

# NEDOCENENÝ ANDRÉ SAINTE-LAGUË

VLADIMÍR DANČIŠIN

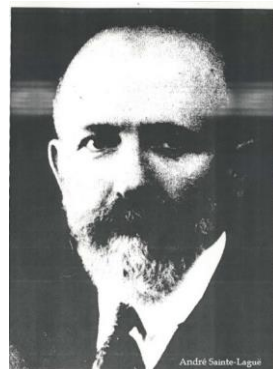
Inštitút politológie  
Filozofická fakulta  
Prešovská univerzita v Prešove  
Email: vladimir.dancisin@unipo.sk

## Abstract:

*French mathematician André Sainte-Laguë, a pioneer in the theory of graphs, is not very appreciated scientist. Article seeks to point out that there is an undeniable contribution of the Sainte-Laguë's works to the theory of apportionment and measurement of the disproportionality of an electoral outcome. Sainte-Laguë is one of the founders of the theoretical approach to the problem of distribution of the seats in party-list proportional representation systems. The article points out that Sainte-Laguë invented the method of equal proportions known as Huntington method.*

## Keywords:

*André Sainte-Laguë, Sainte-Laguë method, Huntington method, Apportionment*



Francúzsky matematik Jean André Sainte-Laguë (20. apríl 1882 – 18. január 1950), pionier teórie grafov, je vo vedeckej komunite neslávne známy svojím matematickým prepočtom demonštrujúcim nemožnosť čmeliaka lietať, ktorý urobil na neformálnom stretnutí

s priateľmi. Historka o jeho prepočte sa objavila v práci entomológa Antoine Magnana *Le Vol des Insectes* (Magnan, 1934). Sainte-Laguë prepočtom zistil, že krídla čmeliaka sú príliš malé na vytvorenie dostatočného vztlaku. Sainte-Laguë, podľa Michaela Dickinsona, svojím prepočtom ukázal, že maximálny možný vztlak vytvorený krídlami lietadla malého ako čmeliak a lietajúceho pomaly ako včela by bol oveľa menší ako váha včely (Dickinson, 2001). Sainte-Laguë si prepočet zjednodušil a predpokladal, že krídla čmeliaka sú hladké a rovné. Nebral do úvahy, že čmeliak natáča krídlo okolo jeho najdlhšej osi o pomerne veľký uhol. Uvedené zjednodušenie uľahčilo jeho prepočet, ale prirodzene viedlo k zlému záveru. Sainte-Laguë si určite uvedomoval, že čmeliak môže lietať, jeho prepočet demonštroval, že čmeliak by nemohol lietať, ak by sme brali do úvahy aerodynamickú teóriu aplikovanú na lietadlá s pevne pripevnenými krídlami. Sainte-Laguë svoj prepočet nikdy oficiálne nepublikoval. Napriek tomu sa stal ľahkým terčom kritikov vedy a vedeckých poznatkov zosmiešňujúcich vedcov s ironickými poznámkami o ich odrhnutí od reality. Neformálny prepočet výrazne prispel k dehonestácii jeho mena a jeho vedeckého prínosu<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Sainte-Laguëho meno patrí pravdepodobne aj k najviac komoleným. Priezvisko Sainte-Laguëho je možné nájsť v odbornej literatúre v rôznych skomo-

V politologickej literatúre venujúcej sa volebným systémom sa meno objavuje pomerne často. Jeho meno sa spája s metódou najväčších priemerov využívajúcou rad nepárnych čísiel, ktorú vo svojich prácach propagoval. V politologickej literatúre sa Sainte-Laguë spája sa spája aj s indexom merania disproporcčnosti (Sainte-Laguëho index), nad ktorým on sám neuvažoval, ale je odvodený aj jeho zdôvodnenia optimálnosti ním propagovanej metódy. Sainte-Laguë patrí medzi prvých, ktorí sa problémom prerozdelenia začali venovať z teoretického hľadiska. Sainte-Laguë zverejnil v roku 1910 prelomovú matematickú analýzu metód prepočítavania hlasov na mandáty. V dvoch štúdiách *La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés* (1910a) a *La représentation proportionnelle et les mathématiques* (1910b) svojou analýzou poukázal ako je možné nazerať na optimálnosť jednotlivých metód prerozdelenia mandátov. Uvedené štúdie patria jednoznačne k najprínosnejším a najinšpiratívnejším v rámci teórie prerozdelenia nedeliteľných vecí. Sainte-Laguë v nich uvažoval hlavne o metóde nepárnych čísiel a o metóde využívajúcej geometrický priemer.

Prínos Sainte-Laguëho sa nezvykne docenovať poukazovaním na to, že „len“ jednoducho modifikoval D'Hondtovu metódu (namiesto prirodzených čísiel využil nepárne čísla). Ďalším dôvodom nedocenenia je pravdepodobne aj to, že ním propagovaná metóda je výsledkom identická s Websterovou metódou (D. Webster propagoval svoju metódu už v roku 1832<sup>2</sup>), čím akoby Sainte-Laguëho prínos strácal na výnimočnosti. Článok má za cieľ poukázať na to, že minimálne pre teóriu viažucu sa na metódy prerozdelenia mandátov je Sainte-Laguë prínos nesporný. V článku sa pokúsime poukázať na to, že práve Sainte-Laguë bol prvý, kto prišiel so zdôvodnením metódy rovných proporcií, ktorá sa dnes používa v USA v rámci prerozdelenia

mandátov Komory reprezentantov a je známa ako Huntingtonova metóda.

### Sainte-Laguëho matematické zdôvodnenie optimálnej metódy prerozdelenia mandátov

Pri svojich úvahách sa Sainte-Laguë (1910b, s. 846) pýta, čo je vhodnejšie: aby každý volič mal rovnaký podiel na jednom mandáte (princíp rovnosti voličov), alebo aby každý mandát poslanca reprezentoval rovnaký počet voličov (princíp rovnosti mandátov)? A. Sainte-Laguë (1910b, s. 846) konštatoval, že ideálne by bolo, ak by obidva pohľady prinášali rovnaké výsledky. Avšak aj napriek tomu, že ide o veľmi podobné pohľady, optimálne naplnenie týchto princípov merané metódou najmenších štvorcov sú dosiahnuteľné dvoma odlišnými spôsobmi (metódou nepárnych čísiel a metódou rovných proporcií). A. Sainte-Laguë (1910a, 1910b) sa priklonil k prvej možnosti, pretože zvažil, že pre demokraciu je prijateľnejší *princíp rovnosti voličov* ako *rovnosti mandátov*. Zdôraznil však, že uprednostnenie jedného princípu pred druhým urobil na základe subjektívnych pocitov, nie na základe logických záverov (Sainte-Laguë, 1910b, s. 846).

Sainte-Laguë vo svojich štúdiách metódou najmenších štvorcov (metóda sa zvykne označovať za Pearsonov chi-kvadrát test) hľadal optimálnu metódu, ktorá minimalizuje celkovú nerovnosť prerozdelenia a ktorou bude možné dosiahnuť prerozdelenie, ktoré by minimalizovalo absolútne rozdiely vyjadrené vzorcom  $\sum h_i(m_i/h_i - M/H)^2$ , keďže pri optimálnom prerozdelení platí  $M/H = m_i/h_i$  pre každú stranu  $i$ . A. Sainte-Laguë konštatoval, že súčet štvorcov (druhých mocnín) deviácií pre všetkých voličov je možné vyjadriť aj ako  $\sum m_i^2/h_i - M^2/H$ , a ak chceme minimalizovať deviácie, musíme sa usilovať, aby  $\sum m_i^2/h_i$  bolo čo najmenšie, keďže  $M^2/H$  je konštanta (1910a, s. 531). K minimalizácii  $\sum m_i^2/h_i$  došiel A. Sainte-Laguë z matematicky všeobecne známej skutočnosti, že súčet prvých  $n$  nepárnych čísiel je rovný druhej mocnine počtu nepárnych čísiel, t. j.  $1 + 3 + 5 + \dots (2n-1) = n^2$ . A. Sainte-Laguë (1910b, s. 847) vysvetlil postupnosť čísiel takto:

leninách ako napr. Saint-Lague, Saint-Lague, St.-Lague, Ste. Laguë, Sainte-Laguë, Saint-Laguë, resp. St.-Laguë.

<sup>2</sup> Prejav D. Webstera o probléme prerozdelenia miest v Komore reprezentantov z apríla 1832 je možné nájsť v práci Josepha Storyho (1833). V tretej knihe v kapitole 9 „House of Representatives“ je uvedené aj zdôvodnenie D. Webstera, prečo je vhodné použiť ním propagovanú metódu prerozdelenia.

$$\begin{aligned}
 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\
 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\
 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \\
 1 + 3 + 5 + 7 + \dots (2n - 3) + (2n - 1) &= n^2
 \end{aligned}$$

Z uvedeného Sainte-Laguë odvodil postup, podľa ktorého minimálnu hodnotu  $\sum m_i^2/h_i$

dosiahneme v prípade, že vyberieme  $M$  najmenších hodnôt v tabuľke:

$1/h_a$	$3/h_a$	$5/h_a$	$(2n-1)/h_a$
$1/h_b$	$3/h_b$	$5/h_b$	$(2n-1)/h_b$
$1/h_c$	$3/h_c$	$5/h_c$	$(2n-1)/h_c$
...			

Keďže takýmto spôsobom dostaneme veľmi malé čísla, Sainte-Laguë upravil metódu tak, že počet hlasov jednotlivých strán vydělil radom

čísel (deliteľov) 1, 3, 5, 7 ... atď. a hľadal najväčšie čísla v tabuľke:

$h_a/1$	$h_a/3$	$h_a/5$	$h_a/(2n-1)$
$h_b/1$	$h_b/3$	$h_b/5$	$h_b/(2n-1)$
$h_c/1$	$h_c/3$	$h_c/5$	$h_c/(2n-1)$
...			

A. Sainte-Laguë definoval ním propagovanú metódu takto: Vydeľte počet hlasov jednotlivých strán nepárnyimi číslami 1, 3, 5, 7 atď. Vyberte najväčšie priemery až do momentu, keď ich počet korešponduje s počtom všetkých mandátov ( $M$ ). Strana  $A$  získa toľko mandátov, koľko priemerov bolo vybraných z jej série priemerov. Rovnako sa postupuje aj v prípade ďalších strán (Sainte-Laguë, 1910, s. 532 - 533).

Metóda je vo všeobecnosti neutrálna tak k malým, ako i k veľkým stranám. V prípade menších (mandátovo málopočetných) volebných obvodov môže Sainte-Laguëho metóda zvyhodňovať menšie, resp. stredne veľké strany. Nižšie uvedená tabuľka uvádza, ako by bolo prerozdelených päť mandátov medzi štyri strany podľa Sainte-Laguëho metódy:

Strana	$h_i$	$h_i/1$	$h_i/3$	$h_i/5$	$h_i/7$	Mandáty
A	150	150	50	30	21,4	1
B	220	220	73,3	44	31,4	1
C	410	410	136,6	82	58,6	2
D	90	90	30	18	12,9	1

Možno vidieť, že prostredníctvom tejto metódy by aj strana  $D$  získala jeden mandát, a to napriek tomu, že v porovnaní so stranou  $B$ , ktorá získala rovnako len jeden mandát, získala len 40,1 % hlasov strany  $B$ .

A. Sainte-Laguë (1910a, 1910b) sa svojím matematickým uvažovaním o koncepte nad-reprezentácie a podreprezentácie voličov jed-

notlivých strán vyjadrenej prostredníctvom odchýlok v reprezentácii (vyjadrenej vzorcom  $m_i/h_i - M/H$ ) dopracoval aj k D'Hondtovej metóde. Podľa A. Sainte-Laguëho (1910a, s. 530) v prípade, že sa usilujeme minimalizovať pozitívne odchýlky v uvedenom vzťahu, dôjdeme k D'Hondtovej metóde. Sainte-Laguë (1910a, s. 534-535) opísal metodiku výpočtu

takto: postupne, ako sú strane pridelované mandáty, odchýlky voličov strán sú  $1/h_i - M/H$ ,  $2/h_i - M/H$ ,  $3/h_i - M/H$  atď. Minimalizovať pozitívne odchýlky (nadreprezentáciu) dosiahneme postupným pridelovaním mandátov stranám, ktoré vykazujú najmenšie odchýl-

ky podľa vyššie uvedených vzorcov. Postup A. Sainte-Laguého je možné ilustrovať na príklade štyroch strán (410, 220, 150 a 90 hlasov), ktoré sa usilujú o päť mandátov. Celkový počet hlasov je 870 a pomer  $M/H$  je 0,005747.

Strana	$h_i$	$1/h_i - M/H$		$2/h_i - M/H$		$3/h_i - M/H$	
A	410	-0,00331	1.	-0,00087	2.	0,00157	5.
B	220	-0,0012	3.	0,003344		0,013636	
C	150	0,00092	4.	0,007586		0,02	
D	90	0,005364		0,016475		0,036641	

Mandáty sú postupne pridelované stranám s najmenšími odchýlkami. Výsledkom prerozdelenia je, že najviac nadreprezentovaná strana je strana, ktorá získa posledný mandát (V prípade, že by sme v uvedenom príklade rozdelili mandáty napr. Sainte-Laguého metódou (2, 1, 1, 1), odchýlka by sa zväčšila. Posledný mandát by získala strana D a jej nadreprezentácia by bola 0,005364). K rovnakým výsledkom by sme sa dostali aj výberom najväčších priemerov podľa vzorcov  $h_i/1$ ,  $h_i/2$ ,  $h_i/3$ ..., čo je metodika prepočtu D'Hondtovej metódy.

Variáciou Sainte-Laguého metódy je tzv. modifikovaná Sainte-Laguého metóda. Tu je

potrebné povedať, že Sainte-Laguë nikdy uvedenú metódu nepropagoval. Jej prvotný deliteľ nie je číslo jedna, ale 1,4. Táto zmena sťažuje stranám s malým volebným ziskom získať aspoň jeden mandát. Prejavuje sa to hlavne vo volebných obvodoch s menším počtom mandátov na prerozdelenie. Nasledujúca tabuľka naznačuje, ako by boli prerozdelené mandáty, keby sa prerozdelenie uskutočnilo prostredníctvom modifikovanej Sainte-Laguého metódy. V porovnaní so Sainte-Laguého metódou by strana D nezískala ani jeden mandát, čím sa len potvrdzuje, že táto metóda zvyhodňuje skôr strany so stredne veľkým a veľkým volebným ziskom:

Strana	$h_i$	$h_i/1,4$	$h_i/3$	$h_i/5$	$h_i/7$	Mandáty
A	150	107,1 (4.)	50	30	21,4	1
B	220	157,1 (2.)	73,3	44	31,4	1
C	410	292,9 (1.)	136,6 (3.)	82 (5.)	58,6	3
D	90	64,3	30	18	12,8	0

Pri malom počte prerozdelených mandátov sú výsledky modifikovanej Sainte-Laguého metódy a D'Hondtovej metódy väčšinou identické. Je to spôsobené tým, že rozdiel medzi nulou, prvým a druhým deliteľom v rade je v oboch prípadoch takmer identický. Rad deliteľov pri D'Hondtovej metóde môže byť transformovaný do podoby 1,5, 3, 4,5, 6 atď., čo je v prípade prvých dvoch deliteľov takmer identické s modifikovanou Sainte-Laguého metódou.

### Sainte-Laguë a Huntingtonova metóda

V USA sa pri prerozdelení mandátov v Komore reprezentantov od roku 1941 využíva metóda rovných proporcií, ktorú propagoval vo svojich prácach Edward V. Huntington. Ten bol pri svojom návrhu metódy ovplyvnený svojím priateľom Josephom A. Hillom, ktorý pracoval s ideou, aby sa žiadnym presunom mandátu medzi dvoma stranami neznížil relatívny rozdiel počtu voličov jednotlivých strán prepočítaný na jeden mandát. Huntington (1921a) dokázal, že takého prerozdelenie je možné a dosiahnuteľné nájdením adekvátneho volebného deliteľa, vypočítaním volebných

kvót strán a ich zaokrúhlením smerom nahor, resp. nadol podľa porovnania s geometrickým priemerom dolnej a hornej kvóty.

Huntington si uvedomoval, že hľadanie takéhoto volebného deliteľa metódou omyl – pokus nie je optimálne, a preto vo svojich prácach propagoval, aby sa mandáty jednotlivým štátom prerozdeľovali metodikou metód najväčších priemerov. Huntington navrhol, aby sa využíval rad deliteľov vypočítaný na základe vzorca  $\sqrt{n(n+1)}$ , pričom  $n = 0, 1, 2, 3$  atď. V číselnej podobe je rad deliteľov vyjadriteľný približne číslami 0, 1,414, 2,449, 3,464, 4,472, 5,477 atď. Mandáty by sa pridelovali postupne štátom, ktoré by získali najväčší priemer pri práve pridelovanom mandáte. Pri Huntingtonovej metóde je prvým deliteľom 0. V rebríčku najväčších priemerov sú výsledky delenia nulou uvedené ako prvé, čím sa docieli, že každá strana získa minimálne jeden mandát. E. V. Huntington použil na označenie ním preferovanej metódy dve pomenovania: metóda rovných proporcií (*method of equal proportions*, Huntington, 1921a, s. 123), resp. metóda geometrického priemeru (Huntington, 1921a, s. 125)<sup>1</sup>.

Menej známym faktom je, že jedenásť rokov skôr ako boli uverejnené Huntingtonové práce, Sainte-Laguë (1910a, s. 535 – 537 a 1910b, s. 848) uvažoval o metóde, ktorá prináša vždy identické výsledky ako má Huntingtonova metóda. Sainte-Laguë využitím metódy najmenších štvorcov dopracoval k metóde rovných proporcií, ktorá minimalizuje rozdiely vyjadrené vzorcom  $\sum m_i(H/M - h_i/m_i)^2$ . Uvedenú metódu však A. Sainte-Laguë považoval za menej vhodnú, pretože pri voľbách vnímal ako vhodnejšie sledovať, čo najmenšiu odchýlku podielov voličov na jeden mandát (vyjadrenú vzorcom  $\sum h_i(M/H - m_i/h_i)^2$ ). A. Sainte-Laguë

si uvedomoval, že metóda rovných proporcií je použiteľná len v prípade, že každá strana získa minimálne jeden mandát, čo je aj nedostatkom tejto metódy. Metóda pridelí jeden mandát aj strane, ktorá získa minimum hlasov, resp. žiadny hlas. Spôsobuje to delenie nulou<sup>2</sup>. Rad deliteľov metódy rovných proporcií A. Sainte-Laguë uviedol číslami 0, 2,828, 4,898, 6,928, 8,944 atď. Ide o ekvivalent radu čísel 0, 1,412, 2,449, 3,464, 4,472, 5,477 atď., t. j. rad čísel vypočítaný zo vzorca  $\sqrt{n(n+1)}$ , pričom  $n = 0, 1, 2, 3$  atď. A. Sainte-Laguë rad čísel vynásobil dvoma pravdepodobne preto, aby ukázal odlišnosť voči metóde nepárnych čísel, ktorú presadzoval. Výsledky však budú vždy rovnaké, či použijeme jeden, resp. druhý rad čísel. A. Sainte-Laguë rad čísel 0, 2,828, 4,898, 6,928, 8,944 atď. jemne modifikoval vo svojej štúdií (Sainte-Laguë, 1910b, s. 848), kde uvádza rad čísel začínajúci deliteľom jedna 1, 2,828, 4,898, 6,928, 8,944 atď. Uvedený rad je možné považovať za vhodnú alternatívu v prípade, že budeme uvažovať o metóde, ktorá nepridelí všetkým stranám minimálne jeden mandát. Tento rad deliteľov prinesie identické výsledky ako metóda rovných proporcií len v prípade, že každá strana získa minimálne jeden mandát. Uvedený rad čísel je uplatniteľný aj pre pomerné volebné systémy, a to preto lebo automaticky negarantuje získanie aspoň jedného mandátu všetkým stranám bez ohľadu na počet získaných hlasov.

Na záver je možné zhrnúť, že Sainte-Laguë je neprávom nedoceňovaný. Jeho práce z roku 1910 je bezpochyby možné považovať za prelomové v rozvíjaní teórie prerozdeľovania mandátov. Sainte-Laguë bol pionierom matematického prístupu k prerozdeľovania mandátov v listinnom pomernom volebnom systéme a vo svojich prácach ponúkol aj inšpiratívnu teoretickú bázu ako nazerať na problém pomerného prerozdeľovania nedeliteľných vecí. Sainte-Laguë predložil vo svojich štúdiách aj závery, s ktorými sa preslávil o viac ako desať rokov neskôr Huntington.

<sup>1</sup> Huntingtonovu metódu odporučila v roku 1929 aj štvorčlenná komisia pozostávajúca z troch matematikov Gilberta A. Bliss, Ernesta W. Browna a Luthera P. Eisenharta a biológa Raymonda Pearla. Členovia komisie vypracovali správu pre Kongres (Bliss, Brown, Eisenhart, Pearl, 1929), v ktorej konštatovali, že Huntingtonova metóda vytvára optimálne podmienky na čo najmenšie rozdiely medzi počtom obyvateľov v jednotlivých štátoch a počtom im pridelených mandátov a rovnako, že uvedená metóda – z ich pohľadu – je matematicky najneutrálnejšia k veľkým i malým štátom z piatich nimi posudzovaných metód.

<sup>2</sup> Využitie tejto metódy v rámci prerozdeľovania mandátov v USA medzi jednotlivé štáty nie je problematické, pretože Ústava USA vyžaduje, aby každý štát získal minimálne jedno kreslo (mandát).

**Literatúra:**

- DICKINSON, M.: Solving the Mystery of Insect Flight. *Scientific American*, roč. 284, č. 6 (Jún., 2001), s. 34 – 41.
- HUNTINGTON, E. V.: The Apportionment of Representatives in Congress. *Transactions of the American Mathematical Society*, roč. 30, č. 1 (Jan., 1928), s. 85 – 110.
- HUNTINGTON, E. V.: The Mathematical Theory of the Apportionment of Representatives. *Proceedings of the National Academy of Science of the USA*, roč. 7, č. 4 (1921a), s. 123 – 127.
- HUNTINGTON, E. V.: A New Method of Apportionment of Representatives. *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, roč. 17, č. 135 (Sep., 1921b), s. 859 – 870.
- HUNTINGTON, E. V.: Discussion: The Report of the National Academy of Sciences on Reapportionment. *Science*, roč. 69 (May 3, 1929), s. 471 – 473.
- HUNTINGTON, E. V.: The Role of Mathematics in Congressional Apportionment. *Sociometry*, roč. 4, č. 3 (Aug., 1941), s. 278 – 282.
- MAGNAN, A.: *Le vol des insectes. Locomotion chez les animaux*. Paris, Hermann 1934.
- OWENS, F.: On the Apportionment of Representatives. *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, roč. 17, č. 136 (Dec., 1921), s. 958 – 968.
- SAINTE-LAGUË, A.: La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, roč. 3, č. 27 (1910a), s. 529 – 542.
- SAINTE-LAGUË, A.: La représentation proportionnelle et les Mathématiques. *Revue Générale des Sciences pures et appliquées*, roč. 21 (1910b), s. 846 – 852.
- SAINTE-LAGUË, A.: Les réseaux (ou graphes). *Mémorial des sciences mathématiques*. Paris 1926.
- STORY, J.: *Commentaries on the Constitution of the United States; with a Preliminary Review of the Constitutional History of the Colonies and States, before the Adoption of the Constitution*. Boston, Hilliard, Gray, and Company & Cambridge, Brown, Shattuck, and Co. 1833.
- WEBSTER, D.: *Speeches and Forensic Arguments*. Zväzok II. Boston, Perkins & Marvin 1839.
- WILLCOX, W. F.: The Apportionment of Representatives. *Annual Address of the President*. *The American Economic Review*, roč. 6, č. 1 (Mar., 1916), s. 3 – 16.

Text je čiastkovým výstupom riešenia grantovej úlohy KEGA č. 073UK-4/2013 *Inovácia obsahu, metodiky vzdelávania a metód výskumu pre študijný program politológia na prvom a druhom stupni VŠ štúdia*