

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Sagat Zhunisbekov

doctor of technical Sciences, Professor,
 academician of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, rector
 Taraz technical Institute, Kazakhstan
tar-ti@mail.ru

Nurlan Darkhanuly Markhabatov

student 3 courses of speciality Mathematics
 Taraz State University named after M.Kh.Dulaty

Alexandr Nikolayevich Shevtsov

candidate of technical Sciences, President of International Academy
 International Academy of Theoretical & Applied Sciences, (USA, Sweden, Kazakhstan)
Shev_AlexXXXX@mail.ru

MODELING AND PROGRAMMING IN MATHCAD SUSTAINABILITY AND SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract: This article discusses a number of points related to the numerical solution of differential equations of the second order, and the study of their stability in MathCad.

Key words: stability, differential equation, second order.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГРАМИРОВАНИЕ В МАТНСАД УСТОЙЧИВОСТИ И РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация: В данной статье рассматривается ряд моментов, связанных с процессом численного решения дифференциальных уравнений второго порядка и исследования их устойчивости в MathCad.

Ключевые слова: устойчивость, дифференциальное уравнение, второй порядок.

Исследованию решений параболических уравнений посвящены труды многих ученых: Киреев В.И., Пантелеев А.В., Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л., Рихтмайер Р.Д., Вержбицкий В.М., Демидович Б.П., Марон И.А., Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Кабдыкайыр К., Плис А.И., Сливина Н.А., Такабаев М.К. и многих других [1-4]. Между тем при попытке численного решения и построения компьютерной модели расчета у студентов возникает ряд проблем. Использование и применение на занятиях компьютерных программ, таких как Maple, MathCad, MatLab и др. с одной стороны казалось бы должно способствовать пониманию дисциплины. Но на практике обнаруживается другая тенденция. Недостаточно просто изучить материал и обзорные лабораторные по данным компьютерным программам и общие методы решения примеров. Необходимо более тщательное и углубленное изучение по каждой отдельной теме дисциплины, и даже по каждому отдельному примеру.

Рассмотрим решение дифференциального уравнения параболического типа на множестве R^2 , где $D = (0, T^*) \times (0, l)$ в операторном виде [1]:

$$Lu = f, \quad (t, x) \in D, \quad (1)$$

$$lu = r, \quad (t, x) \in \partial D, \quad (2)$$

$$D_{h\tau} = \{(t_k, x_n): 1 \leq k \leq M-1, 1 \leq n \leq N-1\} \quad (3)$$

$$\tau = T^*/M, \quad h = l/N \quad \tau_k = t_{k+1} - t_k, \quad k = 0, \dots, M-1, \quad (4)$$

$$h_n = x_{n+1} - x_n, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

$$u^{h\tau} = \begin{pmatrix} u_0^0 & u_1^0 & u_2^0 & \dots & \dots & u_N^0 \\ u_0^1 & u_1^1 & u_2^1 & \dots & \dots & u_N^1 \\ u_0^2 & u_1^2 & u_2^2 & \dots & \dots & u_N^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0^M & u_1^M & u_2^M & \dots & \dots & u_N^M \end{pmatrix} \quad (5)$$

Расписывая (1-5) в конечных разностях получим [1]:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + f(t, x), \quad 0 < t < T^*, \quad 0 < x < l, \quad (6)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T^*,$$

$$u(t, l) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T^*.$$

$$\frac{y_n^{k+1} - y_n^k}{\tau} = a^2 \theta (\Lambda y^{k+1})_n + a^2 (1 - \theta) (\Lambda y^k)_n + g_n^k, \quad (8)$$

$$k = 0, \dots, M-1, \quad n = 1, \dots, N-1,$$

$$y_n^0 = \varphi_n \equiv \varphi(x_n), \quad n = 0, \dots, N, \quad (9)$$

$$y_0^k = \mu^k \equiv \mu(t_k), \quad k = 0, \dots, M, \quad (10)$$

$$y_N^k = \nu^k \equiv \nu(t_k), \quad k = 0, \dots, M. \quad (11)$$

где

$$(\Lambda y^k)_n \equiv \frac{y_{n-1}^k - 2y_n^k + y_{n+1}^k}{h^2}, \quad (\Lambda y^k)_n \equiv \frac{y_{n-1}^{k+1} - 2y_n^{k+1} + y_{n+1}^{k+1}}{h^2}. \quad (12)$$

Причем возможно использование нескольких шаблонов:

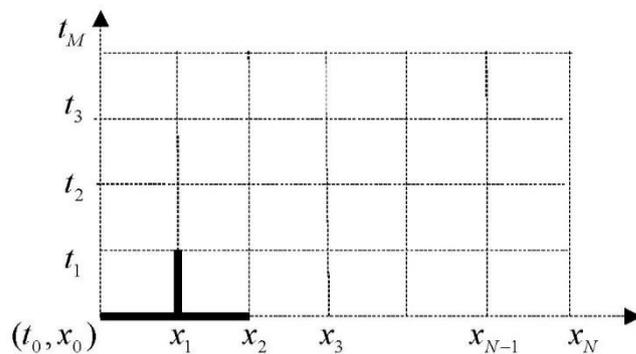


Рисунок 1 – Шаблон при $k = 0, n = 1$ для y_1^1 .

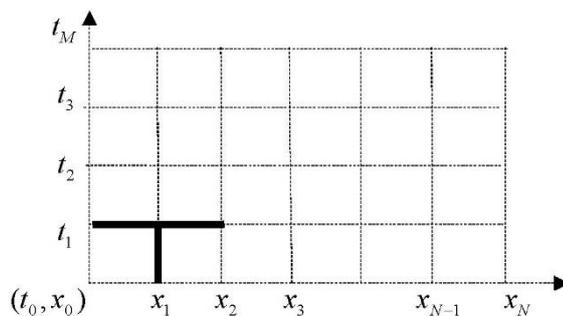


Рисунок 2 - Шаблон при $k=0, n=1$ для y_1^1, y_2^1 .

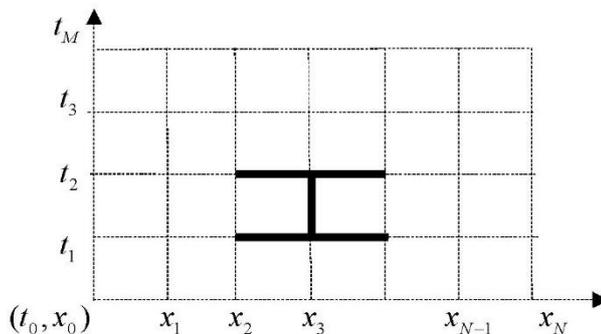


Рисунок 3 - Шаблон при $k=1, n=3$ для y_2^2, y_3^2, y_4^2 .

$N := 50$	$M := 50$	$L := 1$	$Tz := 1$
$k := 0, 1..M-1$		$ta := \frac{Tz}{M}$	$h := \frac{1}{N}$
	$n := 1, 2..N-1$		
$k =$	$n =$	$ta = 0.02$	$h = 0.02$
0	1	$t_k := k \cdot ta$	$x_n := n \cdot h$
1	2		
2	3	$t =$	$x =$
3	4	0	0
4	5	0.02	0.02
5	6	0.04	0.04
6	7	0.06	0.06
7	8	0.08	0.08
8	9	0.1	0.1
9	10	0.12	0.12
10	11	0.14	0.14
11	12	0.16	0.16
12	13	0.18	0.18
13	14	0.2	0.2
14	15	0.22	0.22
...	...	0.24	0.24
		0.26	0.26
		0.28	0.28
	

Рисунок 4 – Задание начальных условий, шага расчетной сетки.

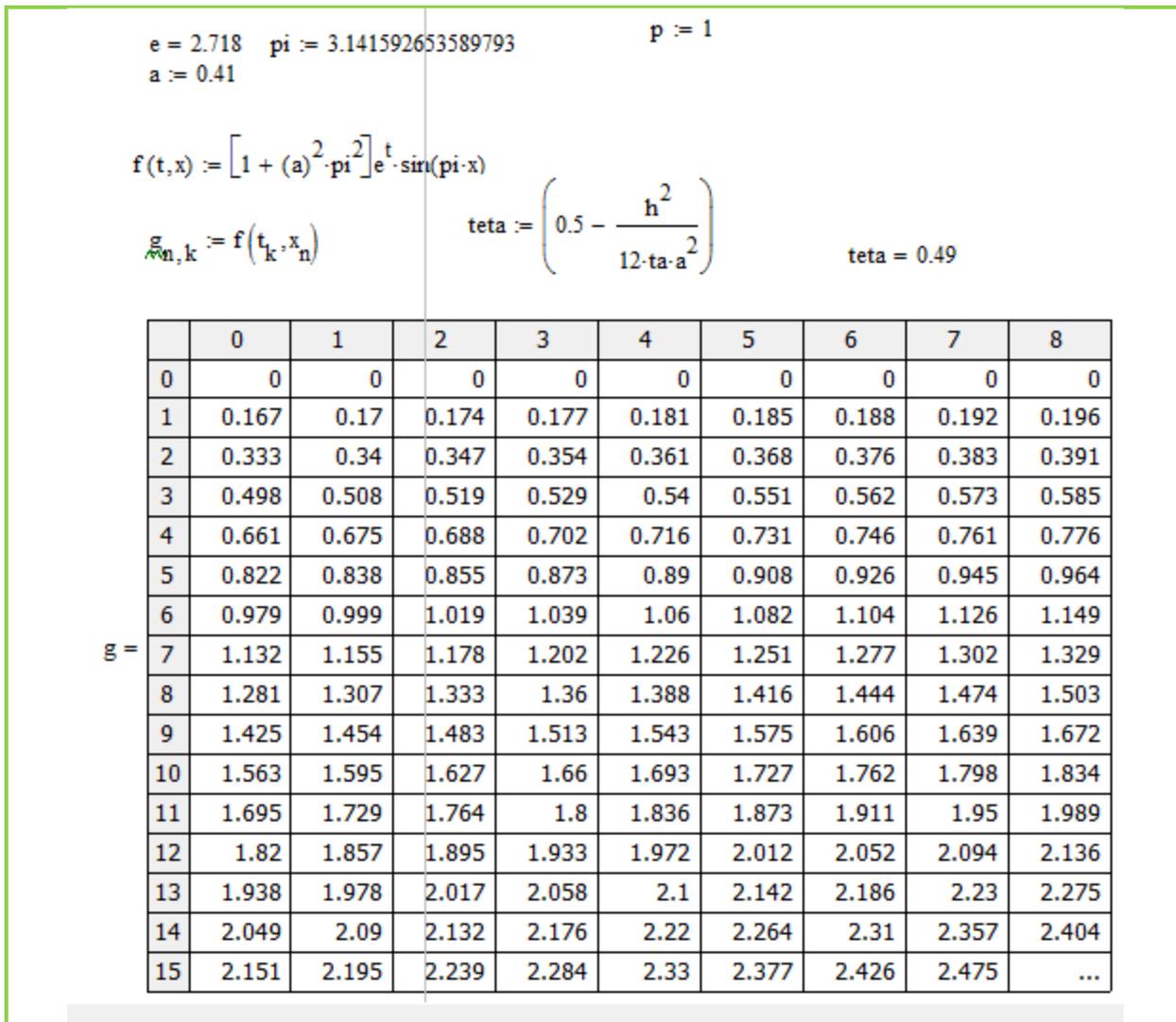


Рисунок 5 – Задание и расчет $f(t, x)$ в (6).

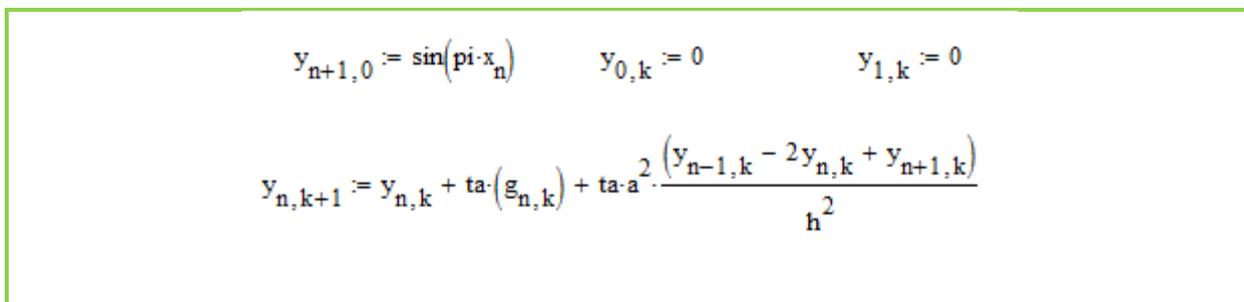


Рисунок 6 – Задание расчетной схемы.

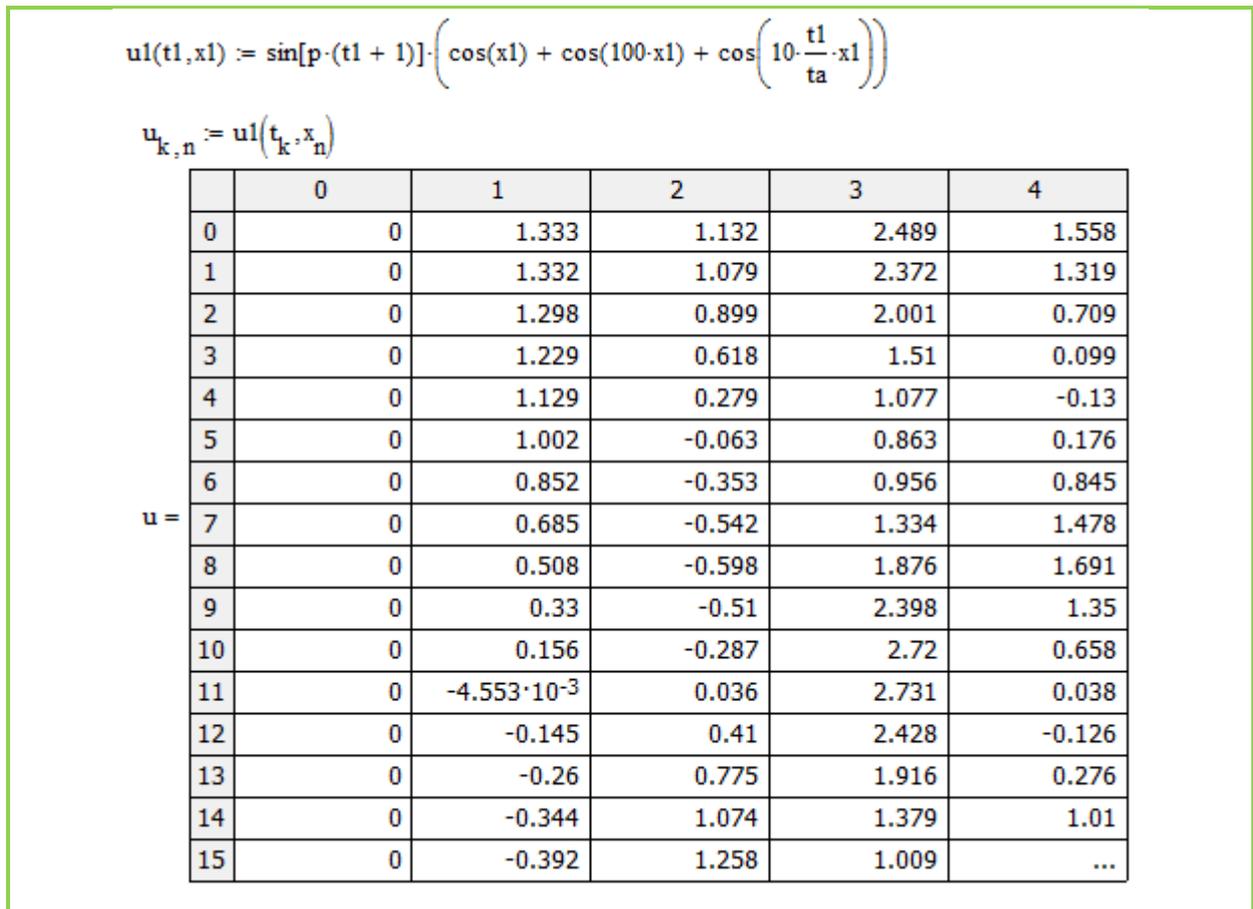


Рисунок 7 – Быстроменяющаяся функция, определяющая точное решение.

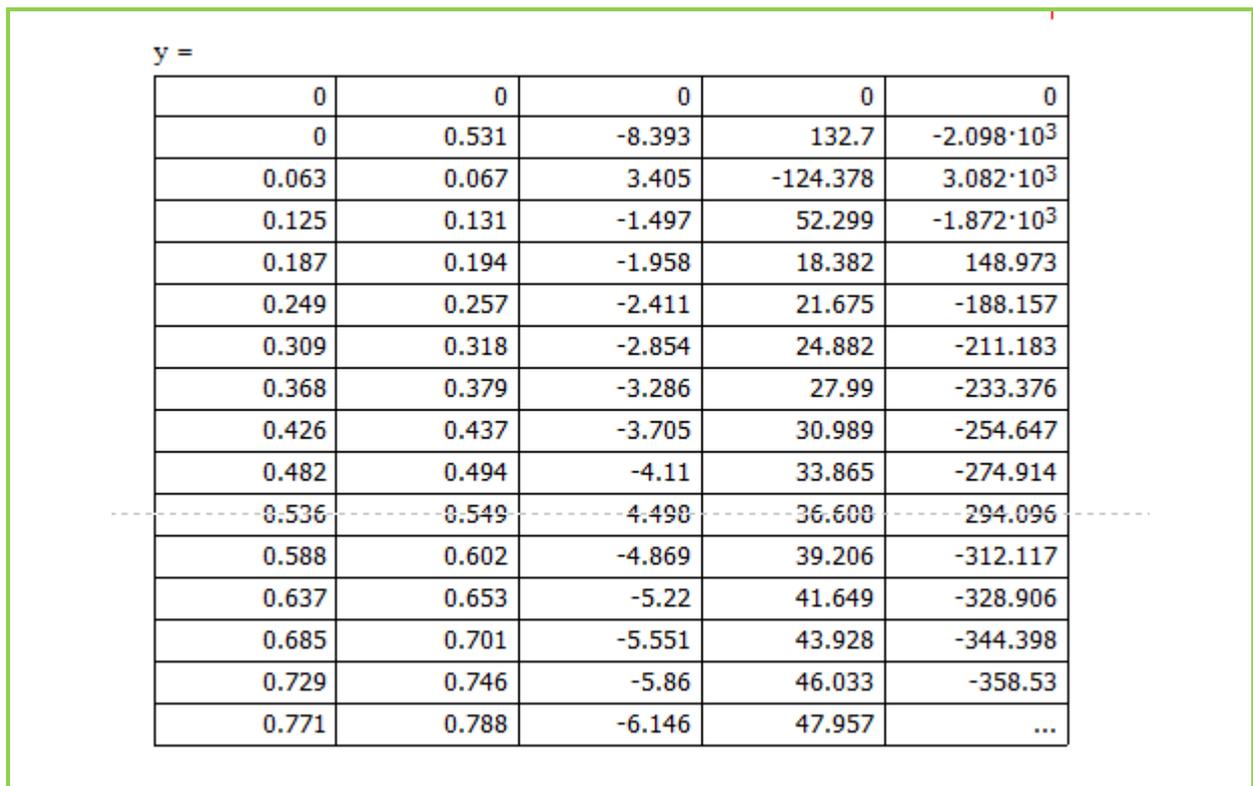


Рисунок 8 – Численные значения функции.

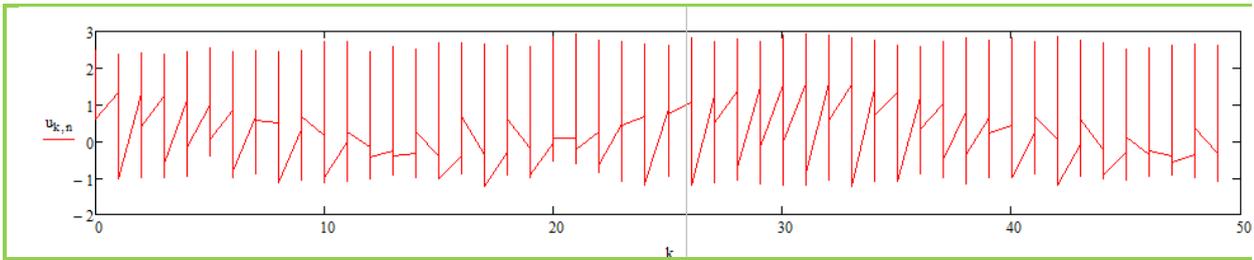


Рисунок 9 – Зависимость точного решения от k .

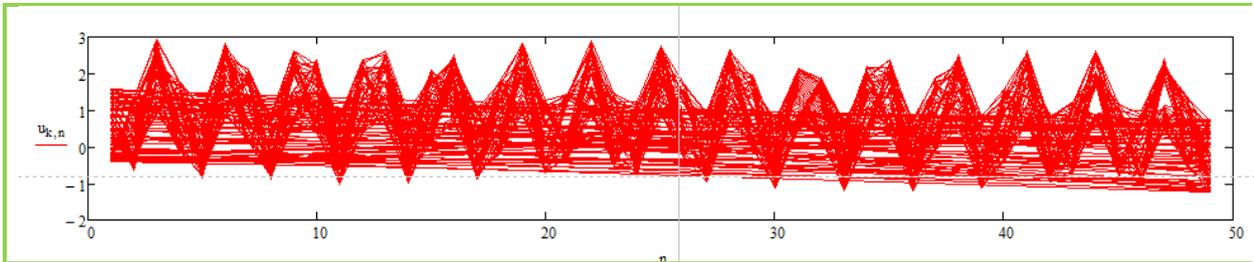


Рисунок 10 – Зависимость точного решения от n .

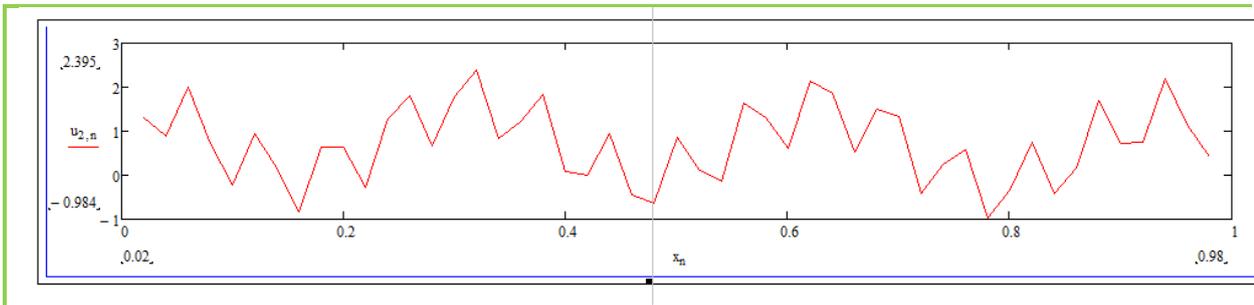


Рисунок 11 – Частное решение функции u от x .

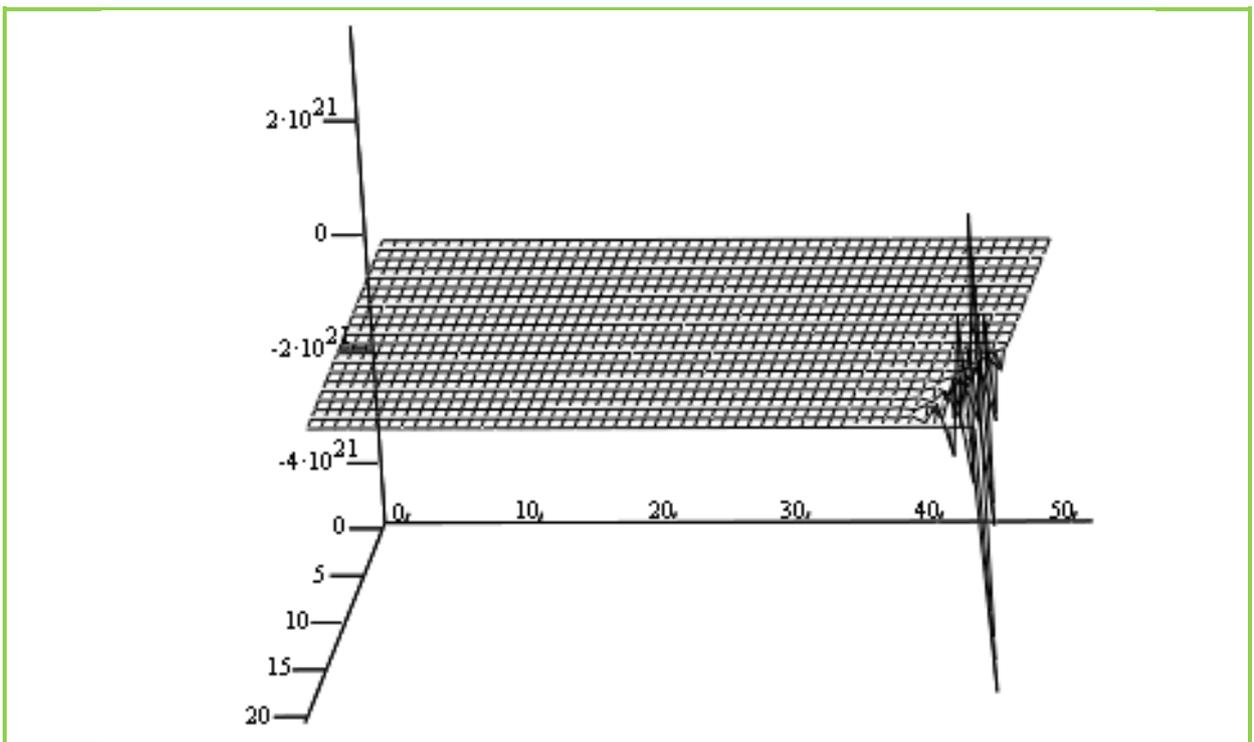


Рисунок 12 – Возмущения численного решения.

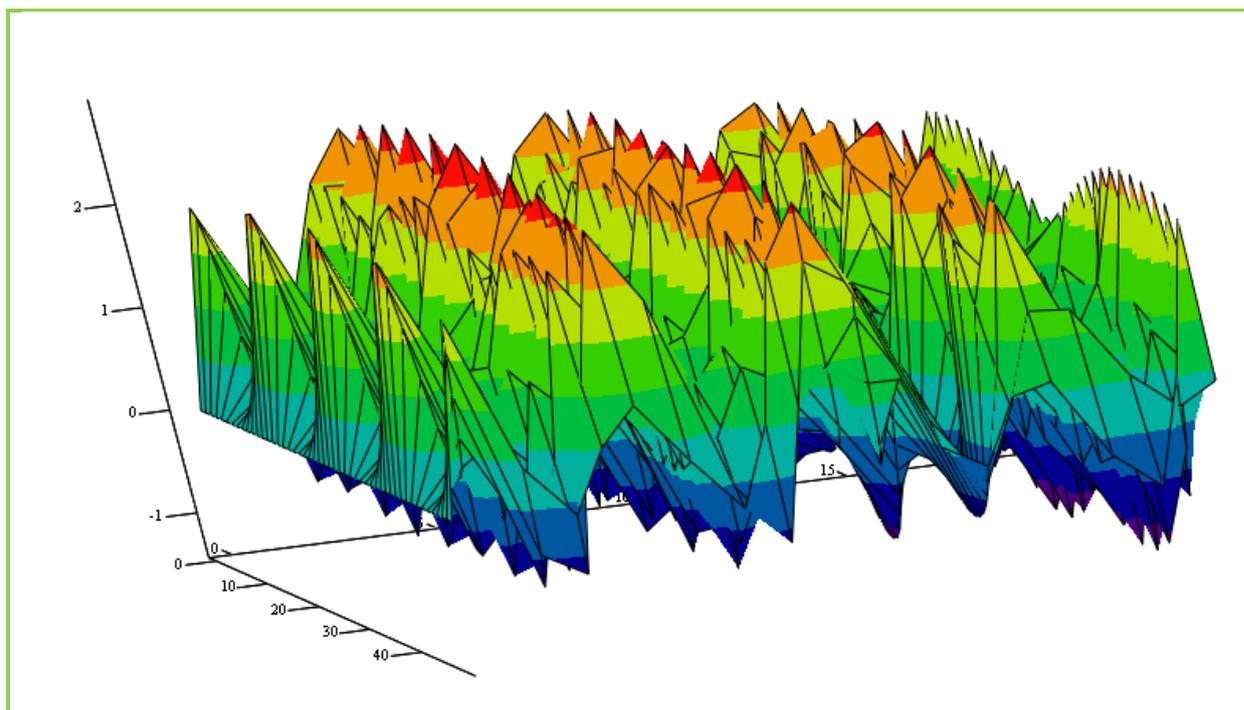


Рисунок 13 – Численное решение по расчетной схеме рис.1.

В настоящее время процесс обучения неразрывно связан с тремя аспектами: построение аналитического и численного решения, а также его компьютерная реализация. При этом если первые два студент изучает на основе известных моделей и примеров, то последний аспект недостаточно описан и сказывается нехватка сборников лабораторных работ. В математике назрела необходимость разработки не обзорных лабораторных работ, а углубленных в узкую специализацию и направленных на проведение исследований.

References:

1. Абиев Н.А. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКА ЕСЕПТЕРІН ШЕШУДІҢ АЙЫРЫМДЫҚ СХЕМАЛАРЫ. – Тараз, 2012. -252с.
2. Численные методы решения дифференциальных уравнений параболического типа. URL: http://knowledge.allbest.ru/mathematics/2c0b65625b3bc68b5d43b89421206c36_0.html (Дата доступа 24.03.2014).
3. ТЕПЛОМАСООБМЕН. URL: <http://stringer46.narod.ru/HeatConductivity0.htm> (Дата доступа 24.03.2014).
4. Численные методы решения дифференциальных уравнений параболического типа. URL: <http://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=602539> (Дата доступа 24.03.2014).
5. Дифференциальное уравнение теплопроводности. URL: http://www.fast-const.ru/articles.php?article_id=21 (Дата доступа 24.03.2014).
6. Конечно-разностный метод решения для уравнений параболического типа. URL: <http://www.bestreferat.ru/referat-213690.html> (Дата доступа 24.03.2014).
7. Разностные схемы: явная и неявная схемы. URL: <http://5fan.ru/wievjob.php?id=46738> (Дата доступа 24.03.2014).
8. Решение дифференциальных уравнений в частных производных. URL: http://teacher.ucoz.net/Lecture/Scilab/glava_12.pdf (Дата доступа 24.03.2014).
9. Решение двумерных дифференциальных уравнений параболического типа. URL: http://ikt.muctr.ru/html2/7/lek7_10.html (Дата доступа 24.03.2014).
10. Дифференциальные уравнения в частных производных. URL: <http://el1504.narod.ru/Charter13/1.htm> (Дата доступа 24.03.2014).