



ÇEKİ DEMİRİNDE SONLU ELEMANLARLA ELASTO-PLASTİK GERİLME ANALİZİ

Adnan ATICI*, Muammer NALBANT, Adnan Özel*****

*Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir Meslek Yüksekokulu, Makina Programı, İzmir

** Gazi Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Makina Eğitimi Bölümü, Ankara

*** Atatürk Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Erzurum

ÖZET

Bu çalışmada çeki demirindeki gerilme analizi sonlu elemanlar metoduyla yapılmıştır. Sonlu eleman modelinin kurulmasında dört düğümlü izoparametrik elemanlar kullanılmış olup interpolasyon fonksiyonu olarak ise Lagrange polinomları alınmıştır. Eleman ağının oluşturulması için ayrı bir program yapılmış ve elemanlar otomatik olarak elde edilmiştir. Sonlu elemanlar için de özel bilgisayar programı geliştirilmiştir. Ele alınan çeki demirinde artık gerilmeleri hesaplayabilmek için elasto-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Elasto plastik gerilme analizinde yüklemeler 400 daN'dan 1000 daN'a kadar 100 daN'luk artışlarla yüklenerek gerilme değerleri hesaplanmıştır. Bu analizde "Başlangıç gerilmesi metodu" kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Elasto-plastik gerilme analizi, Sonlu elemanlar yöntemi

ELASTO-PLASTIC FINITE ELEMENT ANALYSIS OF HOOK'S JOINT

ABSTRACT

In this study, stress analysis has been done in Hooke's joint by the finite element method. In finite element meshing, isoparametric quadrilateral elements with four nodes has been chosen and Lagrange polynomial has been used as the interpolation function. The special computer program has been written for the automatic mesh generation. In addition the other program has been developed to solve the finite element problems. Elasto-plastic stress analysis is done to calculate the residual stresses in hooke's joint. Elasto-plastic stress values are calculated under loading from 400 daN to 1000 daN with increment of 100 daN. In this analysis "The initial stress method" is used.

Key Words: Elasto-plastic stress analysis, Finite element method

1. GİRİŞ

Mühendislik problemlerinin pek çoğunda çalışma şartları, yükleme durumları, yapı ve deney hataları kesin olarak bilinemez. Bu yüzden çoğu zaman bir kısım düzenleme parametrelerine başvurmak gerekir. Genellikle deney sonuçları ile aynı değerlerin elde edilebildiği yaklaşık çözümleme teknikleri kolaylık, ucuzluk gibi özellikleri sebebiyle tercih edilir. Yaklaşık çözüm yöntemlerinden biri olan Sonlu Elemanlar Yöntemi özellikle son yıllarda çok hızlı işlem yapan bilgisayarların etkinliği ile büyük gelişmeler göstererek kesin çözümlere yakın

neticeler veren ve ilgililerce geçerli bir çözüm tekniği olduğu kabul edilen nümerik bir yöntemdir. Bu yöntemle bir çok bilim dalında değişik problemler ele alınıp çözülmüştür.

Ortotropik yapıdaki iki boyutlu elemanlarda gerilme analizi üçgen elemanlar kullanılarak sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmiştir (Nakamura 1984).

Sonlu elemanlarla çeşitli makina elemanlarındaki gerilme analizi için Galarkin yaklaşımı ve potansiyel enerji prensibi üzerinde çalışılarak çözüm bölgesini CAD sistemleri ile entegre edilerek mühendislik

uygulamalarına elastik bölgede önemli kolaylıklar getirilmiştir (Chandrupatla 1991, Ashok 1991).

İki ve üç boyutlu elasto-plastik davranışları, geliştirilen başlangıç gerilmesi yöntemi ile izah edilmiş ve bunun sonlu elemanlarla çözümleri gösterilmiştir (Zienkiewicz 1979).

Sonlu elemanlar yöntemi ile transmisyon zincirlerinin yan plakalarında gerilme analizi yapılarak pim delikleri civarında gerilme dağılımları ortaya konulmuştur (Topcu 1991).

Dönen izotropik ve ortotropik disklerde sonlu elemanlar yöntemi ile izoparametrik elemanlar kullanarak geliştirilen özel bilgisayar programı ile gerilme analizi yapılmıştır (Karakuzu, Sayman 1994).

Bu çalışmada çeki demirinde elasto-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Çeşitli yükleme durumlarına göre plastik bölgenin yayılışı gösterilmiştir. Kritik kesitlerde çeşitli yükleme durumlarına göre elasto-plastik gerilme dağılımı verilmiştir.

2. ELASTO-PLASTİK GERİLME HESABI

Malzemelerin elasto-plastik gerilme hesabı için çeşitli yöntemler vardır. Genelde üç temel prensibe dayanır (Mahapatra and Rasgupta 1988).

- Direngelik matrisi değişimi yöntemi,
- Başlangıç şekil değişimi yöntemi,
- Başlangıç gerilme yöntemi.

Direngelik matrisi değişimi yöntemi, plastik deformasyon bölgesinde her iterasyon sonunda direngelik matrisinin yeniden hesaplanmasını gerektirir. Bu da problem çözüme süresini uzattığı için pek tercih edilmez.

Başlangıç şekil değişimi yönteminde elastik olarak hesaplanmış gerilme için malzemenin gerçek davranışına uygun bir elasto-plastik başlangıç şekil değiştirmesi aranır (Almen and Black 1963).

Yöntem, akma başladıktan sonra da mukavemet artışı devam eden malzemeler için geliştirildiğinden, ϵ_0 'ın tanımlanamadığı durumlarda bu yöntem kullanılmaz. İdeal elastoplastik malzemelerde olduğu gibi.

Başlangıç gerilme yöntemi ise, alternatif çözüm yöntemi olarak geliştirilmiştir (Zienkiewicz 1979). Bu yöntemde tek boyutlu bir çekme numune parçası ele alınmış, elasto-plastik bölge, iki ve üç boyuta uyarlanarak çok eksenli gerilme durumu için

genelleştirilmiştir. Tek boyutlu bir numune parçası yüklendiğinde elastik bölge bitiminde $\epsilon_{top} = \epsilon_1$ olur.

Gerilme σ_x linear elastiki olarak hesaplanır ve Şekil 1'de görüldüğü gibi σ_{s1} aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\sigma_{01} = \sigma_x - \sigma_{s1} = \sigma_1 - \sigma_{s1} \quad (1)$$

Başlangıç gerilmesi σ_{01} kullanılarak artımlı gerilme değeri,

$$\sigma_2 = \sigma_x + \sigma_{01} \quad \text{olur.} \quad (2)$$

İki boyutlu durumda gerilme hesabı için genellikle Von Mises kriterine (Distorsiyon Enerji Teorisi) göre eşdeğer gerilmeler belirlenir. Düzlem eşdeğer gerilme durumunda, eşdeğer gerilme için;

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \right] + 3\tau_{xy}^2 \right\}} \quad (3)$$

yazılabilir. Burada σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleridir. Bu durumda plastik bölgede tek boyutlu gerilmelerde başlangıç gerilmesi için ;

$$\sigma_0 = \bar{\sigma} - \sigma_s \quad \text{yazılabilir.} \quad (4)$$

Burada başlangıç gerilmesini vektörel olarak belirleyemeyiz, ancak matematiksel olarak şu şekilde tanımlanması mümkündür (Mahapatra and Resgupta 1988).

$$\{\sigma_0\} = \{\sigma_{0x} \sigma_{0y} \tau_{0xy}\} \quad (5)$$

Burada σ_{0x} , σ_{0y} ve τ_{0xy} düzlem gerilmelerde başlangıç gerilme bileşenleridir.

Aşağıdaki denklem kullanılarak başlangıç gerilmesi bileşenleri $\{\sigma_0\}$ orantılı olarak elastik bölgede hesap edilebilir.

$$\{\sigma_0\} = \{\sigma\} \frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}} \quad (6)$$

Tek eksenli gerilme durumunda her iterasyondaki eşdeğer gerilme miktarı $\{\sigma_0\}$ ' a eşittir (denk. 1). Bu durumda denklem 3 aşağıdaki gibi yazılabilir.

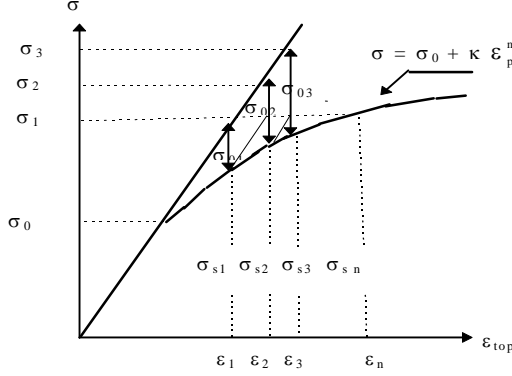
$$\bar{\sigma} = \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_{ox} - \sigma_{oy})^2 + \sigma_{ox}^2 + \sigma_{oy}^2 \right] + 3\tau_{oxy}^2 \right\}} \quad (7)$$

Başlangıç gerilmesi için yükleme durumu;

$$\{P\}_{\sigma_0} = \int_v [B]^T \{\sigma_0\} dV \quad (8)$$

şeklinde ifade edilebilir.

İlk çözüm $\{P\}_{\sigma_0}$ için hesaplanır. İlk iterasyon adımında mekanik yükleme durumu için;



Şekil 1 Başlangıç gerilme yönteminin prensip şeması (Newton Raphson Metodu)

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \{P\}_m \quad (9)$$

yazılabilir. Burada $\{P\}_m = \{P\} + \{P\}_{\sigma_0}$ dir. Takip eden iterasyon adımları $\{\delta\}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ olarak $\{\delta\}_i$ ve $\{\delta\}_{i+1}$ arasındaki fark kapanıncaya kadar hesaplanır. Bu durumda deplasman vektörü için ;

$$\{\delta\}_n = [K]^{-1} \{P\}_m \quad (10)$$

yazılabilir.

Netice olarak elasto plastik bölgede σ_n gerilmesi ve $\{\delta\}_n$ ilişkisi kurularak;

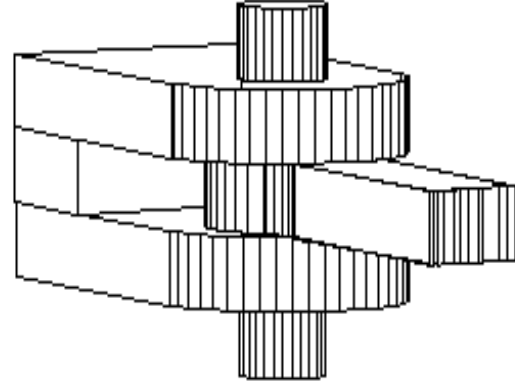
$$\{\sigma_n\} = [C] [B] \{\delta\}_n - \{\sigma_{oi}\} \quad (11)$$

yazılabilir.

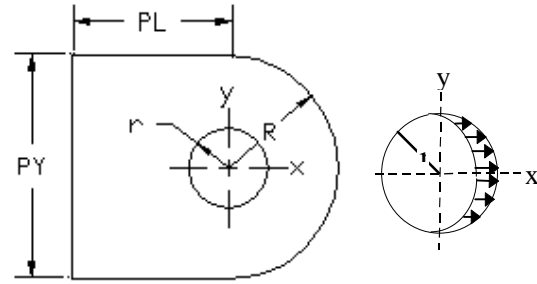
Son iterasyon adımında kalıcı gerilmeler ise aşağıdaki bağıntı ile belirlenir.

$$\{\sigma\}_{rs} = \{\sigma_n\} - \{\sigma_e\} \quad (12)$$

Burada $\{\sigma\}_e$ lineer elastik gerilmedir.



Şekil 2 Sistemin genel görünüşü



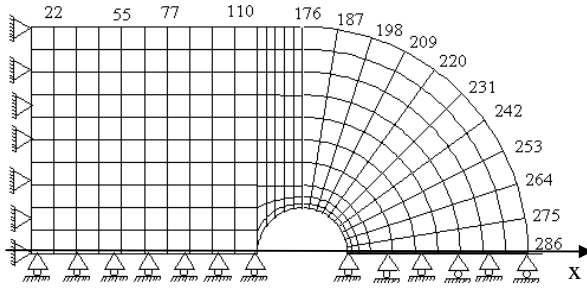
Şekil 3 Çözüm bölgesi ve delik çevresinde kuvvetlerin yayılması

3. SONLU ELEMAN MODELİ

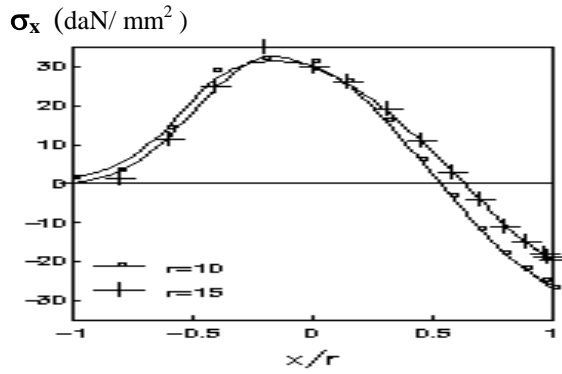
Çözüm bölgesinin genel görünüşü Şekil 2 de verilmiştir. Burada çözüm bölgesinin sonlu elemanlar modeli için çeki demirinin tek plakası ele alınmıştır (Şekil 3) ve şekil bakımından simetrik olması sebebiyle yarısı modellenmiştir (Şekil 4).

Çözüm bölgesi düzlem gerilme problemi olarak ele alınmıştır. Ele alınan levha kalınlığı az olduğu için eğilmeden dolayı meydana gelebilecek gerilmeler ihmal edilmiştir. Bu düzlem gerilme probleminin çözümünde dört düğümlü dörtgen eleman kullanılmıştır. Model; 250 eleman, 286 düğümden oluşturulmuştur. Düğümlerin serbestlik derecesi ikidir (u,v). Çözüm bölgesinin sonlu elemanlar ağının oluşturulması için bilgisayar programı yazılmıştır. Çözüm bölgesi boyutları, eleman sayısı ve düğüm sayısı değişken olarak programlanmıştır. Şeklin simetri ekseninin sol köşesi referans nokta olarak alınmıştır. Yani bu köşeye 1 nolu eleman ve düğüm numarası verilmiştir .

y



Şekil 4 Çözüm bölgesinin sonlu elemanlara bölünmesi ve eleman düğüm numarası düzeni



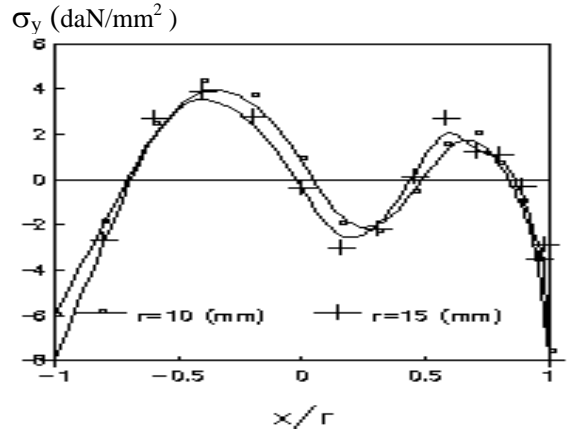
Şekil 5 Delik yüzeyindeki σ_x gerilmeleri

4. SAYISAL ÇÖZÜMLER

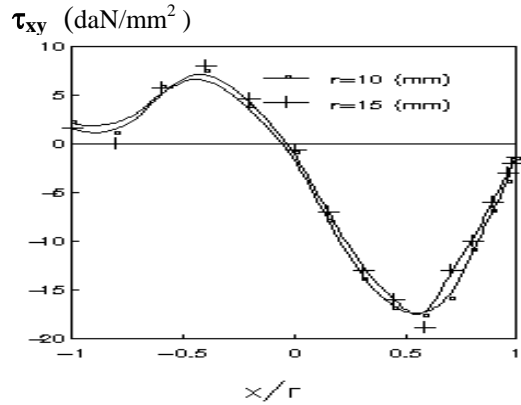
Bu çalışmada Ç1040 malzemesi kullanılmıştır. Malzemeye ait özellikler Dokuz Eylül Üniversitesi Makina Fakültesi mekanik laboratuvarında Instron cihazı ile aşağıdaki değerlerde belirlenmiştir.

$$\sigma_y = 427 \text{ (MPa)}, \sigma_0 = 270 \text{ (MPa)}, \\ K = 1692 \text{ (MPa)}, n = 0.531$$

Parça dış ölçüleri (PY= 80mm , PL= 50mm), yük (700 daN), eleman sayısı (250) ve düğüm sayısı (286) aynı kalmak suretiyle delik yarıçapları 10 mm. ve 15 mm. olmak üzere değiştirilerek delik yüzeyinde meydana gelen elasto-plastik gerilme dağılımları Şekil 5'de σ_x , Şekil 6'da σ_y ve Şekil 7'de τ_{xy} verilmiştir. Grafiklerdeki x/r oranı delik x eksenindeki herhangi bir uzaklığın delik yarı çapına oranı şeklinde verilmiştir (Şekil 8). Çeki demirinin çalışma şartları gözönüne alınarak uygulanan kuvvetler x ekseninde içbasınç şeklinde uygulanmıştır. Yüklerin yayılışı dairesel yüzeyde Şekil 3'te analitik olarak gösterilmiştir.



Şekil 6 Delik yüzeyindeki σ_y gerilmeleri



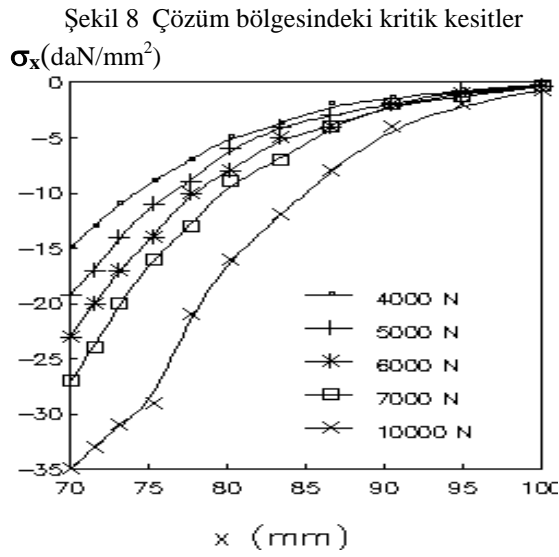
Şekil 7 Delik yüzeyindeki τ_{xy} gerilmeleri

Şekil 5'de görüldüğü gibi delik yarıçapı 10 mm için en büyük elasto-plastik gerilmeler (σ_x); 32.012 daN/ mm² çekme gerilmesi ve - 27.18 daN/mm² basma gerilmesi olarak meydana gelmiştir. 15 mm yarıçaplı delikte en büyük gerilmeler ise; 35.20 daN/mm² çekme gerilmesi ve -19.82 daN/mm² basma gerilmesi olarak belirlenmiştir. σ_y ve τ_{xy} gerilmeleri, σ_x 'e göre daha küçük değerlerde ve farklı formlarda ortaya çıktığı Şekil 6 ve Şekil 7'de görülmektedir.

Elasto-plastik gerilmelerin elde edildiği A-A ve B-B kesitleri Şekil 8'de gösterilmiştir. A-A kesitinde çeşitli yükleme durumlarına göre meydana gelen elasto-plastik gerilme değerleri (Şekil 9'da σ_x Şekil 10'da σ_y ve Şekil 11'de τ_{xy}) verilmiştir. Bu çözüm bölgesi için delik yarıçapı 10 mm alınmıştır. Uygulanan kuvvetler x eksenini doğrultusunda iç basınç şeklinde uygulanmıştır.

Şekil 9'da görüldüğü gibi delik çevresinde σ_x gerilmeleri en büyük değerde basma gerilmesi olarak ortaya çıkmıştır, delikten uzaklaştıkça (A-A kesiti boyunca) bu gerilme değerleri sıfıra

yaklaşmaktadır. Burada σ_x gerilme yığılmasının delik civarında olduğu görülmektedir.

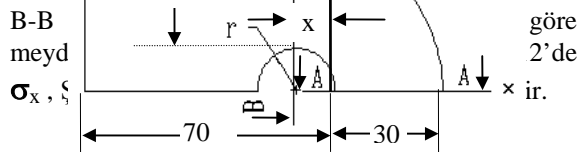


Şekil 9 A-A kesitinde çeşitli yüklemeye göre meydana gelen elasto-plastik σ_x gerilmeleri

Şekil 10'da σ_y gerilmeleri delik civarında basma, delikten uzaklaştıkça çekme gerilmeleri şeklinde meydana gelmiştir.

Şekil 11'de τ_{xy} gerilmeleri A-A kesiti boyunca basma gerilmeleri şeklinde meydana gelmektedir.

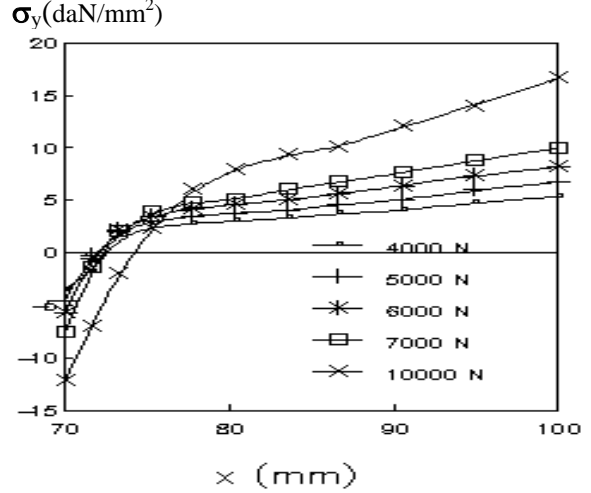
En büyük gerilme delik çevresinde meydana gelir. En büyük gerilme delik çevresinde meydana gelir.



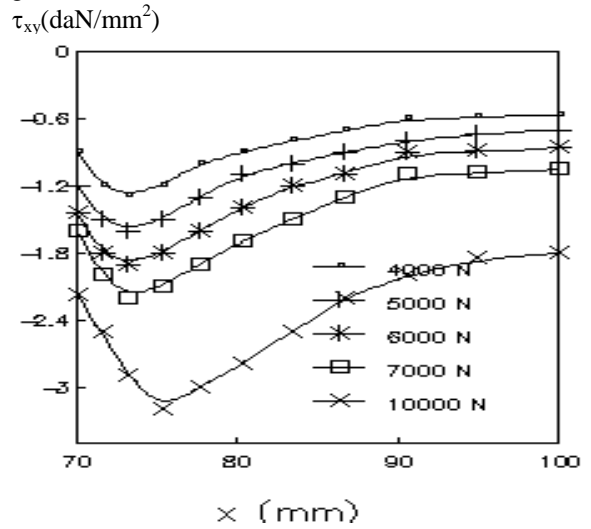
Şekil 12'de görüldüğü gibi delik çevresinde σ_x gerilmeleri en büyük değerde çekme gerilmesi olarak ortaya çıkmıştır, delikten uzaklaştıkça (B-B kesiti boyunca) bu gerilme değerleri azalmaktadır.

Burada σ_x gerilme yığılmasının delik civarında olduğu görülmektedir.

Şekil 13'de σ_y gerilmeleri B-B kesiti boyunca küçük yüklemelerde çekme gerilmesi şeklindedir. Büyük yüklemelerde ise hem çekme hem de basma gerilmesi olarak meydana gelmektedir. En büyük σ_y gerilme değerlerine tam delik çevresinde değil, delik çevresinden dışa doğru geldikçe ulaşmaktadır.



Şekil 10 A - A kesitinde çeşitli yüklemeye göre meydana gelen elasto-plastik σ_y gerilmeleri



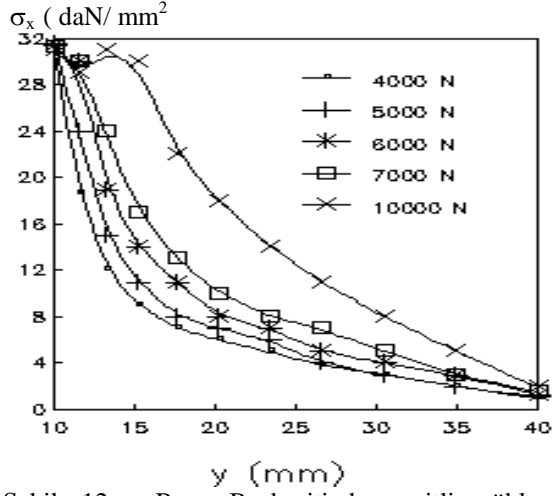
Şekil 11 A - A kesitinde çeşitli yüklemeye göre meydana gelen elasto-plastik τ_{xy} gerilmeleri

Şekil 12'de görüldüğü gibi delik çevresinde σ_x gerilmeleri en büyük değerde çekme gerilmesi olarak ortaya çıkmıştır, delikten uzaklaştıkça (B-B kesiti boyunca) bu gerilme değerleri azalmaktadır.

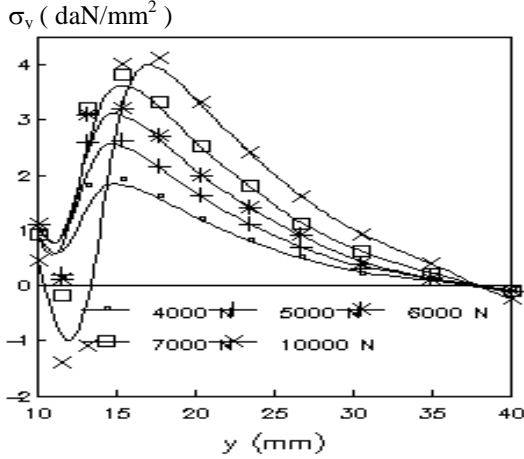
Burada σ_x gerilme yığılmasının delik civarında olduğu görülmektedir.

Şekil 13'de σ_y gerilmeleri B-B kesiti boyunca küçük yüklemelerde çekme gerilmesi şeklindedir. Büyük yüklemelerde ise hem çekme hem de basma gerilmesi olarak meydana gelmektedir. En büyük σ_y gerilme değerlerine tam delik çevresinde değil, delik çevresinden dışa doğru geldikçe ulaşmaktadır.

Şekil 14'de τ_{xy} gerilmeleri B-B kesiti boyunca basma gerilmeleri şeklinde meydana gelmektedir.



Şekil 12 B - B kesitinde çeşitli yüklemelere göre meydana gelen elasto-plastik σ_x gerilmeleri



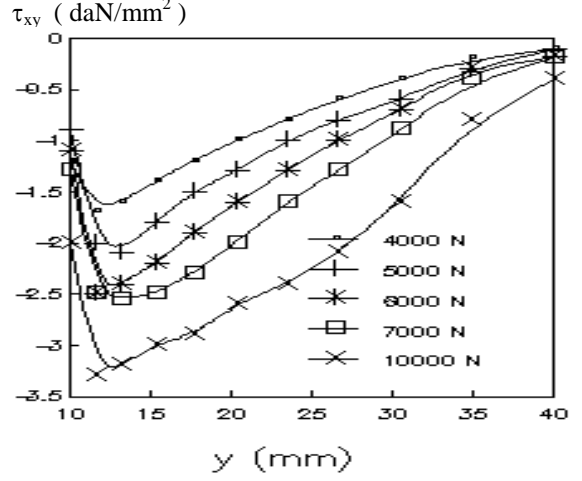
Şekil 13 B-B kesitinde çeşitli yüklemelere göre meydana gelen elasto-plastik σ_y gerilmeleri

En büyük değere tam delik çevresinde değil, delik çevresinden dışa doğru geldikçe ulaşmaktadır. En büyük değere ulaştıktan sonra dışa doğru küçülerek devam etmektedir.

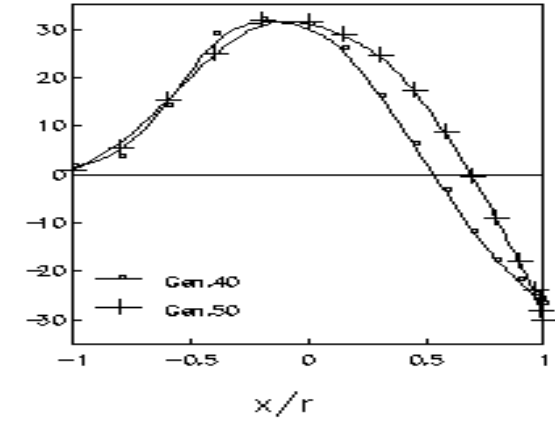
Çözüm bölgesinin genişliği değiştirilerek delik yüzeyinde meydana gelen elasto-plastik gerilme dağılımları Şekil 15'de σ_x , Şekil 16'da σ_y ve Şekil 17'de τ_{xy} verilmiştir. Çözüm bölgesinin genişliği PY 2 = 40 mm ve 50 mm olarak alınmıştır.

Yükleme 700 daN olarak yapılmıştır. Boy (100 mm) ve delik çapları (20 mm) eşit olarak alınmıştır. Modellenen bölgeye ait bu genişlikler grafiklerde Gen. 40 ve Gen. 50 şeklinde gösterilmiştir.

Şekil 15'de görüldüğü gibi genişliği 40 mm. olan çözüm bölgesi için en büyük elasto-plastik gerilmeler (σ_x), 32.012 daN/mm² çekme gerilmesi



Şekil 14 B-B kesitinde çeşitli yüklemelere göre meydana gelen elasto-plastik τ_{xy} gerilmeleri



Şekil 15 Delik yüzeyinde meydana gelen σ_x gerilmeleri

ve -27.18 daN/mm² basma gerilmesi olarak meydana gelmiştir. 50 mm. genişliğindeki çözüm bölgesinde ise en büyük gerilmeler 31.92 daN/mm². çekme gerilmesi ve -30.19 daN/mm² basma gerilmesi olarak belirlenmiştir. σ_y ve τ_{xy} gerilmeleri σ_x 'e göre daha küçük değerlerde ve farklı formlarda ortaya çıktığı Şekil 16 ve Şekil 17'de görülmektedir

Plastik bölgenin yayılışı çözüm bölgesi üzerinde gösterilmiştir (Şekil 18). Yüklemeye x eksen yönünde, 600 daN, 700 daN, 800 daN ve 1000 daN olmak üzere değişen yüklemelerde yapılmıştır. Yüklemeye miktarı arttıkça plastik bölgedeki büyüme görülmektedir. Yapılan bilgisayar programı ile

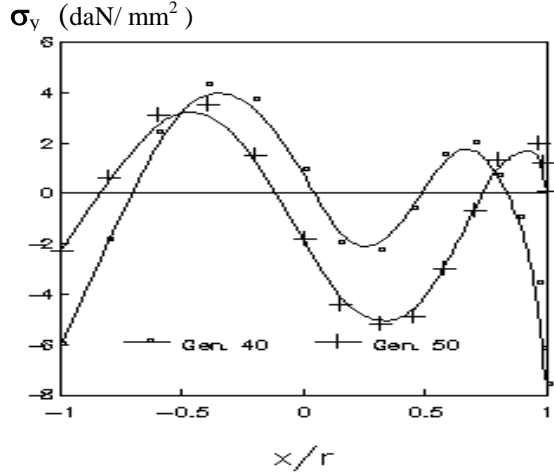
yüklemeye durumuna göre hangi düğümde plastik deformasyon olduğunu belirlemek mümkündür.

Düğümle birleştirilerek her yüklemeye derecesinin sebep olduğu plastik bölge belirlenebilmektedir. Yüklemeye, çalışma esnasındaki yüklemeye durumu göz

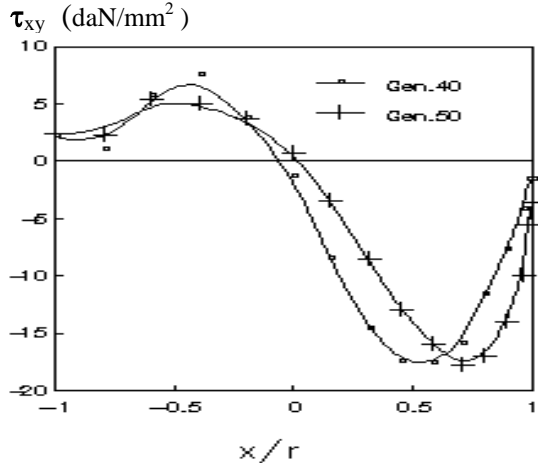
gidilebilir. Delik çevresinden uzak bölgelerde kalınlık düşürülmek suretiyle malzeme tasarrufu yapılabilir

6. KAYNAKLAR

Almen, J.O., Black, P.H., 1963. Residual Stresses and Fatigue in Metals, Mc Graw- Hill Book Company, UK.



Şekil 16 Delik yüzeyinde meydana gelen σ_y gerilmeleri

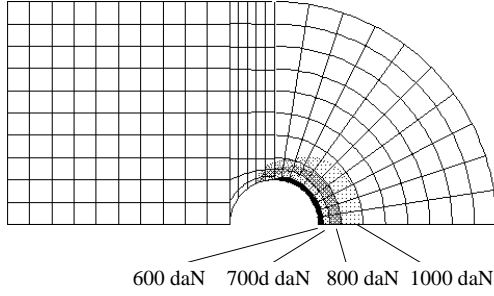


Şekil 17 Delik yüzeyinde meydana gelen τ_{xy} gerilmeleri

önüne alınarak x ekseninde yapıldığı için yük artımında pim zorlanma yönündeki bölgeyi ezmesi biçiminde ortaya çıktığı görülmektedir.

5. SONUÇLAR

Büyük gerilme yığılımları delik çevresinde meydana gelmiştir. Büyük elasto-plastik gerilmeler büyük yüklemelerde ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Elasto-plastik gerilmelerden dolayı meydana gelen artık gerilmelerin mukavemete nasıl etki ettiği belirlenebilir. Delik çapı, parça boyutları ve gerilme yığılımları gözönüne alınarak optimizastona



Şekil 18 Delik çevresinde plastik bölgenin yayılışı

Chandrupatla, T.R., Belegundu, A.D., 1991. Introduction Finite Elements in Engineering, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Karakuzu, R., Sayman, O., 1994. "Elasto-plastic Finite element analysis of orthotropic rotating discs with holes" *Computure and Structure*. vol. 51, No 6, pp. 695-703.

Mahapatra, R.C., Rasgupta, S.P., 1988. "The mixed finite element method in elastic and elasto-plastic axisymmetric problems", *Computure and Structure*, vol.30, No 5, pp.

Nakamura, S., Benedict, Lakes, R., 1984. Finite Element Method for Orthotropic Micropolar Elasticity, *International journal EngineeringSciences*. vol. 22, no. 3, pp. 319-330.

Topcu, M., 1991. "Transmisyon zincirleri yan plakalarında elasto-plastik gerilme analizi", Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, İzmir.

Zinkiewicz, O. C., 1979. The Finite Element Method, McGow- Hill Book Company, London.