

# Cinemática inversa matricial del manipulador 5R Mitsubishi Movemaster RV-M1

## *Inverse Matrix Kinematics of the 5R Mitsubishi Movemaster RV-M1 Manipulator*

JAVIER ROLDÁN MCKINLEY\*

JOSÉ SOSA RODRÍGUEZ\*\*

EUGENIO YIME RODRÍGUEZ\*\*\*

JAMES DÍAZ GONZÁLEZ\*\*\*\*

### RESUMEN

La solución de la cinemática inversa del manipulador Movemaster RV-M1 se encuentra documentada por el método geométrico o de proyecciones del manipulador a los diferentes planos. Este método era tradicionalmente aconsejable en el caso de robots cinemáticamente desacoplados. El artículo presenta la solución de la cinemática inversa del manipulador RV-M1 mediante la técnica de la transformación inversa, en la cual no se requieren proyecciones de manipulador, ahorrando tiempo en el análisis. Los resultados fueron validados gráficamente y se compararon con resultados reportados en bibliografía existente a través del método geométrico.

**Palabras clave:** robótica, cinemática espacial, manipulador Mitsubishi, Movemaster, RV-M1.

### ABSTRACT

The solution of the inverse kinematics of the Movemaster RV-M1 manipulator is documented by the geometrical or projections method of the manipulator to different planes. This method was recommended for the case of cinematically uncoupled robots. The present article shows an inverse kinematics solution for the RV-M1 manipulator through an inverse transformation technique in which manipulator projections are not required, which saves time for the analysis. The results were graphically validated and geometrically compared with results reported in existing literature.

**Keywords:** Robotics, space kinematics, Mitsubishi manipulator, movemaster, RV-M1.

FECHA DE RECEPCIÓN: 17 DE MARZO DEL 2012 • FECHA DE APROBACIÓN: 12 DE OCTUBRE DEL 2012

\* Profesor del programa de Ingeniería Mecánica, Grupo DIMER, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: javierroldan@mail.uniatlantico.edu.co.

\*\* Profesor del programa de Ingeniería Mecánica, Grupo DIMER, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jlsosarodriguez@hotmail.com.

\*\*\* Profesor del Programa de Ingeniería Mecatrónica, Grupo GIMAT, Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena, Colombia. Correo electrónico: eyime@unitecnologica.edu.co.

\*\*\*\* Científico, BMT Designers and Planners Inc., Arlington, Estados Unidos. Correo electrónico: jjadigo@gmail.com.

## Introducción

Existen diversos métodos para solucionar la cinemática inversa de los manipuladores seriales de diferentes configuraciones, entre los cuales se destacan, por su generalidad, el método de la matriz inversa para la solución del PUMA (Paul et ál., 1981) y del manipulador general serial con seis articulaciones de rotación (Raghavan y Roth, 2003; Kucuk y Bingul, 2004); la aplicación de los métodos de continuación para encontrar las raíces de los polinomios resultantes (Nielsen y Roth, 1999, Wu, 2006 y Tari et ál., 2010); y el cambio de espacio (cartesiano tridimensional a esférico) para solucionar la cinemática inversa de los manipuladores seriales con articulaciones de rotación (Roldán-Mckinley et ál., 2007) y con combinaciones de articulaciones de rotación y pares prismáticos (Crane y Duffy, 2008). Se entiende por generalidad del método el hecho de obtener en la solución de la cinemática inversa un número de soluciones igual al número de configuraciones físicas que el robot puede alcanzar dentro de su espacio de trabajo (Crane y Duffy, 2008).

Otros métodos de solución de cinemática inversa de algunos manipuladores únicamente arrojan una solución de las posibles configuraciones, como aquellos basados en iteraciones (Uicker et ál., 1964; Buss y Kim, 2005) y hasta aquellos métodos que utilizan redes neuronales en la solución del problema de la cinemática inversa de algunos manipuladores (Koker et ál., 2004; Hasan et ál., 2006).

Por otra parte, dependiendo de la geometría del manipulador tridimensional, tal como el caso del manipulador Mitsubishi RV-M1, la cinemática inversa se puede resolver por proyecciones en planos de sus componentes mediante el método geométrico (Carvajal, 2000; Kumar et ál., 2011), convirtiendo así un problema tridimensional en un problema bidimensional cuya solución no integra la posición y orientación del efector final, aconsejable en el caso de robots con cinemática totalmente desacoplada (Jazar, 2007). En el presente artículo se presenta una aplicación del método de la inversa de la matriz de transformación para solucionar la cinemática inversa del manipulador Mitsubishi RV-M1, el robot más utilizado en la academia en la enseñanza de robótica a pesar de su limitada funcionalidad (Kumar, 2003; Hamilton, 2007). Los parámetros cinemáticos del manipulador se definen con el criterio de Crane y Duffy (2008), el cual presenta como diferencia con los parámetros Denavit-Hartenberg, la definición de los ángulos de articulación se hace en la primera articulación de rotación de cada elemento. Dentro de las ventajas del método presentado se resalta su facilidad de desarrollo de la solución, ya que

no se requiere elaborar tediosos diagramas bidimensionales, complementado con la facilidad de implementación en la programación por sus ventajas computacionales (Barrientos et ál., 2007), además de complementar diferentes conceptos de robótica que se pueden enseñar en los laboratorios a nivel de pregrado, posgrado y extensión.

## Parámetros cinemáticos

Se inicia con la definición de los parámetros cinemáticos del manipulador (Crane y Duffy, 2008), el cual está conformado por cinco elementos rígidos conectados por igual número de articulaciones de rotación en serie (figura 1). Para cada elemento del manipulador se definen seis parámetros cinemáticos: dos vectores, dos ángulos y dos distancias que ayudarán a definir la posición y orientación relativas de cada elemento del manipulador de cadena abierta.

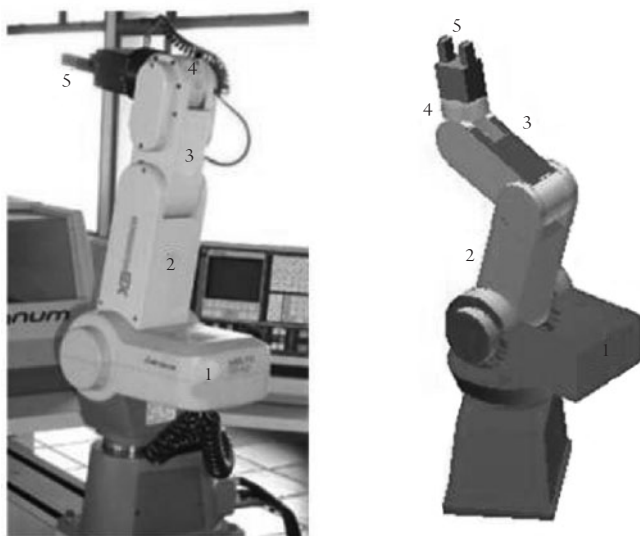


Figura 1. Cinco elementos del Mitsubishi RV-M1 considerando el sujetador

Fuente: elaboración propia.

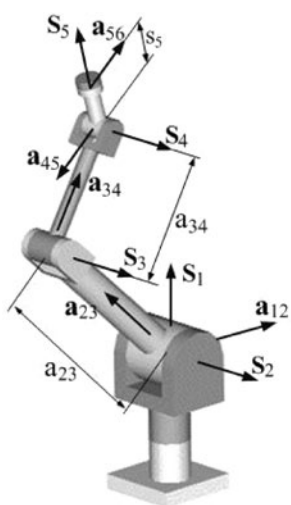
Las indicaciones para la definición de los parámetros del elemento  $i$  se presentan a continuación:

- Vector de articulación  $S_i$ ; en el caso de la articulación de rotación (R) es un vector unitario que define la rotación de la articulación siguiendo la regla de la mano dere-

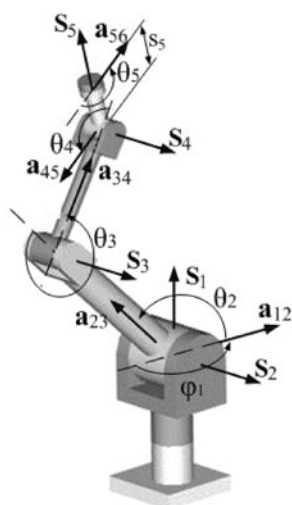
cha. En el caso de un par prismático es un vector en la dirección del movimiento de traslación del vector.

- Vector del elemento  $a_{ij}$ : es un vector unitario perpendicular a ambos vectores de articulación  $S_i$  y  $S_j$  sentido  $i-j$ .
- Distancia de articulación  $S_i$ : es la distancia que hay entre los vectores de elemento  $a_{hi}$  y  $a_{ij}$  y que se mide a lo largo del vector de articulación  $S_i$ .
- Distancia del elemento  $a_{ij}$ : es la distancia que hay entre los vectores de articulación  $S_i$  y  $S_j$  y que se mide a lo largo del vector del elemento  $a_{ij}$ .
- Ángulo de articulación  $\theta_i$ : es el ángulo medido mediante la regla de la mano derecha utilizando como base el vector de articulación  $S_j$  y que va del vector del elemento  $a_{hi}$  al vector del elemento  $a_{ij}$ .
- Ángulo del elemento  $a_{ij}$ : es el ángulo medido mediante la regla de la mano derecha, utilizando como base en vector del elemento  $a_{ij}$  y que va del vector  $S_i$  al vector  $S_j$ .

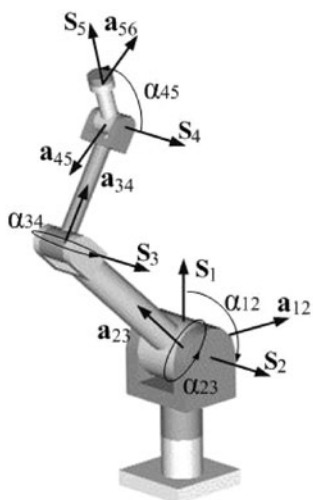
Los vectores de articulación y del elemento servirán para definir los sistemas coordenados asociados a cada elemento. El vector del elemento  $S_i$  definirá la dirección del eje  $z$  del sistema coordenado  $i, z_i$  asociado al elemento  $i$  del manipulador. La dirección del eje  $x_i$  es definido por el vector  $a_{ij}$  y para definir un sistema coordenado cartesiano dextrógiro, la dirección de eje  $y_i$  se encuentra por medio de  $(S_i \times a_{ij}) / |S_i \times a_{ij}|$ . La figura 2 presenta los parámetros cinemáticos y sistemas coordenados del RVM1. El subíndice  $F$  en el sistema coordenado fijo  $x_F, y_F, z_F$  en la figura 2d denota el elemento fijo a tierra o marco inercial. Los parámetros que no aparecen definidos en las figura 2 tienen valor cero. La tabla 1 presenta valores de los parámetros cinemáticos (Mitsubishi Electric Corporation, 1989) definidos en la figura 2, y tomados del manual de fabricante (figura 3). Aquellos parámetros variables, deben ser encontrados en el análisis de cinemática inversa.



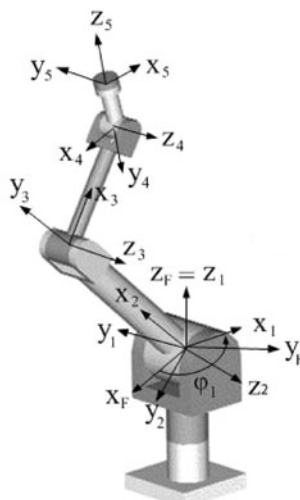
a) Distancia de junta y del elemento



b) Ángulos de junta



c) Ángulos de elementos



d) Ejes coordenados

Figura 2. Representación simplificada y parámetros del Mitsubishi RV-M1

Fuente: elaboración propia.

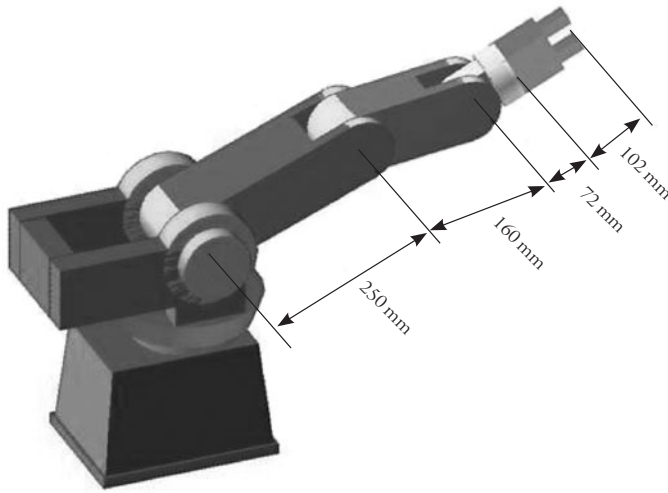


Figura 3. Dimensiones del manipulador Mitsubishi RV-M1

Fuente: elaboración propia.

Tabla 1. Parámetros cinemáticos del robot Mitsubishi RV-M1, tomados de Mitsubishi Electric Corporation, 1989

DISTANCIA DE LA ARTICULACIÓN [MM]	DISTANCIA DEL ELEMENTO [MM]	ÁNGULO DEL ELEMENTO [GRADOS]	ÁNGULO DE LA ARTICULACIÓN [GRADOS]
--	$a_{12} = 0$	$\alpha_{12} = 90$	$\phi_1 = *$
$S_2 = 0$	$a_{23} = 250$	$\alpha_{23} = 0$	$\theta_2 = *$
$S_3 = 0$	$a_{34} = 160$	$\alpha_{34} = 0$	$\theta_3 = *$
$S_4 = 0$	$a_{45} = 0$	$\alpha_{45} = 90$	$\theta_4 = *$
$S_5 = 72$	$a_{56} = 0$	--	$\theta_5 = *$

\* Variable por hallada en la cinemática inversa.

Fuente: elaboración propia.

Una vez definidos los parámetros cinemáticos se procede a establecer las matrices de transformación de los elementos del manipulador. Con base en la definición de parámetros empleada, la matriz de transformación que relaciona dos elementos consecutivos en un manipulador es Crane y Duffy (2008).

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} c_j & -s_j & 0 & a_{ij} \\ s_j c_{ij} & c_j c_{ij} & -s_{ij} & -s_{ij} S_j \\ s_j s_{ij} & c_j s_{ij} & c_{ij} & c_{ij} S_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Donde:

$s_j$  y  $c_j$  son el seno y el coseno del ángulo de la articulación  $\theta_j$ .

$s_{ij}$  y  $c_{ij}$  son el seno y el coseno del ángulo del elemento  $a_{ij}$ .

$a_{ij}$  es la distancia del elemento  $i$ .

$S_j$  es la distancia de la articulación del elemento  $j$ .

La posición y orientación del actuador es fácilmente especificada a través de las matrices de transformación (Crane y Duffy, 2008; Barrientos et ál., 2007). Considere una herramienta como elemento terminal o efector de un manipulador (figura 4) y los sistemas de referencia fijo  $x_F$ - $y_F$ - $z_F$  y de la herramienta  $x_H$ - $y_H$ - $z_H$ . La matriz de transformación que relaciona la posición y orientación de la herramienta viene dada por

$${}^F_H T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Donde la orientación se define por los vectores unitarios  $[r_{11} \ r_{21} \ r_{31}]^T$ ,  $[r_{12} \ r_{22} \ r_{32}]^T$  y  $[r_{13} \ r_{23} \ r_{33}]^T$ , y la posición de la herramienta viene dada por  $[P_x \ P_y \ P_z]^T$ .

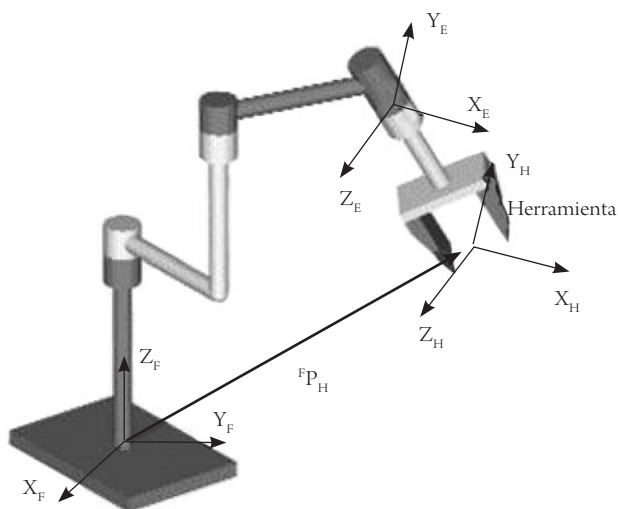


Figura 4. Sistemas coordenados de la herramienta y fijo de un manipulador serial

Fuente: elaboración propia.

## Cinemática inversa matricial del RV-M1

El planteamiento del problema se presenta a continuación.

Conocido: ángulos de elementos  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{45}$ ; distancias de elementos  $a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}$ ; distancias de las articulaciones  $S_2, S_3, S_4, S_5$ ; posición origen del sistema coordinado de la herramienta en el sistema fijo  ${}^F P_H = [P_x, P_y, P_z]^T$ ; orientación de la herramienta en el sistema fijo  ${}^F R = [r_{11} \ r_{12} \ r_{13}; r_{21} \ r_{22} \ r_{23}; r_{31} \ r_{32} \ r_{33}]$ .

Halle: ángulos de elemento  $\varphi_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ .

### Solución

La matriz de transformación que relaciona el sistema coordinado fijo con el de la herramienta (figura 2d), se obtiene mediante el producto matricial

$${}^F T_H = {}^F T_1 {}^1 T_2 {}^2 T_3 {}^3 T_4 {}^4 T_5 {}^5 T_H \quad (3)$$

Donde para el efector del Mitsubishi RV-M1 se relaciona la herramienta con el quinto sistema coordinado mediante ( $p_z = 107$  mm, figura 3).

$${}^5 T_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Donde en el lado derecho de la ecuación 3,  ${}^F T_1$  es una rotación de un ángulo  $\varphi_1$  alrededor del eje  $z$ , y los términos  ${}^i T$  viene dados por la ecuación 1. El lado izquierdo de la ecuación 3 se obtiene substituyendo en la ecuación 2 con la información numérica de la posición y la orientación de la herramienta en el sistema fijo para obtener la ecuación 5,

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi c_{2+3+4} c_5 + s_\varphi s_5 & -c_\varphi c_{2+3+4} s_5 + s_\varphi c_5 & c_\varphi s_{2+3+4} & \delta_1 \\ s_\varphi c_{2+3+4} c_5 - c_\varphi s_5 & -s_\varphi c_{2+3+4} s_5 - c_\varphi c_5 & s_\varphi s_{2+3+4} & \delta_2 \\ s_{2+3+4} c_5 & -s_{2+3+4} s_5 & -c_{2+3+4} & \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$



Donde:

$$c_{\varphi} = \cos(\varphi_1).$$

$$s_{\varphi} = \sin(\varphi_1).$$

$$c_{2+3+\dots} = \cos(\theta_2 + \theta_3 + \dots).$$

$$s_{2+3+\dots} = \sin(\theta_2 + \theta_3 + \dots).$$

$$\delta_1 = c_{\varphi} s_{2+3+4} P_z + c_{\varphi} s_{2+3+4} S_5 + c_{\varphi} c_{2+3} a_{34} + c_{\varphi} c_2 a_{23} \quad (6)$$

$$\delta_2 = -s_{\varphi} s_{2+3+4} P_z + s_{\varphi} s_{2+3+4} S_5 + s_{\varphi} c_{2+3} a_{34} + s_{\varphi} c_2 a_{23} \quad (7)$$

$$\delta_3 = -c_{2+3+4} P_z - c_{2+3+4} S_5 + s_{2+3} a_{34} + s_2 a_{23} \quad (8)$$

El método de la matriz inversa (Raghavan y Roth, 1993; Kucuk y Bingul, 2004; Jazar, 2007) consiste en premultiplicar la ecuación 5 a ambos lados por la inversa de la matriz de transformación que se encuentra más a la izquierda del lado derecho de la misma ecuación, siguiendo el orden de las transformaciones homogéneas que se utilizaron para construir la ecuación 5 a partir de la ecuación 3, y en cada expresión matricial resultante ir hallando uno o más ángulos de articulaciones dependiendo de la geometría. El método también permite crear un sistema de ecuaciones lo cual no siempre es recomendable dada la no linealidad de las ecuaciones escalares resultantes (Paul et ál., 1981; Jazar, 2007).

### Ángulo $\varphi_1$

Se premultiplica la ecuación 5 a ambos lados por  $\left[ {}^F_1T \right]^{-1} = {}^1_F T$  para obtener la expresión matricial

$${}^1_F T {}^F_H T = {}^1_2 T {}^2_3 T {}^3_4 T {}^4_5 T {}^5_H T \quad (9)$$

cuyos términos son:

$$\begin{bmatrix} r_{11}c_{\varphi} + r_{21}s_{\varphi} & r_{12}c_{\varphi} + r_{22}s_{\varphi} & r_{13}c_{\varphi} + r_{23}s_{\varphi} & r_{14}c_{\varphi} + r_{24}s_{\varphi} \\ -r_{11}s_{\varphi} + r_{21}c_{\varphi} & -r_{12}s_{\varphi} + r_{22}c_{\varphi} & -r_{13}s_{\varphi} + r_{23}c_{\varphi} & -r_{14}s_{\varphi} + r_{24}c_{\varphi} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{2+3+4}c_5 & -c_{2+3+4}s_5 & s_{2+3+4} & a_{23}c_2 + a_{34}c_{2+3} + (S_5 + p_z)s_{2+3+4} \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ s_{2+3+4}c_5 & -s_{2+3+4}s_5 & -c_{2+3+4} & a_{23}s_2 + a_{34}s_{2+3} - (S_5 + p_z)c_{2+3+4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Por comparación de términos a ambos lados de la ecuación 10 se identifica que el término (2,3) permite establecer la relación

$$\frac{s_{\varphi}}{c_{\varphi}} = \frac{r_{23}}{r_{13}} \quad (11)$$

con la cual se puede hallar el primer ángulo de articulación  $\varphi$  mediante (Jazar, 2007)

$$\varphi_1 = \text{atan2}(r_{23}, r_{13}) \quad (12)$$

y en el caso que  $\text{abs}(r_{33}) = 1$ , entonces, se emplearía el término (2,4) de la ecuación 10 y se obtendría otra posible expresión para el ángulo  $\varphi_1$

$$\varphi_1 = \text{atan2}(r_{24}, r_{14}) \quad (13)$$

Ángulo  $\theta_5$

Se sigue con la premultiplicación a ambos lados de la ecuación 9 por  $\left[ \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix} T \right]^{-1} = \begin{smallmatrix} 2 & \\ & 1 \end{smallmatrix} T$  para obtener la expresión matricial

$$\begin{smallmatrix} 2 & \\ & 1 \end{smallmatrix} T \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix} T \begin{smallmatrix} F & \\ & H \end{smallmatrix} T = \begin{smallmatrix} 2 & \\ & 3 \end{smallmatrix} T \begin{smallmatrix} 3 & \\ & 4 \end{smallmatrix} T \begin{smallmatrix} 4 & \\ & 5 \end{smallmatrix} T \begin{smallmatrix} 5 & \\ & H \end{smallmatrix} T \quad (14)$$

cuyos términos son:

$$\begin{bmatrix} c_2(r_{11}c_\varphi + r_{21}s_\varphi) + r_{31}s_2 & c_2(r_{12}c_\varphi + r_{22}s_\varphi) + r_{32}s_2 & \delta_4 & \delta_7 \\ s_2(-r_{11}c_\varphi - r_{21}s_\varphi) + r_{31}c_2 & s_2(-r_{12}c_\varphi - r_{22}s_\varphi) + r_{32}c_2 & \delta_5 & \delta_8 \\ r_{11}s_\varphi - r_{21}c_\varphi & r_{12}s_\varphi - r_{22}c_\varphi & \delta_6 & \delta_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{3+4}c_5 & -c_{3+4}s_5 & s_{3+4} & a_{23} + a_{34}c_3 + (S_5 + p_z)s_{3+4} \\ s_{3+4}c_5 & -s_{3+4}s_5 & -c_{3+4} & a_{34}s_3 - (S_5 + p_z)c_{3+4} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde:

$$\delta_4 = c_2(r_{13}c_\varphi + r_{23}s_\varphi) + r_{33}s_2 \quad (16)$$

$$\delta_5 = s_2(-r_{13}c_\varphi - r_{23}s_\varphi) + r_{33}c_2 \quad (17)$$

$$\delta_6 = r_{13}s_\varphi - r_{23}c_\varphi \quad (18)$$

$$\delta_7 = c_2(r_{14}c_\varphi + r_{24}s_\varphi) + r_{34}s_2 \quad (19)$$

$$\delta_8 = s_2(-r_{14}c_\varphi - r_{24}s_\varphi) + r_{34}c_2 \quad (20)$$

$$\delta_9 = r_{14}s_\varphi - r_{24}c_\varphi \quad (21)$$

Puesto que ya se conoce el ángulo  $\varphi$ , es posible utilizar las componentes (3,1) y (3,2) de la ecuación 15 para las expresiones del seno y coseno del ángulo  $\theta_5$  para obtener un único ángulo:

$$\theta_5 = \text{atan2}(r_{11}s_\varphi - r_{21}c_\varphi, r_{12}s_\varphi - r_{22}c_\varphi) \quad (22)$$

Ángulo  $\theta_2$

Se identifica que debido a la geometría del manipulador existirán dos posibles valores para el ángulo  $\theta_2$  para una misma posición y orientación del efector final, por lo cual se buscará la creación de una ecuación trigonométrica trascendental de la forma  $Pc_2 + Qs_2 + R = 0$  (Crane y Duffy, 2008; Jazar, 2007).

Donde P, Q y R son constantes. Se identifica que la componente (1,4) de la ecuación 15 presenta los términos  $c_2$  y  $s_2$ , igualando términos y agrupando se tiene:

$$(r_{14}c_\varphi + r_{24}s_\varphi)c_2 + r_{34}s_2 = a_{23} + a_{34}c_3 + (S_5 + p_z)s_{3+4} \quad (23)$$

El término  $s_{3+4}$  en la ecuación 23 no se conoce aún y se halla igualando las componentes (1,3) de la ecuación 15.

$$s_{3+4} = c_2(r_{13}c_\varphi + r_{23}s_\varphi) + r_{33}s_2 \quad (24)$$

Al sustituir la ecuación 24 en la ecuación 23, se obtiene la ecuación trascendental

$$Pc_2 + Qs_2 + R = 0 \quad (25)$$

Donde:

$$P = (S_5 + p_z)(r_{13}c_\varphi + r_{23}s_\varphi) - (r_{14}c_\varphi + r_{24}s_\varphi) \quad (26)$$

$$Q = (S_5 + p_z)r_{33} - r_{34} \quad (27)$$

$$R = a_{23} + a_{34}c_3 \quad (28)$$

Se debe ahora encontrar el término  $c_3$  en la ecuación 23. Para ello se igualan las componentes (1,4) y (3,2) de la ecuación 10, y se reagrupan para obtener:

$$a_{23}c_2 + a_{34}c_{2+3} = A \quad (29)$$

$$a_{23}s_2 + a_{34}s_{2+3} = B \quad (30)$$

donde:

$$A = r_{14}c_\varphi + r_{24}s_\varphi - (S_5 + p_z)c_{2+3+4} \quad (31)$$

$$B = r_{34} + (S_5 + p_z)c_{2+3+4} \quad (32)$$

donde:

$s_{2+3+4}$  y  $c_{2+3+4}$  se hallan al comparar los términos (1,3) y (3,3) de la ecuación 10

$$s_{2+3+4} = r_{13}c_\varphi + r_{23}s_\varphi \quad (33)$$

$$c_{2+3+4} = -r_{13} \quad (34)$$

Se elevan al cuadrado ambos lados de las ecuaciones 29 y 30, se suman términos y al tener en cuenta que  $c_2c_{2+3} + s_2s_{2+3} = c_3$ , se obtiene la expresión para  $c_3$ :

$$c_3 = \frac{A^2 + B^2 - a_{23}^2 - a_{34}^2}{2a_{23}a_{34}} \quad (35)$$

Se conocen ahora todos los términos en la ecuación 25 y se pueden hallar finalmente los dos valores del ángulo  $\theta_2$  resolviendo esa ecuación trigonométrica trascendental (Crane y Duffy, 2008 y Jazar, 2007) para obtener:

$$\theta_2 = \text{atan2} \left( \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) \pm \cos^{-1} \left( \frac{-R}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right) \quad (36)$$

Ángulo  $\theta_3$

Se igualan las componentes (3,4) de la ecuación 10 y se expande  $s_{2+3}$  para obtener:

$$s_3 = \frac{r_{34} + (S_5 + p_z)c_{2+3+4} - a_{23}s_2 - a_{34}s_2c_3}{a_{34}c_2} \quad (37)$$

donde el término  $c_{2+3+4}$  se encontró en la ecuación 34, el término  $c_3$  (un solo valor de  $c_3$  puede satisfacer dos valores diferentes del ángulo de posición  $\theta_3$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ ) fue hallado en la ecuación 35 y  $s_2$  es hallado de los valores arrojados por la ecuación 36, por lo cual, para cada caso se puede hallar un único valor del ángulo de posición  $\theta_3$  mediante

$$\theta_3 = \text{atan2} \left( \frac{r_{34} + (S_5 + p_z)c_{2+3+4} - a_{23}s_2 - a_{34}s_2c_3}{a_{34}c_2}, \frac{A^2 + B^2 - a_{23}^2 - a_{34}^2}{2a_{23}a_{23}} \right) \quad (38)$$

Ángulo  $\theta_4$

Se multiplica la ecuación 14 por  $\left[ \begin{smallmatrix} 2T \\ 3T \end{smallmatrix} \right]^{-1} = \begin{smallmatrix} 3T \\ 2T \end{smallmatrix}$  para generar

$$\begin{smallmatrix} 3T \\ 2T \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2T \\ 1T \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1T \\ F \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} F \\ HT \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 3T \\ 4T \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 4T \\ 5T \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 5T \\ HT \end{smallmatrix} \quad (39)$$

cuyos términos son

$$\begin{bmatrix} c_{2+3}(r_{11}c_\varphi + r_{21}s_\varphi) + r_{31}s_{2+3} & c_{2+3}(r_{12}c_\varphi + r_{22}s_\varphi) + r_{32}s_{2+3} & \delta_{10} & \delta_{13} \\ s_{2+3}(-r_{11}c_\varphi - r_{21}s_\varphi) + r_{31}c_{2+3} & s_{2+3}(-r_{12}c_\varphi - r_{22}s_\varphi) + r_{32}c_{2+3} & \delta_{11} & \delta_{14} \\ r_{11}s_\varphi - r_{21}c_\varphi & r_{12}s_\varphi - r_{22}c_\varphi & \delta_{12} & \delta_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} c_4c_5 & -c_4s_5 & s_4 & a_{34} + s_4(S_5 + p_z) \\ s_4c_5 & -s_4s_5 & -c_4 & -c_4(S_5 + p_z) \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{10} = c_{2+3} (r_{13}c_\varphi + r_{23}s_\varphi) + r_{33}s_{2+3} \quad (41)$$

$$\delta_{11} = s_{2+3} \left( -r_{13} c_{\varphi} - r_{23} s_{\varphi} \right) + r_{33} c_{2+3} \quad (42)$$

$$\delta_{12} = r_{13} s_{\varphi} - r_{23} c_{\varphi} \quad (43)$$

$$\delta_{13} = c_{2+3} \left( r_{14} c_{\varphi} + r_{24} s_{\varphi} \right) + r_{34} s_{2+3} - a_{23} c_3 \quad (44)$$

$$\delta_{14} = s_{2+3} \left( -r_{14} c_{\varphi} - r_{24} s_{\varphi} \right) + r_{34} c_{2+3} + a_{23} s_3 \quad (45)$$

$$\delta_{15} = r_{14} s_{\varphi} - r_{24} c_{\varphi} \quad (46)$$

De los términos (1,4) y (2,4) de la ecuación 40 se obtienen las expresiones para el seno y el coseno del ángulo  $\theta_4$

$$s_4 = \frac{c_{2+3} \left( r_{14} c_{\varphi} + r_{24} s_{\varphi} \right) + r_{34} s_{2+3} - a_{23} c_3 - a_{34}}{S_5 + p_z} \quad (47)$$

$$c_4 = \frac{s_{2+3} \left( r_{14} c_{\varphi} + r_{24} s_{\varphi} \right) - r_{34} c_{2+3} - a_{23} s_3}{S_5 + p_z} \quad (48)$$

Se conocen así todos los términos de las ecuaciones 47 y 48 por lo cual se puede hallar un ángulo  $\theta_4$  para cada valor de  $\theta_2$  y  $\theta_3$  mediante

$$\theta_4 = \text{atan2}(s_4, c_4) \quad (49)$$

La figura 5 muestra el árbol de solución del proceso de cinemática inversa presentado para el manipulador RV-M1, el cual ilustra el orden en el cual son obtenidos los ángulos de las articulaciones con el método de solución presentado.

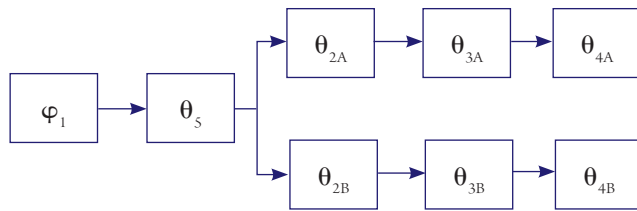


Figura 5. Árbol de solución del RV-M1

Fuente: elaboración propia.

## Resultados

### Visualización de resultados

La posición y orientación del efector final de un Mitsubishi RV-M1 están dadas por la matriz de transformación (la posición está en mm)

$${}^F_H T = \begin{bmatrix} 0,3592 & 0,46755 & 0,8077 & 288,05 \\ -0,6494 & -0,49635 & 0,57612 & 205,47 \\ 0,67026 & -0,73146 & 0,12533 & 343,26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Empleando la metodología de cálculo propuesta, y con los valores de los parámetros cinemáticos de la tabla 1, se obtienen las soluciones en la tabla 2. La verificación gráfica de resultados se presenta en la figura 6, y la matriz de transformación de la cinemática directa para cada solución coincide con la dada en la ecuación 50. La configuración A se muestra por completitud del reporte pero las limitaciones de construcción del robot real solo permiten alcanzar la configuración B.

Tabla 2. Resultados de cinemática inversa

ÁNGULO DE ARTICULACIÓN	$\phi_1$ [°]	$\theta_2$ [°]	$\theta_3$ [°]	$\theta_4$ [°]	$\theta_5$ [°]
Solución A (imposible físicamente)	35,5	40,238	55	1,962	47,5
Solución B	35,5	82,2	-55	70	47,5

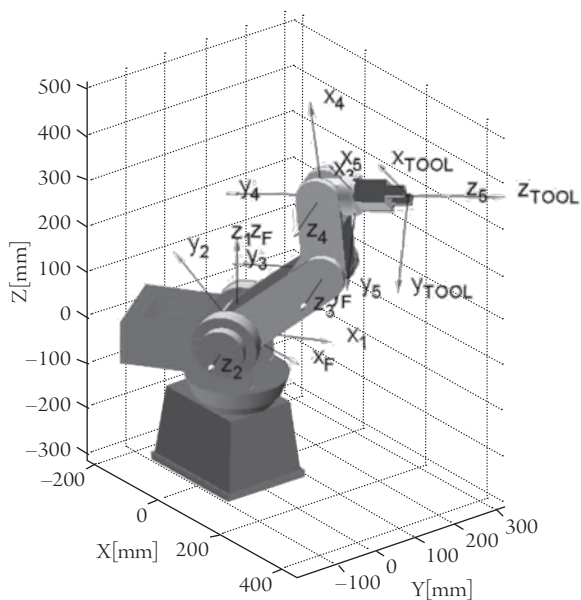
Fuente: elaboración propia.



---

Configuración A

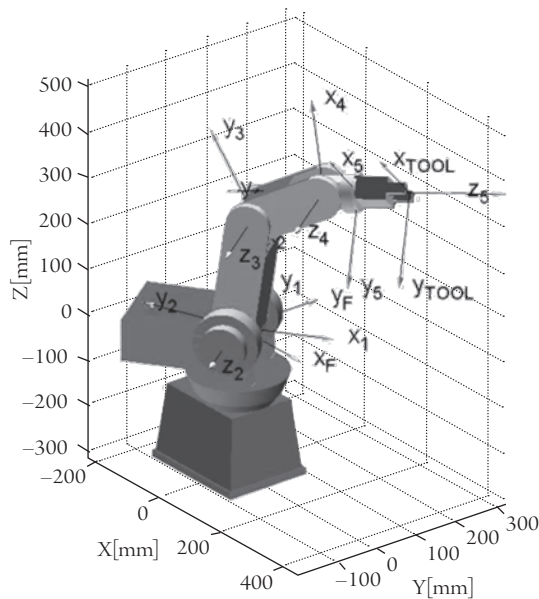
---



---

Configuración B

---



---

Figura 6. Configuraciones A y B correspondientes a las soluciones de la tabla 2

Fuente: elaboración propia.

## Comparación de resultados

En esta sección se comparan los resultados —obtenidos con la metodología aquí propuesta— con aquellos documentados por Kumar et ál. (2011) por el método geométrico y mostrados en la figura 4b de esa referencia. Los valores de los parámetros cinemáticos constantes están dados en la tabla 1 y se debe tener en cuenta que dado que Kumar et ál (2011) utilizaron los parámetros Denavit-Hartenberg —aquí se utilizan los parámetros de Crane y Duffy—, el ángulo de articulación  $\theta_4$  debe ser corregido a  $\theta_4 + \pi/2$ . Los valores de posición y orientación con respecto al marco de referencia fijo utilizados en el ejemplo en Kumar et ál. (2011) están dados en la tabla 3.

Tabla 3. Posición y orientación para cinemática inversa en Kumar et ál. (2011)

POSICIÓN [MM]			ORIENTACIÓN [RAD]		
x	y	z	yaw	pitch	Roll
0	289	36,6	0	-1,57	0

Fuente: elaboración propia.

Teniendo en cuenta que la ubicación del marco de referencia fijo, utilizado en este reporte, también difiere con la del marco fijo definido en Kumar et ál (2011), el ajuste de coordenadas se hace a través de dos sucesivas transformaciones, una rotación alrededor del eje  $z_F$  de  $90^\circ$ , seguida de una traslación de 152 mm a lo largo del eje  $z_F$ . Con esas consideraciones, la programación arroja los valores de cinemática inversa mostrados en la tabla 4. Se observa cómo los valores obtenidos, correspondientes al conjunto de soluciones B, coinciden aceptablemente con los resultados de Kumar et ál (2011). La figura 7 presenta la configuración del robot para la solución B, el conjunto solución A no se grafica puesto que presenta interferencia entre sus elementos, dado que el ángulo de articulación  $\theta_{3A}$  está fuera de los límites físicos,  $-110^\circ \leq \theta_3 \leq 0^\circ$ , de acuerdo con la nomenclatura Denavit-Hartenberg (Mitsubishi Electric Corporation, 1989; Goyal y Sethu, 2010).

Tabla 4. Comparación de valores de cinemática inversa

MODELO	$\Phi_1$ [°]	$\Theta_2$ [°]	$\Theta_3$ [°]	$\Theta_4$ [°]	$\Theta_5$ [°]
Kumar et ál. (2011)	0	44,69	-89,95	-44,12	0
Obtenido Solución A	0	-20,24	90,00	-69,76	0
Obtenido Solución B	0	45,00	-90,00	45,00	0

Fuente: elaboración propia.

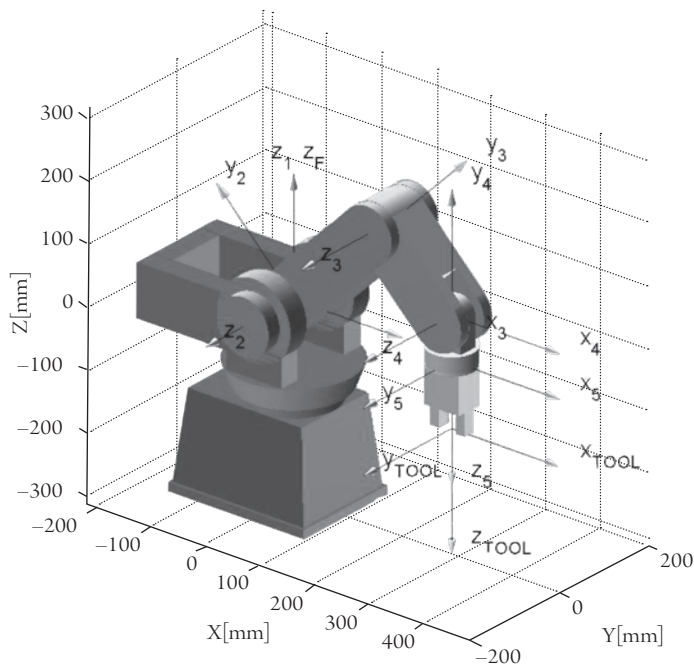


Figura 7. Configuración B de la tabla 4

Fuente: elaboración propia.

### ***Validación de resultados y error incurrido en el método matricial presentado***

Considere una tarea cinemática (tipo soldadura, por ejemplo) en la cual el efector final debe describir una línea recta que corresponda a las especificaciones de posición para  $x$ ,  $y$ , y  $z$  dadas en la figura 8a, donde la orientación de la muñeca tiene los valores fijos de 0 grados, 75 °C y 45 °C vistos en el marco fijo para los ángulos de guiñada, cabeceo y alabeo (*yaw-pitch-roll*), respectivamente, y la trayectoria se ha dividido en cien posiciones, empleando la rutina presentada el mismo número de veces. La figura 8b muestra los resultados correspondientes a los ángulos de orientación obtenidos.

Para la validación gráfica se utilizó Matlab para generar una animación de 6 s de duración con las cien posiciones (cien frames), verificando así que el efector final describía satisfactoriamente la trayectoria correspondiente a la tarea cinemática. La figura 9 presenta cuatro de esas posiciones: posiciones 1 (primera), 40, 70 y 100 (última).

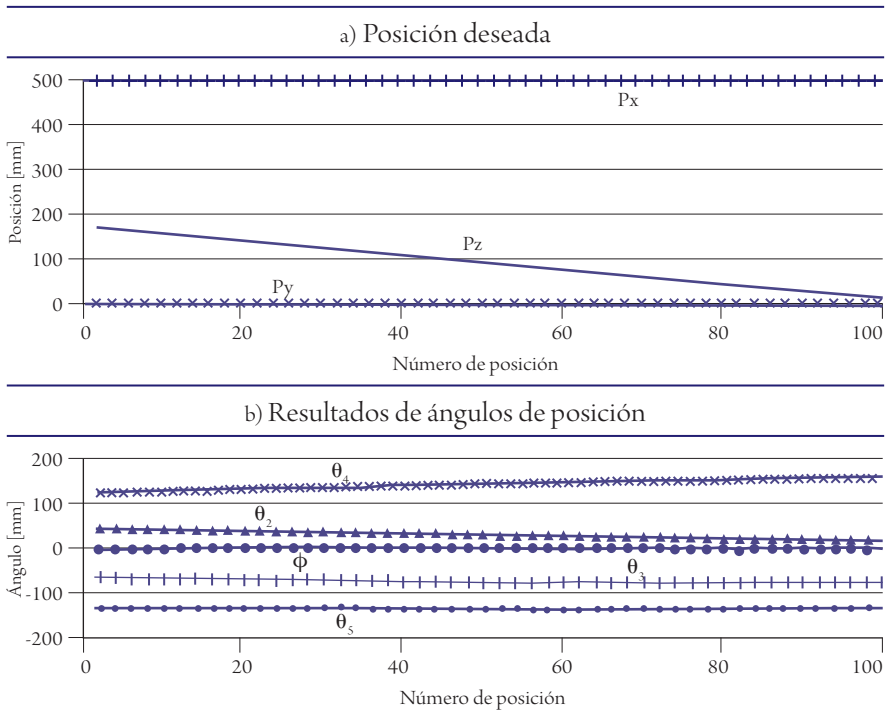
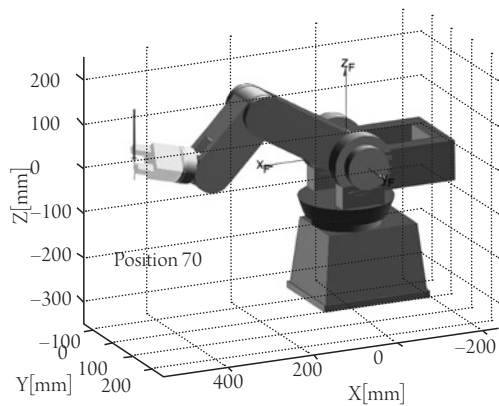
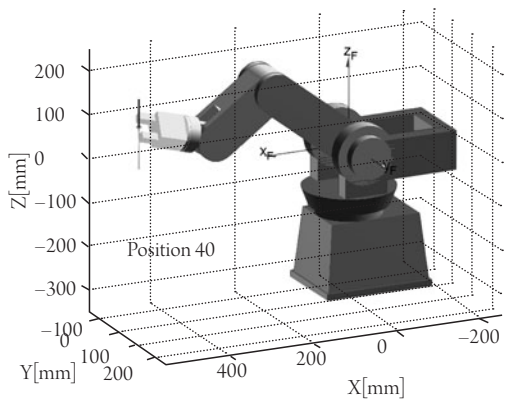
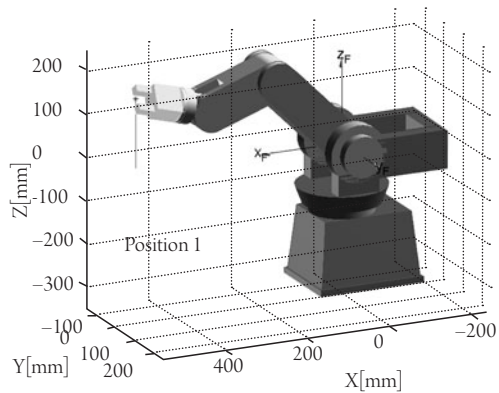


Figura 8. a) Posición deseada y b) Resultados de ángulos de posición

Fuente: elaboración propia.

Con los ángulos calculados en la cinemática inversa se calcularon las posiciones y orientaciones reales de la herramienta. En cuanto al error incurrido en el empleo del método matricial, no hubo error en la orientación. Sin embargo, al restar las componentes originales de la trayectoria con las obtenidas de la cinemática directa con los ángulos calculados, se obtuvieron errores, aunque muy pequeños, y son mostrados en la figura 10. Para la trayectoria de la tarea cinemática seleccionada se encontraron errores máximos de  $1,1369 \times 10^{-12}$  mm, 0 mm, y  $3,2685 \times 10^{-12}$  mm, para las posiciones de la herramienta en  $x$ ,  $y$ , y  $z$  respectivamente, con un error total máximo para la posición de  $5,684 \times 10^{-12}$  mm, aceptable para manipuladores en general (Kim, 2005).



Continúa

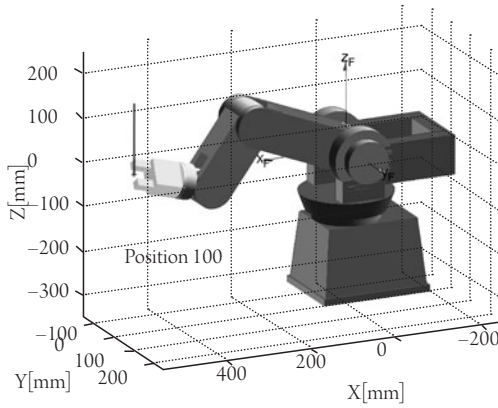


Figura 9. Validación gráfica de algunas posiciones de la tarea cinemática

Fuente: elaboración propia.

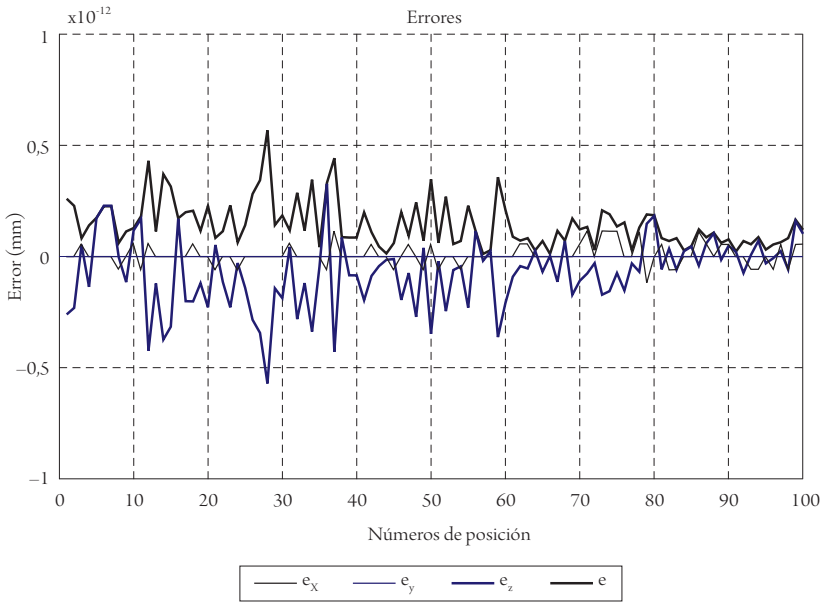


Figura 10. Errores de posición incurridos en el método matricial presentado

Fuente: elaboración propia.

## Conclusión

Se presentó un método para solucionar la cinemática inversa del manipulador serial SR Mitsubishi RV-M1, el cual se basó en sucesivas premultiplicaciones de la matriz

de transformación homogénea de la herramienta vista en el marco de referencia fijo. El origen del sistema coordenado fijo coincide con el origen del sistema coordenado del primer elemento, lo cual facilita trasladar el robot a cualquier sistema de manufactura, mediante transformaciones homogéneas con matrices de transformación del sistema coordenado.

Una ventaja del método presentado es que la solución del problema de cinemática inversa no necesita de proyecciones del manipulador, sino que presenta un enfoque global de solución para ambas: posición y orientación del efector final. Los resultados fueron validados tanto por comparación con trabajos previos, como gráficamente con la generación de una animación que genera la trayectoria de una tarea cinemática específica. Se calcularon los errores de la posición, del orden de  $10^{-12}$  mm, aceptable para manipuladores no utilizados en aplicaciones micro.

Se puede, entonces, emplear la metodología presentada para complementar el análisis dinámico del robot para diseño de un controlador que permita asistir en la teleoperación del Mitsubishi RV-M1, un proyecto que viene siendo desarrollado actualmente.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el patrocinio brindado por Colciencias-Renata, contrato 562 de 2009. Los autores también agradecen el apoyo brindado por la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Atlántico.

## Referencias

- Barrientos, A., Peñín, L., Balaguer, C. y Aracil, R. (2007). *Fundamentos de robótica*. Madrid: McGraw-Hill.
- Buss, S. y Kim, J. (2005). Selectively damped least squares for inverse kinematics. *Journal of Graphics Tools*, 10(3), 37-49.
- Carvajal, J. (2000). *Robótica: aproximación al diseño mecatrónico*. Barraquilla: Uniatlántico.
- Crane, C. y Duffy, J. (2008). *Kinematic analysis of robot manipulators*. Nueva York: Cambridge University Press.

- Goyal, K. y Sethi, D. (2010). An analytical method to find the workspace of a robotic manipulator. *Journal of Mechanical Engineers, Transactions of the Mechanical Engineering Division. The Institution of Engineers, Bangladesh*, 41(1), 25-30.
- Hamilton, C. (2007). Using MATLAB to advance the robotics laboratory. *Journal of Computer Applications in Engineering Education*, 15(3), 205-213.
- Hasan, A.; Hamouda, A.; Ismail, N. y Al-Assadi, H. (2006). An adaptive-learning algorithm to solve the inverse kinematics problem of a 6 DOF serial robot manipulator. *Journal Advances in Engineering Software*, 37, 432-438.
- Jazar, R. (2007). *Theory of applied Robotics: kinematics, dynamics and controls*. Nueva York: Springer.
- Kim, H. (2005). Kinematic calibration of a cartesian parallel manipulator. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 3(3), 453-460.
- Koker, R.; Oz, C.; Cakar, T. y Ekiz, H. (2004). A study of neural networks based inverse kinematics solution for a three-joint robot. *Journal of Robotics and Automation Systems*, 49, 227-234.
- Kucuk, S. y Bingul, Z. (2004). The inverse kinematics solutions of industrial robot manipulators. *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, ICM*, 4, 274-279.
- Kumar, R.; Kalra, P. y Prakash, N. (2011). A virtual RV-M1 robot system. *Journal of Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 27, 994-100.
- Mitsubishi Electric Corporation (1989). *Industrial micro-robot system model RV-M1, Technical Manual*. Naguya: Mitsubishi.
- Nielsen, J. y Roth, B. (1999). On the kinematic analysis of robotic mechanisms. *The International Journal of Robotics Research*, 18(12), 1147-1160.
- Paul, R., Shimano, B. y Gordon, M. (1981). Kinematic control equations for simple manipulators. *IEEE Transactions on Systems Manufacturing and Cybernetics*, 6(11), 449-455.
- Raghavan, M. y Roth, B. (1993). Inverse kinematics of the general 6R manipulator and related linkages. *ASME Journal of Mechanical Design*, 115, 502-508.
- Roldán-Mckinley, J.; Crane, C. y Dooner, D. (2007). Reverse kinematic analysis of the spatial six axis robotic manipulator with consecutive joint axes parallel. *Proceedings of the 31st Mechanisms and Robotics Conference: 979-989*. Las Vegas.
- Tari, H., Su, H. y Li, T. (2010). A constrained homotopy technique for excluding unwanted solutions from polynomial equations arising in kinematics problems. *Mechanisms and Machine Theory*, 45(6), 898-910.
- Uicker, J.; Denavit, J. y Hartenberg, R. (1964). An iterative method for the displacement analysis of spatial mechanisms. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, 86-E(2), 309-314.
- Wu, T-M. (2006). The inverse kinematics problem of spatial 4P3R robot manipulator by the homotopy continuation method with an adjustable auxiliary homotopy function. *Journal of Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 64(10), 2373-2380.