ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2010. Вип. 2. С. 90–102

УДК 519.863:534

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ВИБРОСИСТЕМЫ

В. Н. Богомаз

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49050. E-mail: wbogomas@i.ua*

Приведены необходимые условия экстремума в задаче оптимизации работы конструкции вибросистемы, встроенной в уплотняющую машину каткового типа.

Ключевые слова. Вибросистема, условная оптимизация, необходимые условия экстремума.

1. Введение

Перспективным направлением интенсификации многих технологических процессов в различных отраслях промышленности является использование вибрационной техники. Область использования вибрационных машин довольно широка и имеет устойчивую тенденцию к дальнейшему росту. В вибромашинах большое распространение получил инерционный привод благодаря простоте и возможности находить значительные возмущающие силы при относительно небольших размерах и массах составляющих узлов.

Как известно, сегодня при уплотнении различных материалов (грунта, бетона и т. п.) очень широко используются машины динамического действия с дебалансным приводом (виброкатки, виброплиты, виброплощадки). Для качественного уплотнения материалов очень важными являются величина возмущающей силы и закон ее изменения. Таким образом, задачу определения режима работы машины для качественного уплотнения некоторой среды целесообразно рассмотреть как задачу оптимизации.

2. Постановка задачи оптимизации

В данной работе предложена новая конструкция вибросистемы, встроенной в виброкаток. Физическая модель предложенной вибросистемы с инерционными приводами изображена на рисунке 1.

Вибросистема состоит из заданного фиксированного числа n дебалансов 2, закрепленных на водиле 3, которое может вращаться относительно продольной оси вальца 1. При этом звенья водила жестко скреплены между собой. Водило и дебалансы имеют независимые индивидуальные приводы.

Обозначим угол поворота центра масс i-го дебаланса относительно вертикальной оси через ψ_i, а угол поворота первого звена водила — γ_1. Поскольку будет рассматриваться движение системы на некотором фиксированном отрезке времени $[0, T]$ при заранее заданном T, то целесообразно рассматривать эти величины как функции времени, т. е., $\psi_i(t)$ и $\gamma_1(t)$.

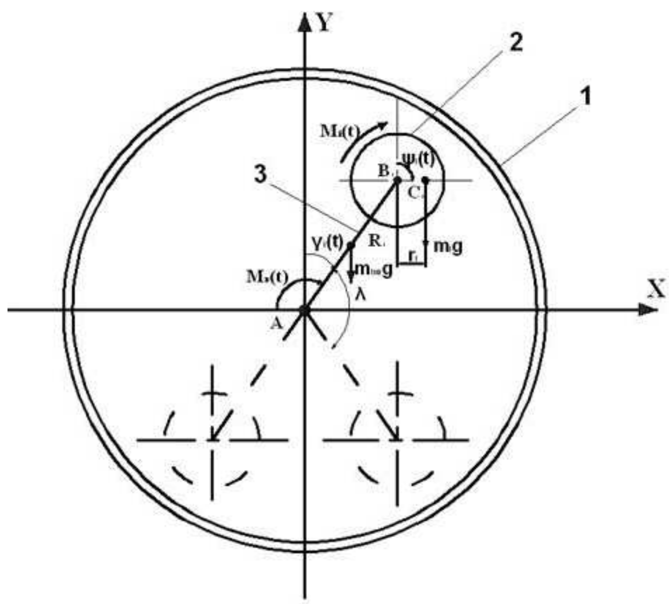


Рис. 1. Физическая модель объекта

При создании математической модели вибросистемы введем некоторые упрощения: 1) моменты трения во вращательных парах равны нулю $M_{Tp} = 0$; 2) валец со встроенной вибросистемой находится в покое во время работы $v_A = 0 \ \forall t \in [0, T]$; 3) центры масс звеньев водила лежат на их геометрических серединах; 4) вибросистема начинает работать из состояния покоя и начального положения $\psi_i(0) = \gamma_1(0) = 0 \ \forall i \in [1, n]$.

Для определения уравнений движения системы использовались дифференциальные уравнения Лагранжа 2-го рода. В результате их применения получена система дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_{n+2}; \\ & ... & ; \\ \dot{x}_{n+1} & = & x_{2n+2}; \\ \dot{x}_{n+2} & = & \frac{1}{I_{1\partial}}[u_1 + k_1 \sin x_1 - C_1 \sin(x_{n+1} - x_1) x_{2n+2}^2]; \\ & ... & ; \\ \dot{x}_{2n+1} & = & \frac{1}{I_{n\partial}}[u_n + k_n \sin x_n - C_n \sin(x_{n+1} + \lambda(n-1) - x_n) x_{2n+2}^2]; \\ \dot{x}_{2n+2} & = & \frac{1}{M(x)}[x_{2n+2}^2 \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \sin(\beta_i - x_i) - \\ & & -2x_{2n+2} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \sin(\beta_i - x_i) x_{n+1+i} + u_{n+1} + \\ & & + \sum\limits_{i=1}^{n} N_i \sin(\beta_i) + \sum\limits_{i=1}^{n} P_i [R_i \sin(\beta_i) + r_i \sin x_i)]], \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где $x = \{\psi_1, ..., \psi_n, \gamma_1, \dot{\psi}_1, ..., \dot{\psi}_n, \dot{\gamma}_1\}$ — вектор состояния системы;

$\dot{\psi}_i$ — угловая скорость вращения i-го дебаланса;

$\dot{\gamma}_1$ — угловая скорость вращения водила;

$u = (u_1, ..., u_{n+1})$ — вектор управлений системы;

u_i — момент вращения привода i-го дебаланса, $i = 1, ..., n$;

u_{n+1} — момент вращения привода водила;

$\lambda = \frac{2\pi}{n}$ — угол между соседними звеньями водила (принимается одинаковым для всех пар соседних звеньев водила);

m_i — масса i-го дебаланса;

m_{izv} — масса i-го звена водила;

R_i — длина i-го звена водила;

r_i — эксцентриситет i-го дебаланса;

$I_{izv} = \frac{m_{izv}R_i^2}{3}$ — момент инерции i-го звена водила относительно оси вращения водила;

$I_{i\partial} = \frac{m_i(R_i^2+2r_i^2)}{2}$ — момент инерции i-го дебаланса относительно оси, проходящей через центр его инерции;

$L_i^2(x) = R_i^2 + r_i^2 + 2R_ir_i\cos(\beta_i - x_i)$ — квадрат расстояния от оси вращения водила до центра инерции i-го дебаланса;

$\beta_i = x_{n+1} + \lambda(i-1)$ — угол поворота i-го звена водила;

$C_i = m_iR_ir_i$, $k_i = m_igr_i, N_i = m_{izv}g\frac{R_i}{2}$, $M(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}(I_{izv} + m_iL_i^2(x))$, $P_i = m_ig$.

Всюду далее предположим отсутствие случайных внешних факторов на систему. Таким образом, уравнения движения вибросистемы представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений.

Предположим, что фазовые координаты системы $x(\cdot)$ являются элементами пространства Соболева $H^1(0,T,\mathbb{R}^{2n+2})$, а управления $u(\cdot)$ — элементами пространства суммируемых в квадрате функций $L_2(0,T,\mathbb{R}^{n+1})$.

Поскольку существующие приводы могут разгонять дебалансы до некоторого конечного значения скорости, множество допустимых фазовых траекторий имеет вид:

$$X_\partial = \left\{x \in H^1(0,T,\mathbb{R}^{2n+2}) : \alpha_{min} \le x_i(t) \le \alpha_{max}, \alpha_{min} < 0, \alpha_{max} > 0, \right.$$
$$\left. \forall i \in [n+2, 2n+2], \forall t \in [0,T]\right\}. \tag{2.2}$$

Поскольку существующие приводы могут обладать ограниченным моментом вращения, то за множество допустимых управлений примем

$$U_\partial = \left\{u \in L_2(0,T,\mathbb{R}^{n+1}) : m_{min} \le u_i(t) \le m_{max}, m_{min} < 0, m_{max} > 0, \right.$$
$$\left. \forall i \in [n+1, n+1], \forall t \in [0,T]\right\}. \tag{2.3}$$

Все $x \in X_\partial$ далее будем называть допустимыми состояниями системы, а функции, удовлетворяющие условию $u \in U_\partial$,— допустимыми управлениями. Всюду далее пару (x,u) назовем процессом управления, а множество допустимых процессов управления обозначим

$$\Xi = \{(x,u) \in X_\partial \times U_\partial : \text{ удовлетворяет системе (2.1)}\}.$$

Начальные условия в обозначениях вектора состояния системы имеют вид $x_i(0) = 0, \forall i \in [1, 2n+2]$.

Для достижения эффекта увеличения веса машины на всем заданном промежутке времени задаемся целью найти такой вектор управлений $u = (u_1, ..., u_{n+1})$, обеспечивающий режим работы вибросистемы, когда суммарная возмущающая сила неположительна на всем заданном промежутке времени $[0, T]$.

Таким образом, определим функционал качества как среднее значение возмущающей силы (суммарной силы инерции, возникающей при вращении дебалансов и водила) на заданном фиксированном промежутке времени $[0, T]$.

Функционал качества имеет вид:

$$B(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) = \frac{1}{T} \int_0^T L(x(\cdot), \dot{x}(\cdot))\, dt, \tag{2.4}$$

где

$$L(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) = \sum_{i=1}^{n} (m_i [x_{2n+2}^2 R_i \ \cos x_{n+1} +$$
$$+ \dot{x}_{2n+2} R_i \sin x_{n+1} + x_{n+i+1}^2 r_i \cos x_i + \dot{x}_{n+i+1} r_i \sin x_i +$$
$$+ m_{i\text{зв}} \frac{R_i}{2} [\dot{x}_{2n+2} \sin(x_{n+1} + \lambda(i-1)) + x_{2n+2}^2 \cos(x_{n+1} + \lambda(i-1))]).$$

Физический смысл задачи оптимизации: найти законы изменения моментов вращения дебалансов и водила, где значения моментов изменяются в допустимых пределах и приводят к изменениям угловых скоростей в заданных допустимых пределах, при которых среднее значение возмущающей силы на заданном фиксированном промежутке времени $[0, T]$ минимально.

Таким образом, задача оптимизации имеет вид:

$$\inf_{(x,u)\in\Xi} B(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)), \Xi \subset H^1(0, T, \mathbb{R}^{2n+2}) \times L_2(0, T, \mathbb{R}^{n+1})$$
$$\text{при } x_i(0) = 0, \forall i \in [1, 2n+2]. \tag{2.5}$$

Существование решения в задаче (2.5) доказано в статье [1].

3. Необходимые условия экстремума в поставленной задаче оптимизации

Представим множество допустимых фазовых траекторий X_∂ в виде системы неравенств такого типа:

$$g_m(x(t)) = x_m(t) - \alpha_{max} \le 0, \ g_k(x(t)) = \alpha_{min} - x_k(t) \le 0 \ k, m \in [n+2, 2n+2].$$

Таким образом, преобразуем задачу (2.5) к виду:

$$B(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T L(x(\cdot), \dot{x}(\cdot))\, dt \to inf, \tag{3.1}$$

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{3.2}$$

$$g_m(x(t)) \le 0, g_k(x(t)) \le 0 \qquad m, k \in [n+2, 2n+2], \tag{3.3}$$

$$u \in U_\partial, \tag{3.4}$$

$$x_i(0) = 0, \forall i \in [1, 2n+2]. \tag{3.5}$$

Таким образом, задача (3.1)—(3.5) является задачей оптимального управления динамической системой с фазовыми ограничениями, с закрепленным временем, со свободным правым концом фазовой траектории.

Рассмотрим подынтегральную функцию функционала качества как отображение $L:\mathbb{R}^{2n+2}\times\mathbb{R}^{2n+2}\longrightarrow\mathbb{R}$ и найдем ее производные по x_j $\forall j\in[1,2n+2]$. Очевидно, что $L(x(\cdot),\dot{x}(\cdot))\in C(\mathbb{R}^{2n+2}\times\mathbb{R}^{2n+2})$.

Производные отображения $L:\mathbb{R}^{2n+2}\times\mathbb{R}^{2n+2}\longrightarrow\mathbb{R}$ по переменным x_j $\forall j\in[1,2n+2]$ имеют вид:

$$L_{x_j}=(m_j[x^2_{n+j+1}r_j\sin x_j-\dot{x}_{n+j+1}r_j\cos x_j]),\forall j\in[1,n]; \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}L_{x_j}=-\sum_{i=1}^{n}(m_i[-x^2_{2n+2}R_i\sin x_{n+1}+\dot{x}_{2n+2}R_i\cos x_{n+1}+\\ +m_{i\text{зв}}\frac{R_i}{2}[\dot{x}_{2n+2}\cos(x_{n+1}+\lambda(i-1))-\\ -x^2_{2n+2}\sin(x_{n+1}+\lambda(i-1))]),j\in\{n+1\}\,;\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$L_{x_j}=2m_jx_jr_{j-n-1}\cos x_{j-n-1},\forall j\in[n+2,2n+1]; \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}L_{x_j}=-\sum_{i=1}^{n}[(m_i[2x_{2n+2}R_i\cos x_{n+1}+\\ +m_{i\text{зв}}\frac{R_i}{2}(2x_{2n+2}\cos(x_{n+1}+\lambda(i-1)))],\quad j\in\{2n+2\}\,.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Ясно, что $L_{x_j}(x(\cdot),\dot{x}(\cdot))\in C(\mathbb{R}^{2n+2}\times\mathbb{R}^{2n+2})$, $j\in[1,2n+2]$.

Рассмотрим правые части дифференциальных уравнений системы (2.1). Очевидно, что $f(x,u)\in C(\mathbb{R}^{2n+2}\times\mathbb{R}^{n+1})$. Первые $n+1$ уравнений системы (2.1) имеют вид $f_i(x,u)=x_{i+n+1}$, $\forall i\in[1,n+1]$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned}&f_{ix_j}(x,u)=0,\forall j\neq n+1+i,\forall i\in[1,n+1],\\ &f_{ix_j}(x,u)=1,\forall j=n+1+i,\forall i\in[1,n+1].\end{aligned} \tag{3.10}$$

Значит, $f_{ix_j}(x,u)\in C(R^{2n+2}\times R^{n+1})$ $\forall i\in[1,n+1]$.

Рассмотрим правые части $f_i(x,u)$ $\forall i\in[n+2,2n+1]$. Они имеют вид:

$$\begin{aligned}f_i(x,u)=\frac{1}{I_{i-n-1}}\Big[u_{i-n-1}+k_{i-n-1}\sin x_{i-n-1}-\\ -C_{i-n-1}\sin(x_{n+1}-x_{i-n-1})x^2_{2n+2}].\end{aligned}$$

Таким образом, $\forall j\in\Phi_i(j)$, где

$$\Phi_i(j)=\{j\in\mathbb{N}:j\in[1,n+1)\cup(n+1,2n+1],j\neq i-n-1\}\,,$$

имеем $f_{ix_j}(x,u)=0$ $\forall i\in[n+2,2n+1]$.

Другие случаи:

— если $j = i - n - 1$, то

$$f_{j+n+1,x_j}(x,u) = \frac{1}{I_{j,\partial}}[u_j + k_j \cos x_j - C_j \cos(x_{n+1} - x_j)x_{2n+2}^2]; \qquad (3.11)$$

— если $j = \{n+1\}$, то

$$f_{ix_j}(x,u) = \frac{1}{I_{i-n-1,\partial}}[-C_{i-n-1}\cos(x_{n+1} - x_{i-n-1})x_{2n+2}^2]; \qquad (3.12)$$

— если $j = \{2n+2\}$, то

$$f_{ix_j}(x,u) = \frac{1}{I_{i-n-1,\partial}}[-2C_{i-n-1}\sin(x_{n+1} - x_{i-n-1})x_{2n+2}]. \qquad (3.13)$$

Рассматривая полученные выражения, приходим к выводу, что производные непрерывны $f_{ix_j}(x,u) \in C(R^{2n+2} \times R^{n+1})$ $\forall i \in [n+2, 2n+1]$.

Рассмотрим $f_i(x,u)$ при $i = \{2n+2\}$. Учитывая, что

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n}(I_{i\text{ZV}} + m_i L_i^2(x)),\ L_i^2(x) = R_i^2 + r_i^2 + 2R_i \cdot r_i \cdot \cos(\beta_i - x_i),$$

зависит только от x_i $\forall i \in [1, n+1]$ и $C_i, N_i, k_i, P_i - const$, производные по x_j имеют вид:

— если $j \in [1, n]$, то

$$f_{2n+2,x_j}(x,u) = \left(\frac{1}{M(x)}\right)_{x_j} \cdot \Lambda(x,u) + \left(\frac{1}{M(x)}\right) \cdot (K_1(x,u)), \qquad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda(x,u) = (-x_{2n+2}^2 &\sum_{i=1}^{n} C_i \sin(\beta_i - x_i) - \\ &- 2x_{2n+2}\sum_{i=1}^{n} C_i \sin(\beta_i - x_i)x_{n+1+i} + u_{n+1} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} N_i \sin(\beta_i) + \sum_{i=1}^{n} P_i[R_i \sin(\beta_i) + r_i \sin x_i]),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_1(x,u) = (-x_{2n+2}^2 C_j \sin(\beta_j - x_j) + \\ + 2x_{2n+2}C_j \sin(\beta_j - x_j)x_{n+1+j} + P_j r_j \sin x_j));\end{aligned}$$

— если $j = \{n+1\}$, то

$$f_{ix_j}(x,u) = \left(\frac{1}{M(x)}\right)_{x_j} \Lambda(x,u) + \left(\frac{1}{M(x)}\right)(K_2(x,u)), \qquad (3.15)$$

где

$$K_2(x,u) = (-x_{2n+2}^2 \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(\beta_i - x_i) - \\ - 2x_{2n+2} \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(\beta_i - x_i) x_{n+1+i} + u_{n+1} + \\ + \sum_{i=1}^{n} N_i \cos(\beta_i) + \sum_{i=1}^{n} P_i [R_i \cos(\beta_i)));$$

— $j \in [n+2, 2n+1]$, то

$$f_{ix_j}(x,u) = \left(\frac{1}{M(x)}\right) (-2x_{2n+2} C_j \sin(x_{n+1} + \lambda(j-n-2) - x_{j-n-1})); \quad (3.16)$$

— если $j = \{2n+2\}$, то

$$f_{ix_j}(x,u) = \left(\frac{1}{M(x)}\right) (-x_{2n+2} \sum_{i=1}^{n} C_i \sin(\beta_i - x_i) - \\ - 2 \sum_{i=1}^{n} C_i \sin(\beta_i - x_i) x_{n+1+i}). \quad (3.17)$$

Поскольку всегда $M(x) > 0$, то полученные выражения показывают, что $f_{ix_j}(x,u) \in C(\mathbb{R}^{2n+2} \times \mathbb{R}^{n+1})$ при $i = \{2n+2\}$.

Поскольку функции

$$g_m : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2} \text{ и } g_k : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$$

$\forall\, m, k \in [n+2, 2n+2]$ линейны относительно x_m и x_k, то они непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x_m и x_k.

Очевидно, что множество допустимых управлений U_∂ включено в класс измеримых ограниченных функций на $[0,T]$, поскольку $U_\partial \subset L_2(0,T,\mathbb{R}^{n+1})$. Заметим, что дифференцируемости функций и отображений по t не требуется.

Поскольку отображения

$$L : \mathbb{R}^{2n+2} \times \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R}^{2n+2} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{2n+2}, \\ g_m : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2} \text{ и } g_k : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$$

непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x_j, то в задаче (3.1)—(3.5) необходимым условием оптимальности является принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями при закрепленном времени, доказанный и изложенный в [2].

Введем функцию Понтрягина в виде:

$$H(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda) = (p, f(x,u))_{R^{2n+2}} - \lambda L(x, \dot{x}). \quad (3.18)$$

и гамильтониан:

$$\Gamma(t,x,\dot{x},p,\lambda)=\sup_{u\in U} H(t,x,\dot{x},u,p,\lambda). \tag{3.19}$$

Перед тем как перейти к формулировке принципа максимума, напомним необходимые определения.

Определение 1. [4] Мера μ на X называется регулярной, если для любого множества $A\subset X$ существует μ-измеримое множество B такое, что $A\subset B$ и $\mu(A)=\mu(B)$.

Определение 2. [4] Функция $f\in L^1(U)$ имеет ограниченную вариацию на $U\subset\mathbb{R}^n$, если $sup\left\{\int\limits_U f div\varphi dx : \varphi\in C_c^1(U;\mathbb{R}^n), |\varphi|\leq 1\right\}<\infty$.

Теорема 1. *(Принцип максимума Понтрягина [2]): Пусть (x_*,u_*) — оптимальный процесс управления в задаче (3.1)—(3.5). Тогда существуют не равные одновременно нулю число $\lambda\geq 0$, векторы $l_0\in\mathbb{R}^{2n+2}$, $l_1\in\mathbb{R}^{2n+2}$, вектор-функция $p(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^{2n+2}$ и неотрицательные регулярные меры μ_k,μ_m, $m,k\in[n+2,2n+2]$ на $[0,T]$, сосредоточенные соответственно на множествах*

$$T_k=\{t\in[0,T]:g_k(x_*(t))=0\} \quad \text{и} \quad T_m=\{t\in[0,T]:g_m(x_*(t))=0\}$$

такие, что:

а) вектор-функция $p(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^{2n+2}$ является решением интегрального уравнения

$$p(t)=-h_1^{\prime *}(x_*(T))l_1+\int\limits_0^T H_x((\tau,x_*(\tau),u_*(\tau),p(\tau),\lambda)\,d\tau-$$
$$-\sum_{k=n+2}^{2n+2}\int\limits_t^T g_{kx}\,d\mu_k-\sum_{m=n+2}^{2n+2}\int\limits_t^T g_{mx}\,d\mu_m, \tag{3.20}$$

и удовлетворяет условию

$$p(0)=-h_0^{\prime *}(x_*(0))l_0; \tag{3.21}$$

б) почти при всех $t\in[0,T]$ выполняется равенство

$$\Gamma(t,x_*(t),\dot{x}_*(t),p(t),\lambda)=H(t,x_*(t),\dot{x}_*(t),x_*(t),p(t),\lambda). \tag{3.22}$$

Отметим,что функция $p(\cdot)$ из-за наличия фазовых ограничений и присутствия в уравнении (3.20) интегралов по мерам μ_k,μ_m может иметь разрывы. Однако она всегда является функцией ограниченной вариации, непрерывной слева, поскольку меры μ_k,μ_m — регулярны (по условию принципа максимума Понтрягина).

Применим сформулированный принцип максимума к задаче (3.1)—(3.5). Заметим при этом, что в уравнении (3.20) слагаемое $h_1^{\prime *}(x_*(T))l_1=0$ из-за предположения о свободном правом крае фазовых траекторий.

Условие (3.21) для задачи (3.1)—(3.5) имеет вид $p_i(0) = const\ \forall i \in [1, 2n+2]$. Рассмотрим производные функции

$$H(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda) = (p, f(x, u))_{\mathbb{R}^{2n+2}} - \lambda L(x, \dot{x})$$

для различных x_j и $j \in [1, 2n+2]$:

— если $j \in [1, n]$, то

$$H_{x_j} = p_{j=i-n-1} f^1_{jx_j}(x, u) + p_{2n+2} f^2_{2n+1,x_j}(x, u) - \lambda L_{x_j}, \tag{3.23}$$

где $f^1_{jx_j}(x, u)$ принимает вид (3.11), $f^2_{jx_j}(x, u)$ принимает вид (3.14), L_{x_j} принимает вид (3.6);

— если $j = \{n+1\}$, то

$$H_{x_j} = \sum_{i=n+2}^{2n+1} p_i f^1_{ix_j}(x, u) + p_{2n+2} f^2_{2n+2x_j}(x, u) - \lambda L_{x_j}; \tag{3.24}$$

где $f^1_{jx_j}(x, u)$ принимает вид (3.12), $f^2_{jx_j}(x, u)$ принимает вид (3.15), L_{x_j} принимает вид (3.7);

— если $j \in [n+2, 2n+1]$, то

$$H_{x_j} = p_{j=i-n-1} + p_{2n+2} f^2_{2n+2x_j}(x, u) - \lambda L_{x_j}, \tag{3.25}$$

где $f^2_{jx_j}(x, u)$ принимает вид (3.16),L_{x_j} принимает вид (3.8);

— если $j = \{2n+2\}$, то

$$H_{x_j} = p_{i=j-n-1} + \sum_{i=n+2}^{2n+1} p_i f^1_{ix_j}(x, u) + p_{2n+2} f^2_{2n+2x_j}(x, u) - \lambda L_{x_j}, \tag{3.26}$$

где $f^1_{jx_j}(x, u)$ принимает вид (3.13), $f^2_{jx_j}(x, u)$ принимает вид (3.17), L_{x_j} принимает вид (3.9).

Рассмотрим функции $g_m(x(t)) \leq 0, g_k(x(t)) \leq 0\ m, k \in [n+2, 2n+2]$. Их производные равны:

$$g_{mx_j}(x(t)) = g_{kx_j}(x(t)) = 0 \quad \forall\, m, k \neq j$$

и

$$g_{mx_j}(x(t)) = g_{kx_j}(x(t)) = 1 \quad \forall\, m, k = j.$$

Таким образом, уравнение (3.20) имеет вид:

— если $j \in [1, n]$, то

$$p_j(t) = \int\limits_t^T H_{x_j}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda)\, d\tau, \tag{3.27}$$

где $H_{x_j}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda)$ принимает вид (3.23);

— если $j = \{n+1\}$, то

$$p_j(t) = \int_t^T H_{x_j}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda)\, d\tau, \tag{3.28}$$

где $H_{x_j}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda)$ принимает вид (3.24);

— если $j \in [n+2, 2n+1]$, то

$$p_j(t) = \int_t^T H_{x_j}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda) d\tau - \int_t^T d\mu_{k=j} - \int_t^T d\mu_{m=j}, \tag{3.29}$$

где $H_{x_j}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda)$ принимает вид (3.25);

— если $j = \{2n+2\}$, то

$$p_j(t) = \int_t^T H_{x_j}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda)\, d\tau - \int_t^T d\mu_{k=j} - \int_t^T d\mu_{m=j}, \tag{3.30}$$

где $H_{x_j}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), p(\tau), \lambda)$ принимает вид (3.26).

Следует заметить, что, если решение (x_*, u_*) не выходит на ограничение, тогда $\mu_k, \mu_m = 0\ \forall m, k \in [n+2, 2n+2]$. Если решение выходит на границу в некоторой точке $\tau \in [0, T]$, тогда μ_k, μ_m — точечные меры Дирака. Если же решение выходит на границу на некотором множестве $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$,то

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\mu_k = \mu_k(\tau_1, \tau_2) \ \text{ и } \ \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\mu_m = \mu_m(\tau_1, \tau_2),\ \forall\, m, k \in [n+2, 2n+2].$$

Рассмотрим условие (3.25): из условия максимума функции H по $u \in R^{n+1}$ получим, что оптимальное управление удовлетворяет условиям:

$$u_j = \begin{cases} m_{max}, p_j(t) > 0, \\ m_{min}, p_j(t) < 0, \forall j \in [1, n+1]. \end{cases} \tag{3.31}$$

Таким образом, оптимальные процессы в задаче (3.1)–(3.5) должны удовлетворять уравнениям (3.26)–(3.30) и условиям (3.31).

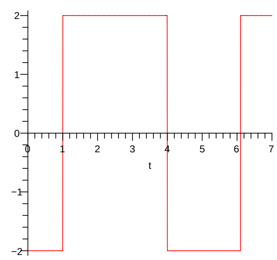
В качестве примера рассмотрим вибросистему вышеприведенной конструкции с двумя дебалансами $n = 2$. Будем рассматривать динамику системы на протяжении отрезка времени $[0, 2\pi]$. Массы дебалансов $m = m_1 = m_2 =$ 2 кг, массы звеньев водила $m_{zv} = m_{1zv} = m_{2zv} = 3$ кг, длина звеньев $R = R_1 = R_2 = 0,4$ м, эксцентриситеты дебалансов $r = r_1 = r_2 = 0,05$ м, предельно допустимые угловые скорости вращения дебалансов и водила в целом $\alpha_{max} = -\alpha_{min} = 15\, c^{-1}$, максимальные моменты вращения приводов дебалансов и водила в целом $m_{max} = -m_{min} = 2$ Нм.

Замечание 1. Поскольку в примере четное количество дебалансов, то подынтегральное выражение несколько упрощается из-за того, что возмущающие силы от вращения звеньев водила компенсируют друг друга.

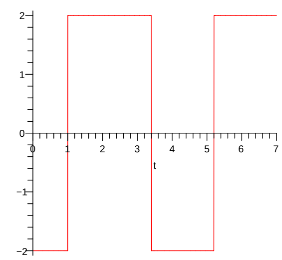
Таким образом, функционал (3.1) будет иметь вид:

$$B(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[2mR(x_6^2\cos x_3 + \dot{x}_6\sin x_3) +$$
$$+mr(x_4^2\cos x_1 + \dot{x}_4\sin x_1 + x_5^2\cos x_2 + \dot{x}_5\sin x_2)]dt.$$

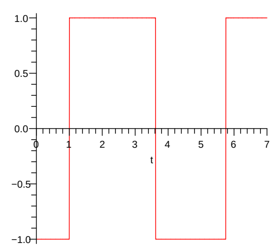
В результате численного моделирования задачи оптимизации получим, что искомые управления u_1, u_2, u_3 имеют вид, представленный на рисунке 2.



(a) Функция управления $u_1(t)$



(b) Функция управления $u_2(t)$



(c) Функция управления $u_3(t)$

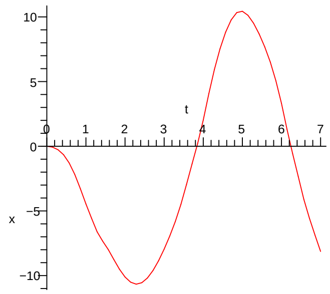
Рис. 2. Функции управления

При действии на валы дебалансов и водила найденных моментов вращения u_1, u_2, u_3 фазовые координаты $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ изменяются по кривым, показанным на рисунке 3.

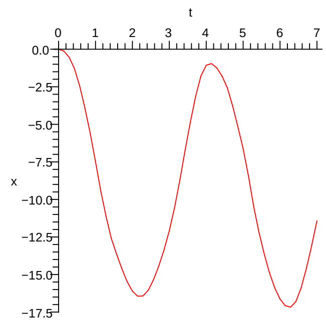
Таким образом, при найденной вектор-функции управления

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

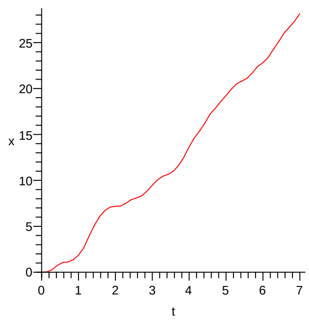
суммарная сила инерции при вращении дебалансов и водила имеет вид, представленный на рисунке 4.



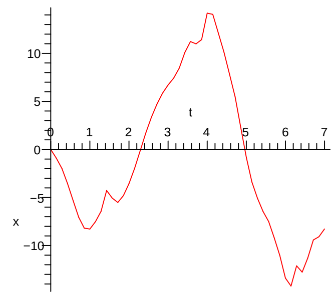
(a) Функция фазовой координаты $x_1(t)$



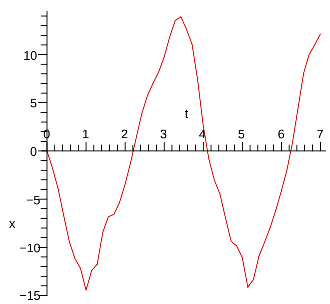
(b) Функция фазовой координаты $x_2(t)$



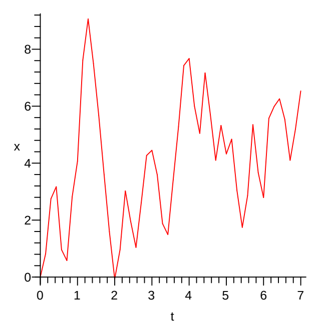
(c) Функция фазовой координаты $x_3(t)$



(d) Функция фазовой координаты $x_4(t)$



(e) Функция фазовой координаты $x_5(t)$



(f) Функция фазовой координаты $x_6(t)$

Рис. 3. Функции фазовых координат

Рассматривая кривую изменения суммарной возмущающей силы, приходим к выводу, что среднее ее значение на заданном промежутке времени отрицательно, но, как видно из рисунка 4, есть несколько отрезков времени, где $L(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) > 0$, т. е., нет эффекта увеличения веса машины на всем заданном промежутке времени. Таким образом, целесообразно перейти к новой постановке задачи оптимизации режима работы вибросистемы предложенной конструкции, с несколькими функционалами качества (задаче векторной оптимизации).

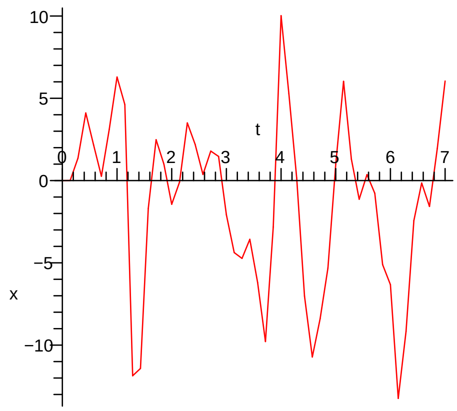


Рис. 4. Функция суммарной возмущающей силы $L(t)$

4. Выводы

Таким образом, в статье выведены необходимые условия оптимальности в задаче оптимизации работы механической вибросистемы, которая представляет собой задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями со скалярным функционалом качества.

Библиографические ссылки

1. *Богомаз В. Н.* Об одной задаче оптимизации механической вибросистемы // Питання прикладної математики та математичного моделювання, Зб. наук. пр.— Дніпропетровськ : ДНУ, 2010. — С. 16–32.
2. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач // М. : Наука, 1974. — С. 480.
3. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. // М. : Наука, 1981. — С. 400.
4. *Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф.* Теория меры и тонкие свойства функции // Новосибирск : Научная книга, 2002. — С. 207.

Надійшла до редакції 01.04.2010