SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Alexander Danilovich Chernyshov
Doctor of physico-mathematical Sciences, professor
The Voronezh State University of Engineering Technology, Russia.
chernyshovad@mail.ru
Vitalij Valerevich Gorjajnov
Candidate of physico-mathematical Sciences, associate prof.
The Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Russia.
gorvit77@mail.ru
Oleg Alexandrovich Chernyshov
Assistant
The Voronezh State University of Engineering Technology, Russia.
chernyshovad@mail.ru

CALCULATION OF FLIGHT OF A SPACECRAFT ON THE EXOATMOSPHERIC PORTION OF THE TRAJECTORY BY THE METHOD RAPID EXPANSIONS

Abstract: *The problem of the motion of a spacecraft on the exoatmospheric portion of the trajectory. An analytical solution by rapid expansions. Shows the absolute error of the trajectory of a spacecraft, its speed and acceleration, which showed high efficiency of the method rapid expansions.*

Keywords: *Spacecraft, flight trajectory, rapid expansion, an analytical solution.*

УДК 629.78

РАСЧЕТ ПОЛЕТА КОСМИЧЕСКОГО КОРАБЛЯ НА ВНЕАТМОСФЕРНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Аннотация: *Рассмотрена задача о движении космического корабля на внеатмосферном участке траектории. Предложено аналитическое решение методом быстрых разложений. Приведены абсолютные погрешности траектории космического корабля, его скорости и ускорения, которые показали высокую эффективность метода быстрых разложений.*

Ключевые слова: *космический корабль, траектория полета, быстрые разложения, аналитическое решение.*

При расчетах траектории полетов космических кораблей обычно используют конечно-разностные методы [1, 2]. В данной работе предлагается новый аналитический метод – метод быстрых разложений [3], позволяющий с высокой точностью при минимальных затратах на ЭВМ определить решение в аналитическом виде [4–10].

Уравнения движения корабля запишем в декартовой системе координат с началом в центре Земли:

$$\ddot{x}+\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=P_x,\ \ \ddot{y}+\frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=P_y,\ \ \ddot{z}+\frac{\alpha z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=P_z, \tag{1}$$

где $\alpha = gR_ç^2$; $R_ç$ – радиус Земли; g – ускорение свободного падения; $\left(P_x,\ P_y,\ P_z\right)$ – вектор условно действующей силы, отнесенной к массе корабля:

$$P_x = -a\omega^2 \cos\omega t + \frac{\alpha a \cos\omega t}{\left((a\cos\omega t)^2 + (a\sin\omega t)^2 + (R_{ç} + h + w^* t)^2\right)^{(3/2)}},$$

$$P_y = -a\omega^2 \sin\omega t + \frac{\alpha a \sin\omega t}{\left((a\cos\omega t)^2 + (a\sin\omega t)^2 + (R_{ç} + h + w^* t)^2\right)^{(3/2)}},$$

$$P_z = \frac{\alpha (R_{ç} + h + w^* t)}{\left((a\cos\omega t)^2 + (a\sin\omega t)^2 + (R_{ç} + h + w^* t)^2\right)^{(3/2)}}.$$

Начальные условия запишем в виде

$$\begin{gathered} x(0) = x_0 = a,\; y(0) = y_0 = 0,\; z(0) = z_0 = R_{ç} + h, \\ \dot{x}(0) = u_0 = 0,\; \dot{y}(0) = \upsilon_0 = a\omega,\; \dot{z}(0) = w_0 = w^*, \end{gathered} \tag{2}$$

где h – высота атмосферы Земли.

Постановка задачи (1), (2) специально выбрана в виде допускающем точное решение

$$x^* = a\cos\omega t,\; y^* = a\sin\omega t,\; z^* = R_{ç} + h + w^* t. \tag{3}$$

Это позволяет вычислить абсолютную погрешность местоположения космического корабля, его скорости и ускорения при применении метода быстрых разложений.

В задаче (1), (2) неизвестными являются координаты центра масс космического корабля $x(t), y(t), z(t)$.

Полагаем, что время изменяется в пределах $t \in [0, t_0]$, где t_0 - время движения корабля. Для решения нелинейной задачи Коши (1), (2) методом быстрых разложений каждую неизвестную функцию следует представить суммой специальной граничной функции M_{2p} [3] и ряда Фурье на заданном отрезке $t \in [0, t_0]$, т.е.

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) + x(t_0)\frac{t}{t_0} + \ddot{x}(0)\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6t_0} - \frac{tt_0}{3}\right) + \ddot{x}(t_0)\left(\frac{t^3}{6t_0} - \frac{tt_0}{6}\right) + \sum_{m=1}^{N} x_m \sin m\pi\frac{t}{t_0}, \\ y(t) &= y(0)\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) + y(t_0)\frac{t}{t_0} + \ddot{y}(0)\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6t_0} - \frac{tt_0}{3}\right) + \ddot{y}(t_0)\left(\frac{t^3}{6t_0} - \frac{tt_0}{6}\right) + \sum_{m=1}^{N} y_m \sin m\pi\frac{t}{t_0}, \\ z(t) &= z(0)\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) + z(t_0)\frac{t}{t_0} + \ddot{z}(0)\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6t_0} - \frac{tt_0}{3}\right) + \ddot{z}(t_0)\left(\frac{t^3}{6t_0} - \frac{tt_0}{6}\right) + \sum_{m=1}^{N} z_m \sin m\pi\frac{t}{t_0}, \end{aligned} \tag{4}$$

где N – количество членов в рядах Фурье.

В (4) использована граничная функция M_2, которая увеличивает сходимость ряда Фурье и гарантирует возможность его двукратного дифференцирования по времени.

В результате применения быстрых разложений (4) приходим к задаче о нахождении следующих $12 + 3N$ неизвестных констант

$$x(0),\; x(t_0),\; \ddot{x}(0),\; \ddot{x}(t_0),\; y(0),\; y(t_0),\; \ddot{y}(0),\; \ddot{y}(t_0),\; z(0),\; z(t_0),\; \ddot{z}(0),\; \ddot{z}(t_0),$$

$$x_m,\; y_m,\; z_m,\quad m = 1 \div N,$$

шесть из которых найдем из граничных условий (2), а остальные $3N + 6$ – из системы нелинейных алгебраических уравнений, получаемой применением оператора быстрых разложений [3] и поточечного метода вычисления коэффициентов быстрых разложений [11–17].

На внеатмосферном участке траектории вычислительные эксперименты проводились при различном количестве N членов ряда Фурье. Траектория полета космического корабля рассчитывалась при $\omega = 2\pi/7200\; c^{-1}$, $w^* = 2000$ ì /ñ, $a = 100$ ì ,

$g = 9{,}8$ м/с^2, $R_ç = 6372$ км, $h = 118$ км для различных значений времени полета t_0. Абсолютные погрешности местоположения корабля, его скорости и ускорения вычислялись соответственно по формулам

$$\delta s = \sqrt{\left(x^* - x\right)^2 + \left(y^* - y\right)^2 + \left(z^* - z\right)^2}\,,\ \delta \upsilon = \sqrt{\left(\dot{x}^* - \dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}^* - \dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}^* - \dot{z}\right)^2}\,,$$

$$\delta a = \sqrt{\left(\ddot{x}^* - \ddot{x}\right)^2 + \left(\ddot{y}^* - \ddot{y}\right)^2 + \left(\ddot{z}^* - \ddot{z}\right)^2}\,.$$

Максимальные значения величин δs, $\delta \upsilon$ и δa для внеатмосферного участка траектории приведены в табл. 1.

Таблица 1

Максимальные значения δs, $\delta \upsilon$ и δa

t_0, с	N	$\delta s_{\max}$, м	$\delta \upsilon_{\max}$, м/с	$\delta a_{\max}$, м/с^2
14440	10	6,80	$2{,}65 \cdot 10^{-3}$	$4{,}26 \cdot 10^{-6}$
	20	0,97	$3{,}62 \cdot 10^{-4}$	$1{,}08 \cdot 10^{-6}$
	30	0,30	$1{,}27 \cdot 10^{-4}$	$4{,}84 \cdot 10^{-7}$
36000	20	36,32	$5{,}93 \cdot 10^{-3}$	$7{,}53 \cdot 10^{-6}$
	25	16,69	$2{,}98 \cdot 10^{-3}$	$4{,}71 \cdot 10^{-6}$
	30	9,09	$1{,}74 \cdot 10^{-3}$	$3{,}21 \cdot 10^{-6}$

Видно, что с увеличением числа членов ряда Фурье точность расчетов быстро возрастает. Кроме этого точность расчета можно повысить, выбрав в быстром разложении граничную функцию более высокого порядка [11-17]. Также, следует отметить, что увеличение в расчетах времени полета не приводит к существенному росту численных и временных затрат на ЭВМ.

Таким образом, высокая точность расчетов позволит проводить меньшее количество корректировок траектории и тем самым существенно экономить топливо на космическом корабле, что в свою очередь расширяет возможности космических исследований и принесет большой экономический эффект.

References:

1. Карагодин В.В. Приближенные методы расчета внеатмосферного активного участка траектории // Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 66, 2013. http://www.mai.ru/science/trudy/
2. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990. 512 с.
3. Чернышов А.Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики Т. 54. № 1. 2014. С. 13 – 24.
4. Чернышов А.Д., Марченко А.Н., Горяйнов В.В. Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы // Тепловые процессы в технике, 2012 г., Т. 4, №11, С. 482-486.
5. Чернышов А.Д., Павлов И.О., Воронова Е.В., Горяйнов В.В. Решение методом быстрых разложений задачи о сушке зерна // Теплофизика и аэромеханика, 2012, том 19, № 6. С. 739-749.

6. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В. Решение одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения методом быстрых разложений // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. № 4(12). 2012. С. 105 – 112.
7. Чернышов А.Д., Попов В.М., Шахов А.С., Горяйнов В.В., Новиков А.П. Решение задачи о контактном тепловом сопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений // Тепловые процессы в технике Т. 4, № 12. 2012. С. 544 – 552.
8. Чернышов А.Д., Марченко А.Н., Горяйнов В.В. Решение задачи о деформировании термоупругой пластины методом быстрых разложений// Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2013. № 2. С. 84-89.
9. Попов В.М., Шахов А.С., Горяйнов В.В., Чернышов О.А., Новиков А.П. Повышенная точность решения задачи о контактном термосопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений // Тепловые процессы в технике –Т. 6 – № 4. – 2014. – С. 179-191.
10. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В. Чернышов О.А. Решение задачи о полете космического корабля в атмосфере Земли методом быстрых разложений // Тенденции развития технических наук: сборник статей Международной научно- практической конференции – Уфа: Аэтерна, 2014. –С. 82 – 85.
11. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Соловьев А.О. О возможности вычисления коэффициентов Фурье поточечным методом.// Вестник Воронежского государственного технического университета. Т. 6. № 2. 2010. С. 49 – 53.
12. Горяйнов В.В. Устойчивость поточечного метода вычисления коэффициентов быстрых рядов Фурье // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / Сб. тр. междунар. конф. – Воронеж.: ВГУ, 2010 г. С. 120 – 124.
13. Горяйнов В.В. Анализ погрешности быстрых рядов Фурье при их многократном дифференцировании для случая вычисления коэффициентов ряда поточечным методом // Вестник Воронежского государственного технического университета. Т. 7. № 2. 2011. С. 36 – 40.
14. Чернышов А.Д., Хозяинова Н.А., Горяйнов В.В. Исследование погрешности поточечного метода вычисления коэффициентов быстрых рядов Фурье // Вестник Воронежской государственной технологической академии. Сер. Информационные технологии, моделирование и управление. № 2. 2011. С. 64 – 67.
15. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В. О выборе оптимального порядка граничной функции в быстром разложении // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2011. №1. С. 60 – 65.
16. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В. О сравнении быстрых синус – и косинус–разложений в краевых задачах с условиями Дирихле // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / Сб. тр. междунар. конф. – Воронеж.: ВГУ, 2011 г. С. 417 – 422.
17. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В. О способе нанесения расчетных точек на отрезок при реализации поточечного метода вычисления коэффициентов быстрых разложений для решения краевой задачи с условиями Дирихле // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. № 2. 2012. С 30 – 35.