УДК 519.6

О РЕШЕНИИ СУБГРАДИЕНТНЫМИ МЕТОДАМИ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

Я. Н. Вершинин, А. А. Быков, В. Н. Крутиков, В. В. Мешечкин

ON THE SUBGRADIENT METHOD SOLUTION OF REGULARIZED LINEAR PROGRAMMING PROBLEM IN THE ENVIRONMENTAL MONITORING SYSTEM

Ya. N. Vershinin, A. A. Bykov, V. N. Krutikov, V. V. Meshechkin

В работе сформулирована регуляризованная задача линейного программирования распределения объемов выбросов вредных веществ в атмосферу для группы предприятий с целью максимизации их прибыли при ограничениях на выбросы и условии пропорционального распределения допустимых объемов выбросов для предприятий с идентичными характеристиками. Разработан алгоритм отыскания ее решения на основе перехода к двойственной задаче и использовании эффективных релаксационных субградиентных методов с последующим восстановления оптимума. Проведен вычислительный эксперимент, подтверждающий работоспособность и эффективность предложенного подхода.

A regularized linear programming problem of finding permissible air pollution emission rates for multiple sources of a number of industrial plants is formulated in the paper. The objective of solving that problem is to obtain the maximum profit under emission rate limits and conditions of proportional distribution of permissible emission rates for similar industrial plants. The proposed algorithm of finding a problem solution is grounded on the task conversion to the proper dual problem by using effective relaxation subgradient method with the subsequent optimum restoration. The numerical test that can show the capacity and efficiency of the proposed approach is presented.

Ключевые слова: загрязнение атмосферы, предельно допустимый выброс, максимизация объемов производства, квадратичное программирование, двойственная задача, субградиентные алгоритмы оптимизации.

Keywords: air pollution, permissible emission rate, production volume maximization, quadratic programming, dual problem, subgradient optimization algorithm.

1. Введение

В системах экологического мониторинга чистоты атмосферы для населенных мест возникает задача распределения объемов выбросов в атмосферу вредных веществ для предприятий с целью максимизации их прибыли при ограничениях на загрязнение окружающей среды в областях проживания [1 – 8]. Подобные задачи характеризуются значительным числом источников загрязнения (порядка 10000) и существенно меньшим числом (порядка 1000) мест мониторинга чистоты атмосферы [8]. Исходные данные задачи являются результатом обработки доступной статистической информации и сильно зашумлены. Другой важный фактор – плохая обусловленность задачи, связанная с близким расположением идентичных по выбросам предприятий, что определяет неоднозначность решения и его зависимость от метода решения [8]. В этой связи представляется актуальным разработка специализированных методов, обеспечивающих равноценное распределение объемов выбросов предприятий.

Известные подходы к этому распределению приводят к математической постановке в виде задачи линейного программирования [9]. Неизвестные характеристики функционала прибыли системы предприятий области мониторинга, на основании предположения о наличия равновесия системы [10; 11] по лимитирующему «ресурсу» объемов выбросов, выражены в виде функционала от объемов выбросов предприятий. В силу неполноты и неточности данных, плохой обусловленности, большой размерности задачи линейного программирования имеет место проблема неединственности решения и его неустойчивости к возмущениям данных задачи. Для решения подобных задач используются подходы поиска регуляризованного решения [9]. В работе формулируется задача линейного программирования с двухсторонними ограничениями на объемы выбросов, в которую вводится квадратичный сглаживающий функционал, т. е. получается задача квадратичного программирования, где в качестве квадратичной составляющей выступает специально сконструированный функционал регуляризации. Функционал регуляризации предназначен для получения решения задачи распределения объемов выбросов между предприятиями таким образом, чтобы при максимизации суммарной прибыли обеспечить допустимые характеристики качества воздуха в областях проживания и пропорциональное распределение объемов выбросов для предприятий с идентичными характеристиками выбросов.

В работе решение задачи квадратичного программирования, в силу ее высокой размерности, осуществляется посредством решения двойственной задачи, имеющей существенно меньшую размерность. Поскольку двойственная задача является задачей негладкой оптимизации, для ее решения привлекаются имеющиеся эффективные субградиентные методы. Для оценки приемлемости излагаемого подхода проведен значительный вычислительный эксперимент, как на сгенерированных тестах, так и на задачах, основанных на реальных данных. На основании результатов вычислительного эксперимента можно сделать вывод об эффективности изложенного подхода для решения поставленных задач.

2. Постановка задачи

В России на государственном уровне функционирует система управления выбросами загрязняющих веществ (ЗВ) в атмосферу от источников промышленных предприятий [1]. Целью системы является достижение (поддержание) нормативного уровня загрязнения воздушного бассейна населенных мест путем финансового и административного принуждения предприятий к выполнению атмосфероохранных мероприятий по снижению (не увеличению) выбросов. План таких мероприятий разрабатывается для существующих промышленных предприятий каждые 5 лет и содержится в проектах нормативов предельно допустимых выбросов (ПДВ). За выброс в пределах ПДВ предприятие платит базовый норматив [2], а за превышение – в пятикратном размере. Кроме того, начисляемая плата умножается на коэффициент экологической ситуации (территориальный показатель, от 1.0 до 1.44). Таким образом, любое предприятие, загрязнение атмосферы от которого превышает нормативный уровень, заинтересовано в том, чтобы ПДВ его источников, обеспечивая нормы загрязнения, минимально отличались от сегодняшних выбросов.

Для каждого ЗВ под ПДВ для предприятий города понимается такая совокупность выбросов x_i, $i = 1, 2, ..., n$, из источников загрязнения атмосферы (ИЗА), при которой в некотором множестве из m точек, покрывающих жилые районы города и его особо охраняемые территории, соблюдается условие:

$$C_j \le b_j, \; j = 1, 2, ..., m, \tag{1}$$

где C_j – суммарная по всем ИЗА концентрация выбросов, а b_j – предельно допустимая концентрация в j-й точке покрытия. Линейность модели общей концентрации в зависимости от концентраций отдельных выбросов [3] позволяет записать выражение для суммарной концентрации:

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} x_i, \; j = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

где A_{ji} – удельная (на единицу выброса) концентрация от i-го источника в j-й точке покрытия. В дальнейшем будем называть A_{ji} коэффициентом влияния (i-го источника в j-й точке), который зависит от типа источника, его технических параметров, координат на карте города, коэффициентов рельефа территории и параметра осаждения ЗВ. Подставляя (2) в (1), можно записать в матричной форме систему линейных неравенств, являющуюся условием того, что вектор выбросов x является одним из вариантов ПДВ для предприятий города:

$$Ax \le b, \; x \in R^n, \; b \in R^m, \; A \in R^{m \times n}. \tag{3}$$

В методической литературе [4; 5], имеющей, в отличие от нормативной, рекомендательный статус, приводятся методы нахождения частных решений системы (3). Упомянутые методы позволяют найти единственное решение, однако смысл такого решения не вполне ясен, поскольку решения, полученные в [4; 5], не основаны на использования целевой функции.

Предположим, что выбросы отдельного предприятия прямо пропорциональны его объему производства. Такое допущение о пропорциональности (линейной зависимости) параметров часто используется в экономико-математическом моделировании, например, в моделях леонтьевского типа [10; 11]. Тогда прибыль от произведенной продукции отдельного предприятия также будет линейно зависеть от объемов выбросов при условии неизменности платы за каждую единицу ЗВ.

Допустимый объем выбросов для предприятий можно рассматривать как определенного рода ресурс («экологический ресурс»). Будем считать, что система предприятий области мониторинга находится в равновесном состоянии, тогда стоимости предельных продуктов (в том числе и по выбросам), отнесенные к цене соответствующего ресурса, должны быть равны между собой [10], причем цены ресурсов и произведенной продукции для всех предприятий одинаковы. Отсюда следует, что в стоимостном выражении одинаковые приращения экологического ресурса должны приводить на каждом из предприятий к идентичным изменениям прибыли от производства. Тогда в оптимизационной задаче максимизации прибыли совокупности предприятий, при ограничениях на допустимое загрязнение окружающей среды, изменение прибыли предприятий, обусловленное изменением объемов производства, можно заменить на пропорциональную ей величину изменения объемов ЗВ.

В силу практической недоступности необходимой информации об объемах производства и фактической стоимости единицы продукции на предприятиях, сделанное предположение позволяет сформулировать оптимизационную задачу относительно объемов выбросов, что широко используется при постановке оптимизационных задач в отечественной и зарубежной литературе [6; 7; 11].

Естественно, наибольший интерес представляет нахождение варианта ПДВ (3) такого, при котором общие затраты на снижение объема выбросов минимальны, т. е. затраты, связанные с сокращением объемов производства, минимальны, а граница допустимых объемов выбросов предприятия максимальна, что позволяет сформулировать следующую оптимизационную задачу:

$$\min_{x_m \le x \le x^0} (\gamma, (x^0 - x)), \; \gamma \in R^n, \; Ax \le b. \tag{4}$$

Здесь компоненты γ_i вектора γ характеризует удельную стоимость снижения выбросов на всех ИЗА от существующих сегодня выбросов x^0 до искомых значений x.

Решение для каждого источника с номером i ищется на отрезке от существующего выброса x_i^0 до технологически возможного минимального выброса x_{mi}. Если предположить, что удельная стоимость снижения выбросов всех источников одного ЗВ одинакова и принять ее за единицу, то задачу (4) можно преобразовать к виду:

$$\max_{x_m \le x \le x^0} (p, x), \; Ax \le b, \; p_i = 1, \; i = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

Это означает поиск такой совокупности выбросов x всех источников города, при которой суммарный выброс по всем ЗВ останется максимальным. Такое решение характеризует для лимитирующих ЗВ максимально возможную (при сложившемся взаиморасположении промышленных предприятий и жилых районов) нагрузку на воздушный бассейн города.

Тем самым задача (5) образует для каждого проблемного ЗВ (по которому есть точки с превышением ПДК) задачу линейного программирования (ЛП) максимизации суммарного допустимого выброса в атмосферу при ограничениях на загрязнение атмосферы в жилых районах. Постановки такого рода задач достаточно давно упоминаются в отечественной и зарубежной литературе [6; 7], однако практические решения при этом, как правило, оставляют на использование стандартных программ.

Возьмем $a = x_m$, $d = x^0$. Сформулируем задачу максимизации (5) как задачу минимизации, сменив знак целевой функции. Обозначим $c_i = -p_i$, $i = 1,2,...,n$. Соответствующая задача линейного программирования имеет следующий вид:

$$\min(c,x),\ Ax \le b,\ x \in Q = \{x \mid a \le x \le d\},$$
$$c,a,d,x \in R^n,\ b \in R^m,\ A \in R^{m\times n}. \qquad (6)$$

Здесь x – вектор объемов выбросов, Q – множество ограничений предприятий.

Ситуацию неравноценного распределения объемов идентичных предприятий рассмотрим на примере задачи

$$\min(-\sum_{i=1}^{n} x_i),\ \sum_{i=1}^{n} x_i \le 1,\ 0 \le x_i \le 1,\ i = 1,2,...,n. \quad (7)$$

Решение, полученное симплекс-методом, будет содержать одну отличную от нуля компоненту вектора x, например, первую,

$$x_1 = 1, \quad x_i = 0, \quad i = 2,3,...,n,$$

что определяется начальным базисным решением. Поскольку все предприятия идентичны, то распределение объемов $x_i = 1/n$, $i = 1,2,...,n$, должно быть более приемлемым.

В работе [8] рассматривались идеи агрегирования идентичных предприятий в единое целое для устранения линейной зависимости столбцов матрицы A и последующего пропорционального распределения нагрузок на каждое предприятие из общего числа. Другой путь решения задачи состоит в замене исходной задачи (6) на следующую регуляризованную задачу [9]:

$$\min_{x\in Q}[(c,x) + \varepsilon \| x \|^2 / 2],\ Ax \le b,\ \varepsilon > 0. \qquad (8)$$

Решение задачи квадратичного программирования (8) позволяет выделить из множества возможных решений задачи ЛП (6) решение с минимальной нормой. При этом, согласно [9], при достаточно малых значениях ε решение задачи (8) совпадает с решением задачи (6).

Задачу (8) примем в качестве базовой для разработки алгоритма решения задачи (6). В силу возможных значительных отличий предельных значений объемов выбросов отдельных предприятий d_i в решении задачи (8) будет происходить избыточное подавление компонент с большими объемами выбросов. Для устранения этого недостатка необходимо выбирать параметр регуляризации для каждого из предприятий отдельно:

$$\min_{x\in Q}[\ (c,x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2\ ],\ \ Ax \le b,\ \varepsilon_i > 0,\ i = 1,2,...,n \quad . \qquad (9)$$

3. Алгоритм решения задачи

Запишем функцию Лагранжа регуляризованной задачи (9):

$$L(x,y) = (c,x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 (c,x) + (y, Ax - b), \quad y \ge 0,$$
$$y \in R^m, \quad a \le x \le d. \qquad (10)$$

Поскольку число ограничений m значительно меньше числа переменных n, то получим решение прямой задачи (10) на основе решения ее двойственной задачи. Согласно [9] введем двойственную функцию:

$$\theta(y) = -\min_{a\le x\le d}[L(x,y) = (c,x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 (c,x) + (y, Ax - b)], \qquad y \ge 0, \quad y \in R^m. \ (11)$$

Знак минус в (11) поставлен с тем, чтобы в дальнейшем иметь дело с задачей минимизации двойственной функции. Обозначим через $x(y)$ решение задачи минимизации из (11) по x при фиксированном y. При условии отсутствия ограничений по переменным x, решив систему $\nabla_x L(x,y) = 0$, получим:

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x_i} = c_i + \varepsilon_i x_i + [A^T y]_i = 0,\ x_i^* = -\frac{[A^T y + c]_i}{\varepsilon_i},$$
$$i = 1,2,...,n. \qquad (12)$$

С учетом ограничений, решение $x(y)$ примет вид:

$$x_i(y) = \begin{cases} a_i, & если \quad x_i^* \le a_i, \\ d_i, & если \quad x_i^* \ge d_i, \\ x_i^*, & если \quad a_i \le x_i^* \le d_i, \end{cases} \qquad i = 1,2,...,n. \quad (13)$$

Задачу

$$\min_{y\ge 0} \theta(y) \qquad (14)$$

можно решать субградиентными методами. Субградиент $\theta(y)$ в точке y_k записывается в виде:

$$\partial\theta(y_k) = -(Ax_k - b), \quad x_k = x(y_k). \qquad (15)$$

При использовании субградиентных методов для решения задачи (14) ограничения $y \ge 0$ можно обойти, используя вместо y вектор $|y|$, где операция модуля для вектора означает ее покомпонентное применение.

Таким образом, решение задачи (9) заключается в решении задачи минимизации двойственной функции $\theta(y)$ с последующим нахождением решения $x(y)$ задачи (8).

Выберем параметры регуляризации следующим образом:

$$\varepsilon_i = \varepsilon |c_i| / d_i, \quad i = 1,2,...,n. \qquad (16)$$

Тогда выражение (12) примет вид:

$$x_i^* = -\frac{[A^T y + c]_i}{\varepsilon_i} = -\frac{d_i [A^T y + c]_i}{\varepsilon |c_i|}, \ i = 1,2,...,n. \quad (17)$$

При условии идентичности некоторых из предприятий, соответствующие им величины $[A^T y + c]_i$ в (17) будут одинаковы, а выражения для x_i^* будут пропорциональны максимальным объемам выбросов предприятий d_i. Выбор параметров регуляризации согласно (16) приведет к более справедливому для предприятий распределению их нагрузок при $a_i \le x_i^* \le d_i$.

4. Используемые субградиентные методы минимизации

Итерация рассматриваемых в работе релаксационных методов оптимизации (МО) с точным одномерным спуском имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k s_k, \ \alpha_k = \arg\min_{\alpha \ge 0} f\left(x_k - \alpha s_k\right), \quad k = 0,1,\cdots, \quad (18)$$

где задается начальная точка x_0, а s_k – направление спуска, которое вычисляется на основании субградиентов из субградиентного множества в точке x_k, т. е. $g_k \in \partial f(x_k)$.

В расчетах использовались два типа субградиентных методов. Первая группа методов включает в себя многошаговые субградиентные методы. В первом из них [9, 12, 13] (назовем его M0) направление спуска вычисляется по формулам:

$$s_0 = \frac{g_0}{(g_0, g_0)}, \ s_k = s_{k-1} + \frac{1-(s_{k-1}, g_k)}{(g_k, g_k)} g_k, \ k = 1,2,.... \quad (19)$$

Существенного ускорения сходимости можно достичь за счет повышения качества направления спуска, что достигается посредством ортогонализации пары смежных субградиентов [15]. Процесс построения направлений спуска на основе ортогонализации (обозначим его M1) имеет вид:

$$s_0 = \frac{g_0}{(g_0, g_0)}, \ s_k = s_{k-1} + \frac{1-\left(s_{k-1}, g_k\right)}{\left(p_k, g_k\right)} p_k, \ k = 1,2,... \quad (20)$$

$$p_k = \begin{cases} g_k, & \textit{если } (g_k, g_{k-1}) \ge 0, \quad \text{(a)} \\ g_k - \dfrac{(g_k, g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2} g_{k-1}, & \textit{если } (g_k, g_{k-1}) < 0. \quad \text{(b)} \end{cases} \quad (21)$$

Вторая группа методов состоит из алгоритмов формирования направления спуска с использованием операций растяжения пространства. Субградиентный метод с растяжением пространства в направлении субградиента [16, 13, 14] (обозначим его MH0) имеет вид

$$s_0 = \frac{g_0}{(g_0, g_0)},$$

$$s_k = s_{k-1} + H_k g_k \frac{[1-(s_{k-1}, g_k)]}{(g_k, H_k g_k)}, \ k = 1,2,... \quad (22)$$

$$H_{k+1} = H_k - (1 - \frac{1}{\alpha^2}) \frac{H_k g_k g_k^T H_k^T}{(g_k, H_k g_k)}, \quad k = 1,2,...,$$
$$H_0 = I, \quad (23)$$

где $\alpha \ge 1$, $H_k \in R^{n \times n}$ – симметричная, строго положительно определенная матрица (такие матрицы будем обозначать *H>0*). В вычислительном алгоритме MH0 использовалось значение $\alpha^2 = 6$.

Следующий алгоритм (обозначим его MH1) основан на использовании операций растяжения-сжатия пространства [17, 13, 14]:

$$s_0 = \frac{g_0}{(g_0, g_0)},$$

$$s_k = -H_k g_k, \ g_k \in \partial f(x_k), \ k = 0,1,\cdots, \quad (24)$$

$$H_{k+1} = H_k - (1 - \frac{1}{\alpha^2}) \frac{H_k y_k y_k^T H_k^T}{(y_k, H_k y_k)} - (1 - \frac{1}{\beta^2}) \frac{H_k p_k p_k^T H_k^T}{(p_k, H_k p_k)}, \quad k = 1,2,...,$$
$$H_0 = I, \quad (25)$$

$$y_k = g_k - g_{k-1}, \quad p_k = g_k - \frac{(H_k y_k, g_k)}{(H_k y_k, y_k)} y_k. \quad (26)$$

Параметры α, β должны удовлетворять условиям $\alpha > 1, \quad 0 < \beta \le 1, \quad \alpha \cdot \beta > 1$. Использовались значения параметров $\alpha^2 = 30$, $\beta^2 = 0.2$, что обеспечивает результирующий коэффициент растяжения $(\alpha \times \beta)^2 = 6$.

5. Результаты решения тестовых задач субградиентными методами

Для задачи ЛП (6), представленной в виде:

$$\min (c, x), \quad \tilde{A}x \le \tilde{b}, \quad c, x \in R^n, \quad \tilde{b} \in R^{3m}, \quad \tilde{A} \in R^{3m \times n}, \quad (27)$$

где $\tilde{A}^T = (A^T, -I, I)$,

$\tilde{b}^T = (b^T, -a_1, -a_2, ..., -a_n, , d_1, d_2, ..., d_n)$, условия экстремума имеют вид:

$$\tilde{y}^* \ge 0, \quad \tilde{y}_i(\tilde{A}x_i^* - \tilde{b}_i) = 0, \ i = 1,2,...,3m,$$
$$[\tilde{A}^T \tilde{y} + c]_i = 0, \quad i = 1,2,...,n, \quad (28)$$

На основе условий экстремума (28) был разработан способ генерации задач ЛП вида (6) произвольной размерности. Генерировались задачи при $m \le 1000$ и $n \le 10000$, что является достаточным для целей использования в системах мониторинга. Двойственная задача (14) после замены в целевой функции значений аргументов на их модули $\theta(|y|)$ решалась субградиентными методами. Использовались следующие алгоритмы:

1. Алгоритм М0, задаваемый формулами (18), (19).
2. Алгоритм М1, задаваемый формулами (18), (20), (21).
3. Алгоритм МН0, задаваемый формулами (18), (22), (23).
4. Алгоритм МН1, задаваемый формулами (18), (24), (25), (26).

Оптимальные значения $\hat{x}$ восстанавливались согласно (13). В таблицах 1 – 4 приведены затраты количества итераций (it), вычислений значений целевой функции и градиента (nfg), а также параметр точности $q = \left| f - f^* \right| / f^*$ уклонения полученного экстремума $f = (c, \hat{x})$ от истинного $f = (c, x^*)$.

Таблица 1

Результаты решения тестовой задачи при ограничениях-неравенствах для случая пяти активных ограничений

Задача на основе условий экстремума (5 активных ограничений-неравенств) ε = 1.0E-2											
	n = 1000m = 100				n = 5000m = 500				n = 10000m = 1000		
Метод	it	nfg	q		it	nfg	q		it	nfg	q
МН0	314	608	2.5E-4		875	1614	4.1E-4		1284	2304	6.5E-4
М1	497	995	3.7E-5		523	1047	2.0E-2		526	1054	1.3E-3
М0	534	1069	1.8E-2		555	1111	7.3E-3		581	1164	4.8E-2
МН1	309	609	8.8E-3		989	1753	1.2E-3		1731	3014	5.6E-3

Таблица 2

Результаты решения тестовой задачи при всех активных ограничениях-неравенствах

Задача на основе условий экстремума (m активных ограничений-неравенств) ε = 1.0E-2							
	n = 1000m = 100				n = 10000m = 1000		
Метод	it	nfg	q		it	nfg	q
МН0	45	93	1.975E-0006		54	111	4.788E-0008
М1	176	395	4.504E-0006		146	396	2.260E-0007
М0	181	388	1.804E-0005		573	1416	3.820E-0006
МН1	44	91	1.954E-0006		50	104	4.498E-0008

Таблица 3

Результаты решения тестовой задачи при ограничениях-равенствах

Задача на основе условий экстремума (все ограничения – равенства) ε = 1.0E-2							
	n = 1000m = 100				n = 10000m = 1000		
Метод	it	nfg	q		it	nfg	q
МН0	45	93	1.975E-0006		55	114	4.648E-0008
М1	176	395	4.504E-0006		146	396	2.260E-0007
М0	181	388	1.804E-0005		573	1416	3.820E-0006
МН1	55	110	2.218E-0006		50	104	4.498E-0008

В следующей таблице представлены результаты решения прикладной задачи максимизации прибыли совокупности предприятий при ограничениях на их выбросы. Здесь точное решение было найдено симплекс-методом.

Таблица 4

Прикладная задача распределения нагрузок предприятий

Прикладная задача (ограничения-неравенства), n = 1098, m = 45, ε = 0.1			
Метод	it	nfg	q
МН0	328	649	5.9E-7
М1	4126	8270	1.7E-4
М0	1685	3387	3.4E-4
МН1	493	989	2.6E-6

Все использованные методы позволяют найти значение оптимума задачи, практически совпадающее с теоретическим. При этом при тестировании величина ε в (9) выбиралась так, чтобы решение по значению целевой функции было близко к теоретическому и при этом необходимое количество итераций методов для решения задачи (14) было минимальным.

Одна из целей тестирования состояла в выявлении влияния количества активных ограничений на скорость получения и точность решения. Оказалось, что чем больше активных ограничений-равенств, тем проще получить решение задачи (таблицы 1 и 2). Для оценки различий сложности решения задач при ограничениях-равенствах и неравенствах были решены идентичные задачи для ограничений-равенств (таблица 3). Оказалось, что сложность решения таких задач методами минимизации практически одинакова при условии, что все ограничения неравенства являются активными ограничениями.

В практических задачах на данных мониторинга предприятий величина ε выбирается на основе малого рассогласования по целевой функции получаемого и известного решений задачи. Другой способ выбора основывается на экспертном анализе решений задачи при различных параметрах регуляризации и определении наилучшего их них с точки зрения экспертов. В качестве одного из критериев экспертизы может быть использовано свойство равномерности распределения нагрузки идентичных по стоимости и выделениям вредных веществ на единицу продукции предприятий. Другой способ определения параметров регуляризации может состоять в выборе параметра, обеспечивающего наиболее устойчивое к внесенным возмущениям решение.

Заключение

В работе сформулирована оптимизационная задача квадратичного программирования распределения объемов выбросов в атмосферу вредных веществ для предприятий с целью максимизации их прибыли при ограничениях на выбросы вредных веществ в областях проживания. Квадратичная составляющая целевой функции представляет собой функционал регуляризации, предназначенный для получения решения задачи распределения объемов выбросов между предприятиями таким образом, чтобы при максимизации суммарной прибыли совокупности предприятий обеспечить допустимые характеристики качества воздуха в областях проживания и пропорциональное распределение объемов выбросов для предприятий с идентичными характеристиками.

В силу высокой размерности прямой задачи разработан алгоритм отыскания решения ее двойственной задачи с последующим восстановления оптимума. Для решения двойственной задачи использовались эффективные субградиентные методы. На основании вычислительного эксперимента установлено, что при малых параметрах регуляризации решение регуляризованной задачи практически совпадет с решением при отсутствии регуляризации, что подтверждает работоспособность предложенного метода решения.

Для целей получения помехоустойчивого решения, обеспечивающего пропорциональное распределение объемов выбросов для предприятий с идентичными их характеристиками, необходимо для имеющегося набора данных провести расчеты с различными параметрами регуляризации с последующим экспертным отбором наиболее качественных решений.

Литература

1. Методическое пособие по расчету, нормированию и контролю выбросов загрязняющих веществ в атмосферный воздух. – СПб.: НИИ Атмосфера, 2005. – 211 с.

2. ОНД-86. Методика расчета концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий. – Л.: Гидрометеоиздат, 1987. – 92 с.

3. Перечень и коды веществ, загрязняющих атмосферный воздух. – СПб.: НИИ Атмосфера и др., 2010. – 496 с.

4. Методика расчета нормативов допустимых выбросов загрязняющих веществ в атмосферу для групп источников. МРН-87. Институт прикладной геофизики. – М.: Госкомгидромет, 1987. – 30 с.

5. Рекомендации по определению допустимых вкладов в загрязнение атмосферы выбросов загрязняющих веществ предприятиями с использованием сводных расчетов загрязнения воздушного бассейна города (региона) выбросами промышленности и автотранспорта. – СПб., 1999.

6. Gustafson, S. A. On the Calculation of Optimal Long-Term Air Pollution Abatement Strategies for Multiple Sources Areas / S. A. Gustafson, K. O. Kortanek // Intern. Meet. on Air Pollution Modeling. Battelle Institute E. V. – Frankfurt/Main, Germany, 1975. – P. 48 – 57.

7. Охрана окружающей среды: модели управления чистотой природной среды / под ред. К. Г. Гофмана, А. А. Гусева. – М.: Экономика, 1977. – 230 с.

8. Быков, А. А. Оценка устойчивости линейных оптимизационных задач нормирования выбросов в атмосферу / А. А. Быков, Ю. М. Жаворонков // Труды Зап.-Сиб. НИИ Госкомгидромета. – Вып. 3. – М.: Гидрометеоиздат, 1988. – С. 42 – 53.

9. Поляк, Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

10. Данилов, Н. Н. Курс математической экономики / Н. Н. Данилов. – М.: Высшая школа, 2006. – 407 с.

11. Рюмина, Е. В. Экологический фактор в экономико-математических моделях / Е. В. Рюмина. – М.: Наука, 1980. – 168 с.

12. Крутиков, В. Н. Новый релаксационный метод недифференцируемой минимизации / В. Н. Крутиков, Т. В. Петрова // Математические заметки ЯГУ. – 2001. – Т. 8. – Вып. 1. – С. 50 – 60.

13. Крутиков, В. Н. Релаксационные методы безусловной оптимизации, основанные на принципах обучения / В. Н. Крутиков. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 171 с.
14. Крутиков, В. Н. Обучающиеся методы безусловной оптимизации и их применение / В. Н. Крутиков. – Томск: Изд-во Том. государственного педагогического ун-та, 2008. – 264 с.
15. Вершинин, Я. Н. Алгоритмы обучения на основе ортогонализации последовательных векторов / Я. Н. Вершинин, В. Н. Крутиков // Вестник КемГУ. – 2012. – Вып. 2(50). – С. 37 – 42.
16. Крутиков, В. Н. Релаксационный метод минимизации с растяжением пространства в направлении субградиента / В. Н. Крутиков, Т. В. Петрова // Экономика и мат. методы. – 2003. – Т. 39. – Вып. 1. – С. 33 – 49.
17. Крутиков, В. Н. Семейство релаксационных субградиентных методов с двухранговой коррекцией матриц метрики / В. Н. Крутиков, Т. А. Горская // Экономика и мат. методы. – 2009. – Т. 45. – Вып. 4. – С. 37 – 80.

Сведения об авторах:

Вершинин Ярослав Николаевич – аспирант кафедры математической кибернетики КемГУ, 8-960-919-74-13, Azimus88@gmail.com.

Yaroslav N. Vershinin – post-gradiuate student at the Department of Mathematical Cybernetics, Kemerovo State University.

Быков Анатолий Александрович – кандидат физико-математических наук, Лаборатория моделирования геоэкологических систем Института вычислительных технологий СО РАН, Кемеровский филиал, 8-913-123-03-70, bykov@icc.kemsc.ru.

Anatoly A. Bykov – Candidate of Physics and Mathematics, Laboratory of Geo-Ecological Systems Modelling, Kemerovo Division of Institute of Computational Technologies of the Siberian Branch of the RAS.

Крутиков Владимир Николаевич – доктор технических наук, профессор кафедры математической кибернетики КемГУ, 8-905-077-53-48, krutikovvn@gmail.com.

Vladimir N. Krutikov – Doctor of Techniocal Science, Professor at the Department of Mathematical Cybernetics, Kemerovo State University.

Мешечкин Владимир Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики КемГУ, 8-3842-54-25-09, vvm@kemsu.ru.

Vladimir V. Meshechkin – Candidate of Physics and Mathematics, Assisatnt Professor at the Department of Mathematical Cybernetics, Kemerovo State University.

Статья поступила в реколлегию 23.12.2013 г.