}$$

подобрать β так, чтобы период T функций $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ в (2.42) был равен T_n, вычисленным по формуле (2.40) с натуральным $n \geq 3$.

10. Из необходимых и достаточных условий периодичности решений вычислить одну из возможных функций $F(t)$. Тогда при $q(t)$ и $F(t)$, вычисленных по данному алгоритму, общее решение (3.1) неоднородного уравнения Хилла (1.1) будет $n\frac{2\pi}{\omega}$ периодическим.

5. Выводы

В результате проведенного анализа показано, что при определенных условиях уравнение Хилла (1.1) может иметь $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические частные решения. Однако общее решение уравнения Хилла как однородного, так и неоднородного $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическим быть не может. В то же время существуют такие функции $q(t)$ и $F(t)$, при которых общее решение неоднородного уравнения Хилла становится $n\frac{2\pi}{\omega}$ периодическим при $n \geq 3$. Разработан численно-аналитический алгоритм построения такого $n\frac{2\pi}{\omega}$ периодического общего решения неоднородного уравнения Хилла. Этот алгоритм позволяет подбирать функции $q(t)$ и $F(t)$ так, чтобы обеспечить $n\frac{2\pi}{\omega}$ периодичность общего решения. Данный алгоритм может быть использован при синтезе таких механизмов и машин, в которых требуется обеспечить периодический режим работы при любых начальных условиях.

Библиографические ссылки

1. *Остапенко В. А.* Синтез параметров валковых классификаторов вибрационного типа. /Надутый В. П., Остапенко В. А., Ягнюков В. Ф.// К. : Наукова думка, 2006. — С. 189.
2. *Ostapenko V. A.* Dynamics of periodic rotations of rollers of the vibrating classifiers. /Naduty V. P., Ostapenko V. A., Yadnyukov V. F. //Proceedings of 8th International Conference on Dynamical Systems. Theory and Applications. Lodz, Poland, 2005, pp. 316–323.
3. *Ostapenko V. A.*The asymptotic solution for the equation of roller's rotation of vibrating qualifiers at a simple resonance. //Proceedings of 9th International Conference on Dynamical Systems. Theory and Applications. Lodz, Poland, 2007, pp. 339–346.
4. *Остапенко В. А.* Математическая модель свободного качения валков вибрационных классификаторов. Вестник Херсон. нац. техн. ун-та, № 2(25), 2006. — С. 372–376.
5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. III, часть II. //М. : Наука, 1969. — С. 672.
6. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. //М. : Наука, 1969. — С. 379.

Надійшла до редакції 28.03.2010