SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Krakhmaleva Yunona Rinatovna
candidate of technical Sciences,
associate Professor of the Department «Applied mathematics»
Taraz State University named after M.Kh. Dulati, Kazakhstan

Dzhanabayeva Gulzhan Kadyrkhanovna
1 year magistr of the speciality "Mathematics "
Taraz State University named after M.Kh. Dulati, Kazakhstan

SOLUTION OF SOME SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MATHEMATICAL SYSTEM MAPLE

The article considers one of the methods to solve systems of differential equations in the environment of computer algebra.
Keywords: differential equation, option, Maple.

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ MAPLE

В статье рассматривается один из методов решения систем дифференциальных уравнений в среде компьютерной алгебры.
Ключевые слова: дифференциальное уравнение, параметр, Maple.

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН ШЕШУДЕ MAPLE МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖҮЙЕСІН ҚОЛДАНУ

Дифференциалдық теңдеулер теориясы заманауи математиканың ең үлкен бөлімі болып табылады. Дифференциалдық теңдеулердің негізгі ерекшелігі оның қолданыс аясымен тікелей байланыстылығымен сипатталады. Математиканы табиғаттың құпиясына ену әдісі ретінде сипаттасақ, онда бұл әдісті қолданудың негізгі жолы шынайы әлемнің математикалық моделін қалыптастыру мен зерттеу деуге болады. Зерттеуші қандай да бір физикалық құбылысты зерттеуде ең бірінші оның математикалық дәріптеуін немесе, басқа сөзбен айтқанда, математикалық моделін, яғни құбылыстың қосымша сипаттамасын ескермейді, оны осы құбылыстарды басқарумен негізгі заңдарды математикалық формада жазады. Бұл заңдарды дифференциалдық теңдеулер түрінде өрнектеуге болады. Бұған тұтас ортадағы механика құбылыстарының, химиялық реакциялардың, электрлік және магниттік құбылыстардың әр түрлі моделдерін және т.б. жатқызуға болады.

Қолдануларға шешімнің сипатын зерттеу маңызды болып табылады немесе сапалы шешім, дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық шешімін табу әдісі деп айтады. Дифференциалдық теңдеулердің және дифференциалдық теңдеулер жүйесінің аналитикалық шешімін табуға бағытталған теориясын теориялық зерттеу инженерлерге, физиктерге және т.б. шешімін тез және тиімді есептеу жүргізудің негізін көрсетеді. Осыған байланысты бүгінгі таңда символдық және компьютерлік математиканың жылдам дамуының рөлі өсуде, сондықтан олар есептеуді және аналитикалық көрінісін талап ететін математикалық зерттеулерді жүргізетін, математикалық пакеттердің тапсырмаларының спектріне кіреді.

Дифференциалдық теңдеулер теориясын оқу болашақ инженердің математикалық дайындығына маңызды мән береді. Инженерлік мамандықтың студенттері дифференциалдық теңдеулер және олардың жүйелерінің шешімдерін табуда және қорытындылап шешуде әр түрлі жалпы білім беретін және арнайы курстарды, мысалы, физика, теориялық механика, материалдардың кедергісі, электротехника және т.б. қолданбалы есептерімен кездеседі.

Компьютерлік математиканың пакеттерін қолдана отырып дифференциалдық теңдеулер жүйесінің аналитикалық шешімін табу әдісін қолдана білу инженердің заманауи талаптарғаа сай дайындалуына маңызды талап болып табылады.

Скалярлық формадағы біртекті сызықтық жүйенінің шешімінің түрі:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_{11}(t)x_1 + \ldots P_{1n}(t)x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = P_{n1}(t)x_1 + \ldots P_{nn}(t)x_n \end{cases} \quad (1)$$

мұндағы, $P_{jk}(t):(a,b)\to R$, $q_j:(a,b)\to R$ ($\overline{j,k=1,n}$) - үзіліссіз функциялар және берілген жүйенің $\varphi^1,\ldots\ldots\ldots,\varphi^n$ сызықтық тәуелсіз шешімдері белгілі, сондай- ақ дифференциялдық теңдеулер теориясынан ретін төмендету әдісі арқылы табылатыны белгілі. (1) жүйе векторлық формада $P(t)=\{P_{jk}(t)\}$, $j,k=1,\ldots.n$ коэффициенттерінің матрицасы арқылы бір ғана теңдеумен

$$\dot{x} = P(t)x \quad (2)$$

түрінде жазылады.

Дифференциялдық теңдеулер жүйесін заманауи математикалық пакеттер құралдары арқылы Maple математикалық программасында аналитикалық шешімін табу әдістемесінің алгоритімін (1-кесте) түрінде көрсетеміз.

$\dot{x} = P(t)x$ жүйесінің шешімінің алгоритмінің сызықты біртекті жүйесі, мұнда $P(t) = \{P_{jk}(t)\}$, $(j, k = 1,\ldots.n)$ - Maple-де элементтері (a,b) интервалында үзіліссіз болатын функциялар матрицасы болып табылады.

1-кесте

№	Аталуы	Командалардың орындалу тізбегі
1.	Дайындық, берілгендерді енгізу	Айнымалылар мен тұрақтыларды тазалау Теңдеулер жүйесін енгізу: R1 Жүйені дифференциалдар арқылы жазу: R2:=convert(R1,diff)
2.	Mapleдің қосымша мүмкіндіктерін қосу	Сызықтық алгебра пакетін қосу with(LinearAlgebra) Коэффициенттер матрицасын құру R3:=GenerateMatrix(R2) Шешімдер матрицасының берілуі R4:=S(t)=Matrix(colon(..,..,..)) Айнымалылар матрицасының берілуі R5:=Y=Matrix(y1,y2,y3)
3.	Жүйенің ретін төмендету	Матрицалардың көбейтіндісін табамыз R6:=X=MatrixMatrixMultiply(R4,R5) Айнымалылар матрицасын енгіземіз R7:=X=Matrix(x1,x2,x3) Матрицалық теңдеу аламыз R6:= X=S*Y

		Матрицалық теңдеуді толықтырамызамыз R8:= Матрицалық теңдеуді жеке теңдеулер жүйесіне бөлеміз B1:= Теңдеулер жүйесінен бірінші ретті туынды аламыз C1:= C2:= C3:= Жаңа айнымалы мен оның туындыларын бастапқы теңдеуге қоямыз S1:= S2:= S3:=
4.	Дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу. Шешімін табу	Ізделінді функцияны дифференциалдық теңдеулердің жаңа жүйесінде береміз tt:=[y1,y2,y3] Алынған дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешміз Ds:=dsolve(S1,S2,S3,tt) Бастапқы жүйенің ізделінді функциясының соңғы мәнін табамыз simplify(Ds,B1,B2,B3)

(2) сызықтық біртекті жүйенің шешімінің блок схемасын келтіреміз.

1-сурет. Сызықтық біртекті жүйенің шешімінің алгоритмінің блок схемасы

Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің аналитикалық шешімін табу әдістемесін тәжірибеде жүзеге асыруды мысалмен келтіреміз. Егер жоғарыда келтірілген алгоритмдерді қолдану арқылы $\varphi^1 = (t, t, t^2)$ жүйесінің тәуелсіз шешімдері белгілі болса, онда сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің түрі төмендегідей болады:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t^{-1}x_1 + tx_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = t^{-1}x_1 - tx_2 + x_3 \, , \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

```
> restart;
> R1:=D(x[1])(t)=t**(-1)*x[1](t)+t*x[2](t)-x[3](t), D(x[2])(t)=t**(-1)*x[1](t)-t*x[2](t)+x[3](t),D(x[3])(t)=x[1](t)+x[2](t);
```

$$R1 := \mathrm{D}(x_1)(t) = \frac{x_1(t)}{t} + t\,x_2(t) - x_3(t),\ \mathrm{D}(x_2)(t) = \frac{x_1(t)}{t} - t\,x_2(t) + x_3(t),$$
$$\mathrm{D}(x_3)(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

> R2:=convert(R1[1],diff),convert(R1[2],diff),convert(R1[3],diff);

$$R2 := \frac{d}{dt}x_1(t) = \frac{x_1(t)}{t} + t\,x_2(t) - x_3(t),\ \frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{x_1(t)}{t} - t\,x_2(t) + x_3(t),$$
$$\frac{d}{dt}x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

> A1:=R2[1];A2:=R2[2];A3:=R2[3];

$$A1 := \frac{d}{dt}x_1(t) = \frac{x_1(t)}{t} + t\,x_2(t) - x_3(t)$$
$$A2 := \frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{x_1(t)}{t} - t\,x_2(t) + x_3(t)$$
$$A3 := \frac{d}{dt}x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

> with(LinearAlgebra):
> R3:=GenerateMatrix([R2], [x[1](t), x[2](t),x[3](t)]);

$$R3 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} & -t & 1 \\ -\frac{1}{t} & t & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\left(\frac{d}{dt}x_1(t)\right) \\ -\left(\frac{d}{dt}x_2(t)\right) \\ -\left(\frac{d}{dt}x_3(t)\right) \end{bmatrix}$$

> R4:=S(t)=Matrix([[t,0,0],[t,1,0],[t**2,0,1]]);

$$R4 := \mathrm{S}(t) = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> R5:=Y=Matrix(3,1,[y[1],y[2],y[3]](t));

$$R5 := Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$$

> R6:=X=MatrixMatrixMultiply(rhs(R4), rhs(R5));

$$R6 := X = \begin{bmatrix} t\,y_1(t) \\ t\,y_1(t) + y_2(t) \\ t^2\,y_1(t) + y_3(t) \end{bmatrix}$$

> R7:=X=Matrix(3,1,[x[1],x[2],x[3]](t));

$$R7 := X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

> R6:=subs(R7,R6);

$$R6 := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\,y_1(t) \\ t\,y_1(t) + y_2(t) \\ t^2\,y_1(t) + y_3(t) \end{bmatrix}$$

> R7:=X=Matrix([[x[1](t)],[x[2](t)],[x[3](t)]]);

$$R7 := X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

> R8:=subs(R7,R6);

$$R8 := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\,y_1(t) \\ t\,y_1(t) + y_2(t) \\ t^2\,y_1(t) + y_3(t) \end{bmatrix}$$

B1:=lhs(R8)[1,1]=rhs(R8)[1,1];B2:=lhs(R8)[2,1]=rhs(R8)[2,1];B3:=lhs(R8)[3,1]=rhs(R8)[3,1];

$$B1 := x_1(t) = t\,y_1(t)$$

$$B2 := x_2(t) = t\,y_1(t) + y_2(t)$$

$$B3 := x_3(t) = t^2\,y_1(t) + y_3(t)$$

> C1:=diff(lhs(R8)[1,1],t)=diff(rhs(R8)[1,1],t); C2:=diff(lhs(R8)[2,1],t)=diff(rhs(R8)[2,1],t);C3:=diff(lhs(R8)[3,1],t)=diff(rhs(R8)[3,1],t);

$$C1 := \frac{d}{dt}x_1(t) = y_1(t) + t\left(\frac{d}{dt}y_1(t)\right)$$

$$C2 := \frac{d}{dt}x_2(t) = y_1(t) + t\left(\frac{d}{dt}y_1(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}y_2(t)\right)$$

$$C3 := \frac{d}{dt}x_3(t) = 2\,t\,y_1(t) + t^2\left(\frac{d}{dt}y_1(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}y_3(t)\right)$$

> S1:=subs(C1,lhs(A1))=subs(B1,subs(B2,subs(B3,rhs(A1))));

$$S1 := y_1(t) + t\left(\frac{d}{dt}y_1(t)\right) = y_1(t) + t\,(t\,y_1(t) + y_2(t)) - t^2\,y_1(t) - y_3(t)$$

> S2:=subs(C2,lhs(A2))=subs(B1,subs(B2,subs(B3,rhs(A2))));

$$S2 := y_1(t) + t\left(\frac{d}{dt}y_1(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}y_2(t)\right) = y_1(t) - t\,(t\,y_1(t) + y_2(t)) + t^2\,y_1(t) + y_3(t)$$

> S3:=lhs(subs(C3,A3))=subs(B1,rhs(subs(B2,A3)));

$$S3 := 2\,t\,y_1(t) + t^2\left(\frac{d}{dt}y_1(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}y_3(t)\right) = 2\,t\,y_1(t) + y_2(t)$$

> tt:=[y[1](t),y[2](t),y[3](t)];

$$tt := [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]$$

> Ds:=dsolve([S1,S2,S3],tt);

$$Ds := \left\{ y_1(t) = \frac{1}{2}\_C3\ \mathrm{Ei}\left(1, \frac{t^2}{2}\right) + \_C1,\ y_2(t) = \_C2 + \_C3\sqrt{\pi}\,\sqrt{2}\ \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\,t}{2}\right),\right.$$
$$\left. y_3(t) = \_C2\,t + t\,\_C3\sqrt{\pi}\,\sqrt{2}\ \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\,t}{2}\right) + \_C3\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)} \right\}$$

> simplify(subs(Ds,B1));

$$x_1(t)=\frac{1}{2}\,t\left(\_C3\,\mathrm{Ei}\left(1,\frac{t^2}{2}\right)+2\,\_C1\right)$$

> simplify(subs(Ds,B2));

$$x_2(t)=\frac{1}{2}\,t\,\_C3\,\mathrm{Ei}\left(1,\frac{t^2}{2}\right)+t\,\_C1+\_C2+\_C3\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\,t}{2}\right)$$

> simplify(subs(Ds,B3));

$$x_3(t)=\frac{1}{2}\,t^2\,\_C3\,\mathrm{Ei}\left(1,\frac{t^2}{2}\right)+t^2\,\_C1+\_C2\,t+t\,\_C3\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\,t}{2}\right)+\_C3\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$$

Литература

1. Никоноров Ю.Г., Никонорова Ю.В. Применение системы Maple к решению геометрических задач: учебное пособие для студентов специальности «Прикладная математика». – Рубцовск: РИО, 2005. – 80с.