



POWER-LAW AKIŞKANI İLE YAĞLANMIŞ EKSENEL KAYMALI YATAKTA BASINÇ VE HIZ DAĞILIMI

Muhammet YÜRÜSOY, Selda AKGÜN, Mehmet PAKDEMİRLİ

Celal Bayar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 45140/Muradiye/Manisa

Geliş Tarihi : 21.01.2000

ÖZET

Bu çalışmada non-Newtonyen bir akışkan olan Power-Law akışkanı ile yağlanmış kaymalı yatak problemi ele alınmıştır. Çalışmada önce akışkana ait hareket denklemleri çıkartılmıştır. Denklemlerin çözümü için perturbasyon tekniği kullanılmıştır. Çözümde en basit perturbasyon açılımı olan yaya açılımı kullanılmıştır. Perturbasyon açılımı ile önce hız dağılımı sonra da basınç dağılımı yaklaşık olarak bulunmuştur. Bulunan bu sonuçlar boyutsuzlaştırılarak uygun bir formda ifade edilmiştir. Non-Newtonyen karakterin artmasıyla ve yatak boyutlarının değişmesiyle hız ve basınç dağılımının nasıl bir değişim gösterdiği çizilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Power-Law akışkanları, Kayar yatak

SUMMARY

PRESSURE AND VELOCITY DISTRIBUTION IN A SLIDER BEARING LUBRICATED WITH POWER-LAW FLUID

In this study, a slider bearing lubricated with a non-Newtonian fluid namely a Power-Law fluid is considered. First the equations of motion are derived. Perturbation methods are employed in search of approximate solutions. The simplest perturbation expansion, namely the pedestrian expansion, is used. The velocity distribution and the pressure distribution are calculated approximately. The solutions are expressed in dimensionless form for convenience. The variation of pressure and velocity with the non-Newtonian behaviour and bearing dimensions are plotted.

Key Words: Power-Law fluids, Slider bearing

1. GİRİŞ

Yatakların yağlanması önemli bir teknolojik problemdir. Yatak içerisindeki hız ve basınç dağılımının bilinmesi yatağın verimli çalışabilmesi için önemlidir. Literatürde Newtonyen akışkanlarla ilgili bir çok çalışma mevcuttur. Fakat non-Newtonyen akışkanlarla ilgili çalışmalar ise çok fazla değildir.

Bu çalışmada Power-Law akışkanı ile kaymalı bir yatağın yağlanması ele alınacaktır. Power-Law akışkanları için gerilme aşağıdaki gibi yazılabilir (Pakdemirli, 1993) ;

$$T = -pI + \mu_1 A + \mu_2 (\text{tr} A^2)^m A \quad (1)$$

Denklem (1)'de T gerilme tensörü, p basınç, μ_1 viskozite, μ_2 Power-Law akışkanına ait sabit, A Rivlin-Ericksen tensörüdür. L ve A aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

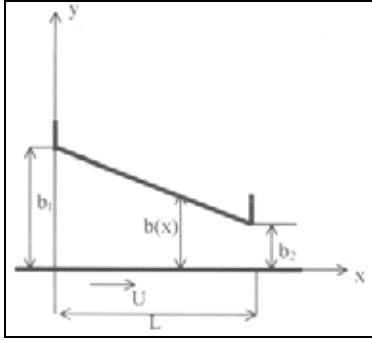
$$\begin{aligned} L &= \text{grad } v \\ A &= L + L^T \end{aligned} \quad (2)$$

Burada $v = (u, v)$ hız vektörüdür. Kaymalı yatakların non-Newtonyen akışkanlarla yağlanması ile ilgili bazı çalışmalar şöyledir. Ng ve Saibel (1962) özel bir üçüncü derece akışkana ait kaymalı yatak

içerisindeki akışı inceledi. Harnoy ve Hanin (1974), Harnoy ve Philippoff (1976) kaymalı yatak içerisindeki ikinci derece akışı incelediler. Bourgin ve Gay (1983), Ng ve Saibel (1962)'inkine benzer bir model kullanarak kaymalı yatak içerisindeki akış karakteristikliğini araştırdılar. Buckholz (1985) Power-Law akışkan modelini kullanarak kaymalı yatak problemini ele aldılar. Son zamanlarda Kacou et al., (1987) kaymalı yatak içerisinde üçüncü derece akışkan akışını perturbatif bir çözüm ile ele aldı. Benzeri bir çalışmada Kacou et al., (1988) termal etkileri de hesaba katarak bu çalışmayı genişletti.

2. HAREKET DENKLEMLERİ

Şekil 1'de bir kaymalı yatak modeli görülmektedir. Denklemlerin çıkartılması için süreklilik ve lineer momentum denklemleri aşağıdaki gibi yazılır



Şekli 1. Kaymalı yatak modeli

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div} \mathbf{T} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (4)$$

Şekil 1'de gösterilen yatak açıklığı (b) çok küçüktür. Yatak boyu L ise b'ye göre çok büyük bir parametredir. Ayrıca yatak genişliği yeterince büyük olup iki boyutlu akış özelliklerini sağlayacak niteliktedir. Eğer $\delta = b/L$ şeklinde bir boyutsuz parametre tanımlarsak bu parametre çok küçük bir parametre olacaktır. Bu parametreye göre x koordinatı 1 mertebesinde y koordinatı ise δ mertebesinde olur. Hız ifadeleri ve basınç δ 'ya göre seriye açılır ise,

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \delta u_1 + \dots \\ v &= \delta v_0 + \delta^2 v_1 + \dots \\ p &= \frac{1}{\delta} p_0 + p_1 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

elde edilir. Bu açılımlar denklem (3) ve (4)'te yerine konursa

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p_0}{\partial x} \frac{1}{\delta} + \frac{\mu_1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\ + \frac{\mu_2}{\delta^{2m+2}} \left(2^m 2m \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{2m} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2^m \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{2m} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho \delta \left(u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p_0}{\partial y} \frac{1}{\delta^2} + \frac{\mu_1}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ + \frac{\mu_2}{\delta^{2m+2}} \left(2^m 2m \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{2m} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + 2^m \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{2m} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Yukarıdaki denklemlerde yalnızca mertebeye en büyük terimler alınarak hareket denklemleri elde edilecektir. Bunun için μ_1 'in δ mertebesinde, μ_2 'nin δ^{2m+1} mertebesinde olduğunu kabul ediyoruz. Bu kabuller altında (6)-(8) denklemleri aşağıdaki formu alırlar.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{dP}{dx} = \mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu_2 \left(2^m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (2m+1) \right) \quad (10)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P = P(x) \quad (11)$$

Süreklilik denklemindeki en büyük terimler 1, x yönündeki momentum denklemindeki en büyük terimler $1/\delta$, y yönündeki momentum denklemindeki en büyük terimler $1/\delta^2$ mertebesinde ve sadece bu terimler dikkate alınmıştır. Denklemlerde "0" indisi sadelik açısından yazılmamıştır. Kayar yatak problemi için sınır şartlarımız ise şöyledir.

$$u(0) = U, \quad u(b) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(b) = 0 \quad (12)$$

3. HIZ PROFİLİNİN BULUNMASI

Bu bölümde hız profili yaklaşık olarak hesaplanacaktır. Hesaplamaya geçmeden önce aşağıdaki kabulü yapıyoruz

$$\mu_2 = \varepsilon \mu_1 \quad (13)$$

Burada ε küçük bir parametredir. x yönündeki yaklaşık hız profilini aşağıdaki gibi yazalım.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 \quad (14)$$

Denklem (10) seriye açılmadan önce bir kez integre edilirse

$$\mu_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_2 2^m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{2m+1} = \frac{dp}{dx} y + c \quad (15)$$

ifadesi elde edilir. Burada c sabittir. Denklem (13) ve (14)'ü denklem (15)'e yerleştirilip 1 ve ε mertebesi ayrıştırılırsa denklemler aşağıdaki gibi olur

1 Mertebesi :

$$\mu_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{dp}{dx} y + c_0$$

$$u_0(0) = U, \quad u_0(b) = 0 \quad (16)$$

ε Mertebesi :

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \mu_1 2^m \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{2m+1} = c_1$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_1(b) = 0 \quad (17)$$

Denklem (15) seriye açılırken c sabiti $c = c_0 + \varepsilon.c_1$ şeklinde seriye açılmıştır. Denklem (16) problemin Newtonyen kısmının çözümüdür ve çözümü çok iyi bilinmektedir (Streeter ve Wylie 1983; White 1991).

$$u_0 = \frac{y^2 - by}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} + U \left(1 - \frac{y}{b} \right) \quad (18)$$

Denklem (18) denklem (17)'de yerine yazılıp integre edilirse,

$$u_1 = -\frac{2^m \mu_1}{(2m+2) \left(\frac{dp}{dx} \right)} \left\{ \frac{y}{b} \left[- \left(\frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right)^{2m+2} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(- \frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right)^{2m+2} \right] + \left[\frac{2y - b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right]^{2m+2} \right\} \\ - \left[- \frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right]^{2m+2} \quad (19)$$

elde edilir. Sonuçta u hızı şöyle olur.

$$u = \frac{y^2 - by}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} + U \left(1 - \frac{y}{b} \right) - \frac{2^m \mu_1 \varepsilon}{(2m+2) \left(\frac{dp}{dx} \right)} \\ \left\{ \frac{y}{b} \left[- \left(\frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right)^{2m+2} + \left(- \frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right)^{2m+2} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{2y - b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right]^{2m+2} - \left[- \frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right]^{2m+2} \right\} \quad (20)$$

Böylece hız profili elde edilmiş oldu. Bundan sonraki bölümde ise basınç dağılımı yaklaşık olarak bulunacaktır.

4. BASINÇ DAĞILIMININ BULUNMASI

Önceki bölümde bulunan hız dağılımının türevi ve süreklilik denklemi kullanılarak basınç dağılımı bulunacaktır.

$v(0) = v(b) = 0$ sınır şartları altında y koordinatı boyunca süreklilik denklemini integre edelim.

$$\int_0^b \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = -v(b) + v(0) = 0 \quad (21)$$

Buradan da

$$\int_0^b \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0 \quad (22)$$

elde edilir. Denklem (20) denklem (22)'de yerine yerleştirilip gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{d}{dx} \left(b^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu_1 U \frac{db}{dx} \\ - \frac{2^{m+1} 2\mu_1^2 \varepsilon}{(2m+2) \left(\frac{dp}{dx} \right)} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{b}{2} \left[- \left(\frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right)^{2m+2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(- \frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right)^{2m+2} \right] \right] \right\} \\ + \frac{d}{dx} \left[\frac{\mu_1}{(2m+3)} \frac{dp}{dx} \left(\frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right)^{2m+3} \right] \\ - \frac{d}{dx} \left[\left(- \frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right)^{2m+2} \right] \\ - \frac{d}{dx} \left[\frac{\mu_1}{(2m+3)} \frac{dp}{dx} \left(- \frac{b}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{b} \right)^{2m+3} \right] \quad (23)$$

ifadesi elde edilir. Basınç dağılımı ile ilgili bu denklem orijinal olup literatürde bulunmamaktadır. Şimdi de basınç dağılımı yaklaşık olarak bulunacaktır. Sınır şartları şöyledir.

$$p(0) = p(L) = p_\infty \quad (24)$$

Burada p_∞ yatak dışındaki basınçtır. Film kalınlığı ise aşağıdaki gibi doğrusal bir değişim göstermektedir.

$$b = b_1 - \alpha x \quad \alpha = \frac{b_1 - b_2}{L} \quad (25)$$

Denklem (23) perturbasyon serisine açılarak basınç dağılımı bulunacaktır. Ancak denklem (23) çok karmaşık olduğundan hem seriye açılımı zor, hem de açılımdan sonra elde edilen ifadelerin integre edilmesi mümkün olmadığından problemin bundan

sonraki kısmında özel bir durum olan $m = 0.5$ alınarak işlemlere devam edilecektir.

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 \quad (26)$$

$m=0.5$ için denklem (23) aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{d}{dx} \left(b^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu_1 U \frac{db}{dx} - \varepsilon \left[2\sqrt{2}U \frac{d}{dx} \left(b^2 \frac{dp}{dx} \right) \right] \quad (27)$$

Denklem (26) denklem (27)'ye yerleştirilip 1 ve ε mertebesi ayrıştırılırsa

1 mertebesi

$$\frac{d}{dx} \left(b^3 \frac{dp_0}{dx} \right) = 6\mu_1 U \frac{db}{dx} \quad (28)$$

$p_0(0) = p_\infty, \quad p_0(L) = p_\infty$

ε mertebesi

$$\frac{d}{dx} \left(b^3 \frac{dp_1}{dx} \right) = -2\sqrt{2}U \frac{d}{dx} \left(b^2 \frac{dp_0}{dx} \right) \quad (29)$$

$p_1(0) = 0, \quad p_1(L) = 0$

elde edilir. Denklem (28)'nin sınır şartlarıyla beraber çözümü aynı zamanda problemin Newtonyen kısmının da çözümüdür ve literatürde mevcuttur (Streeter and Wylie, 1983; White, 1991).

$$p_0 = \frac{6\mu_1 U x (b - b_2)}{b^2 (b_1 + b_2)} + p_\infty \quad (30)$$

Denklem (30) denklem (29)'da yerine yerleştirilir, gerekli çözümler yapılırsa,

$$p_1 = \frac{8\sqrt{2}\mu_1 U^2 L x (b_1 - b_2)(x - L)(2b_1 L + b_2 L - b_1 x + b_2 x)}{(b_1 + b_2)^2 (b_1 L - b_1 x + b_2 x)^3} \quad (31)$$

olarak bulunur. Denklem (31) ve (30) denklem (26)'da yerine konursa basınç ifadesi yaklaşık olarak bulunur.

$$p = p_\infty + \frac{6\mu_1 U x (b - b_2)}{b^2 (b_1 + b_2)} + \varepsilon \left[\frac{8\sqrt{2}\mu_1 U^2 L x (b_1 - b_2)(x - L)(2b_1 L + b_2 L - b_1 x + b_2 x)}{(b_1 + b_2)^2 (b_1 L - b_1 x + b_2 x)^3} \right] \quad (32)$$

5. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde basınç ve hız ifadeleri boyutsuz hale getirilerek grafikleri çizilecek ve bu grafik sonuçları

yorumlanacaktır. Basınç ifadesi aşağıdaki gibi boyutsuzlaştırılmıştır.

$$\frac{p - p_\infty}{\mu_1 U L / b_1^2} = \frac{\frac{6x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right)}{\left(1 + \frac{b_2}{b_1} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right) \frac{x}{L} \right)^2} + k \left[\frac{8\sqrt{2} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \left(2 + \frac{b_2}{b_1} - \frac{x}{L} + \frac{b_2 x}{b_1 L} \right)}{\left(1 + \frac{b_2}{b_1} \right) \left(1 - \frac{x}{L} + \frac{b_2 x}{b_1 L} \right)} \right] \quad (33)$$

k aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$k = \frac{\varepsilon U^2}{b_1^2} \quad (34)$$

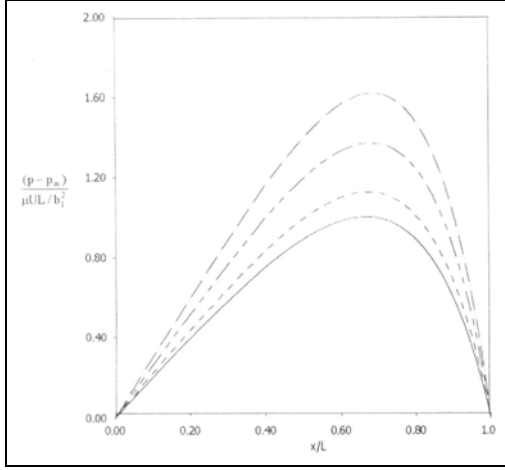
Hız ifadesi ise şu şekilde boyutsuz olarak elde edilmiştir.

$$\frac{u}{U} = \frac{\left(1 - \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right) \frac{x}{L} \right)^2 \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) \frac{dp^*}{dx^*} + \left(1 - \frac{y}{b} \right)}{2} + \sqrt{2}k \left[\frac{\left(1 - \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right) \frac{x}{L} \right)^3 \left(\frac{-2y^3}{b^3} + \frac{3y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{dp^*}{dx^*} \right)^2}{6} + \left(1 - \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right) \frac{x}{L} \right) \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) \frac{dp^*}{dx^*} \right] \quad (35)$$

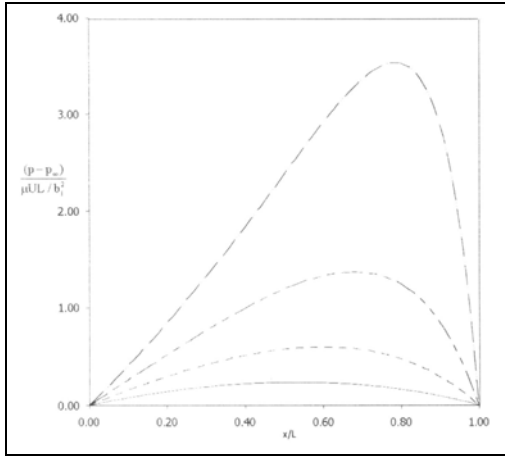
Denklemdaki boyutsuz basınç ifadesinin (yıldız işaretli olanlar), boyutlu basınç ifadesi ile ilişkisini aşağıdaki şekilde tanımlamak mümkündür.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp^*}{dx^*} \frac{\mu_1 U}{b_1^2} \quad (36)$$

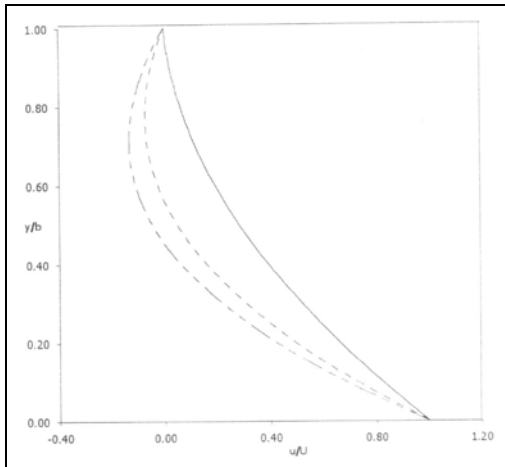
Şekil 2'de boyutsuz basınç ifadesinin yatak boyunca değişimi görülmektedir. $K = 0$ Newtonyen akışkana karşılık gelmektedir. Yatak içinde non-Newtonyenliğin artmasıyla basıncın arttığı görülmektedir. Bu da yatağın yük taşıma kapasitesinin arttığı anlamına gelmektedir. Şekil 3'te ise yatak boyutlarına göre basınç değişimi görülmektedir. b_2/b_1 oranı arttıkça basınç azalmaktadır. Şekil 4'te ise hız değişimi görülmektedir. Grafikten de görüleceği üzere yatak içinde ters akış mevcuttur. Ters akış Newtonyen olmayan karakterin artmasıyla daha da artmaktadır.



Şekil 2. Boyutsuz basınç ifadesinin yatak boyunca k' ya göre değişimi ($b_2/b_1 = 0.5$, — $k = 0$, --- $k = 0.01$, --- $k=0.03$, — $k=0.05$)



Şekil 3. Boyutsuz basınç ifadesinin yatak boyunca b_2/b_1 oranına göre değişimi ($k = 0.03$, — $b_2/b_1 = 0.3$, --- $b_2/b_1=0.5$, --- $b_2/b_1 = 0.7$, — $b_2/b_1 = 0.9$)



Şekil 4. $b_2/b_1 = 0.3$ için $x = L/2'$ de değişik k için hız değişimi (— $k=0$, --- $k = 0.06$, — $k = 0.08$)

6. SEMBOLLER LİSTESİ

\mathbf{T}	-Gerilme tensörü
p	-Basınç
\mathbf{I}	-Birim matris
μ_1	-Viskozite
μ_2	-Power-Law akışkanına ait sabit
\mathbf{A}	-Rivlin-Ericksen tensörü
\mathbf{v}	-Hız vektörü
\mathbf{L}	-Hız gradyanı
L	-Yatak uzunluğu
b	-Yatak açıklık fonksiyonu
b_1	-Yatağın solundaki açıklık
b_2	-Yatağın sağındaki açıklık
u	-x yönündeki hız bileşeni
v	-y yönündeki hız bileşeni
U	-Hareketli yüzeyin hızı
ε	-Perturbasyon parametresi
u_0	-Perturbasyon açılımında birinci mertebedeki hız
u_1	-Perturbasyon açılımında ikinci mertebedeki hız
α	-Göreceli yatak açıklık parametresi $(b_1-b_2)/L$
p_∞	-Yatak dışındaki basınç
p_0	-Perturbasyon açılımında birinci mertebedeki basınç
p_1	-Perturbasyon açılımında ikinci mertebedeki basınç
k	-Boyutsuz non-Newtonyenlik katsayısı
$\frac{dp^*}{dx^*}$	-Boyutsuz basınç gradyanı

7. REFERANSLAR

Bourgin, P. and Gay B. 1983. Determination of the Load Capacity of a Finite Width Journal Bearing by a Finite-Element Method in Case of a Non-Newtonian Lubricant, -ASME Paper, No. 83-Lub. 28.

Buckholz, R. H. 1985. Effects of Power-Law Non-Newtonian Lubricants on Load Capacity and Friction for Plane Slider Bearing. -ASME Paper No. 85-Trib-23.

Harnoy, A. and Hanin M. 1974. Second Order, Elastico-Viscous Lubricants in Dynamically Loaded Bearings. -ASLE Trans, 17 (3), 166-171.

Harnoy, A. and Philippoff W. 1974. Investigation of Elastico-Viscous Hydrodynamic Lubricant of the Bearing. -ASLE Trans, 19 (4), 301-308.

Kacou, A., Rajagopal K.R. and Szeri, A. Z. 1987. Flow of a fluid of the differential type in a journal bearing. -ASME Journal of Tribology, (109), 100-108.

Kacou, A., Rajagopal K. R. and Szeri A. Z. 1988. A Thermohydrodynamic Analysis of Journal Bearings Lubricated by a Non-Newtonian Fluid. -ASME Journal of Tribology, (110), 414-420.

Ng, C. W. and Saibel E. 1962. Non-linear Viscosity Effects in Slider Bearing Lubrication. -ASME Journal of Lubrication Tecnology- (7), 192-196.

Pakdemirli, M. 1993. Boundary Layer Flow of Power-Law Fluids Past Arbitrary Profiles, IMA J. Appl. Math., (50), 133-148.

Streeter, V. L. and Wylie E. B. 1983. Fluid Mechanics.-Singapore: Mcgraw-Hill.

White, F. M. 1991. Viscous Fluid Flow.-New York: McGraw-Hill.