

SONSUZ UZUNLUKLU YANAL BASINÇ ALTINDAKİ ENİNE İZOTROP BİR SİLİNDİRDE TEMAS GERİLMELERİ

Ahmet YAPICI, Ahmet AVCI, Mesut UYANER

Selçuk Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Kampus/Konya

Geliş Tarihi : 12.01.2004

ÖZET

Bu çalışmada, yanal bir basınca maruz içi dolu enine izotrop bir silindirde elastostatik temas problemi ele alınmıştır. Temas bölgesinin büyüklüğü ve gerilme dağılımı incelenmiştir. Problemin formülasyonu elastik bir silindir için yapılmıştır. Silindir ve rijit ıstampa (indenter) arasında sürtünme olmadığı ve sadece yüzeydeki basınç kuvvetlerinin ara yüzeye aktarıldığı kabul edilmiştir. Problem geometrisi gereğince Fourier dönüşüm tekniği kullanılmıştır. Problem tekil integral denkleme indirgenmiş ve Gauss Chebyshev integral formülü kullanılarak bu tekil denklem lineer denklem sistemine dönüştürülmüştür. Elde edilen sistem Gauss eliminasyon yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Enine izotrop malzeme olarak E camı ve baryum titanat kullanılmıştır. İnceleme farklı temas yüzeyi, bilezik yarıçapı ve silindir yarıçapları için yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar grafiklerde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Temas problemi, Enine izotrop silindir, Tekil integral denklemi, Rijit ıstampa

CONTACT STRESSES IN A TRANSVERSELY ISOTROPIC SOLID CYLINDER LATERALLY COMPRESSED BY AN INDENTER

ABSTRACT

In this study, an elastostatic contact problem for a laterally compressed transversely isotropic cylinder subjected to radial compression through a circumferential rigid indenter is considered. The extent of the contact region and the stress distribution are sought. It is assumed that the contact between the cylinder and the rigid indenter is frictionless and only compressive normal tractions can be transmitted through the interface. Due to the geometry of the configuration, Fourier transform techniques are chosen. The problem is reduced to a singular integral equation. It is reduced to linear algebraic equation system by using Gauss Chebyshev Integration Formulae and is solved by using Gauss Elimination method. E glass and barium titanate are used as a transversely isotropic materials. The stress analysis is performed for different contact area, punch radiuses and cylinder radiuses. The obtained results are shown in figures.

Key Words : Contact problem, Transversely isotropic cylinder, Singular integral equation, Rigid indenter

1. GİRİŞ

Temas gerilmeleri, katı bir cismin başka bir katı cisim üzerinde sonlu bölgede yaptığı basınç neticesinde oluşan gerilmelerdir. Bir çok makine elemanının yük direnci, elemanın ana gövdesine

göre tasarlanmaktadır. Oysa makine elemanının gövdesine gelen yük ile temas bölgesinde yükün yaptığı etki aynı değildir. Diğer bir deyişle makine elemanlarındaki bir çok hasar (aşırı elastik deformasyon, akma ve kırılma) temas bölgesindeki gerilme ve şekil değiştirmelerle ilgilidir (Seely, 1952).

Temas problemi, mühendislik yapılarında pek çok uygulama alanı bulması nedeniyle sanayileşmenin başladığı yıllardan bu yana araştırmacıların ilgisini çekmiştir. Temas problemleriyle ilgili olarak ilk çalışmalar 1881 de Hertz tarafından yapılmıştır (Hertz, 1881). Bu nedenle temas problemi literatürde “Hertz Temas Problemi” olarak adlandırılmaktadır. Özellikle, 1860 yılından sonra Hertz ile birlikte elastisite teorisindeki yerini almıştır. Bu konu ile ilgili çalışmalara, 20. yy’ ın başlarında başlanmış ve Sneddon (1951)’un ve Muskhelishvili (1953)’nin elastisite teorisinde integral dönüşümlerini kullanması ile büyük ilerlemeler kaydedilmiştir.

Temas halindeki iki cismin analizinde, cisimlerin ideal elastik, homojen, düzlemsel veya eksenel simetrik konumda olduğu kabul edilir. Buna ek olarak, bazı kolaylaştırıcı kabuller de yapılır. Mesela temas bölgesindeki deformasyon eğrisinin çok küçük ve cisim rijit olacak kadar sert olduğu kabul edilir. Bir diğer kabul de temas bölgesinin tamamen sürtünmesiz ve yapışmanın ideal olduğudur.

Elastostatik problemlerde, alan denklemleri ve sınır şartlarındaki elastik sabitler hem teorik hem de deneysel çalışanlar için karışık bir problem oluşturur. Bu çalışmanın diğer bir amacı da; basınç altında sonsuz uzunluktaki elastik enine izotrop bir silindirdeki temas gerilmelerine malzeme sabitlerinin etkisini göstermektir.

Bu konularda bir çok çalışmalar yapılmıştır. Gupta, yarı sonsuz bir silindir probleminin analizi üzerinde çalışmıştır (Erdoğan, 1974). Problem; integral dönüşüm teknikleri yardımıyla tekil integral denklemi elde edilerek formüle edilmiştir. Tekil integral yöntemini kullanarak çözüm yapan Civelek ve Erdoğan genel eksenel simetrik ikili temas problemi, elastik presle yarı düzleme karşı basınca maruz bırakılmış elastik tabaka için çözülmüştür (Civelek ve Erdoğan, 1974). Bu problem, üç malzemenin de farklı elastik özelliklere sahip olduğu, temasın sürtünmesiz ara tabakada olduğu ve ara yüzeyden sadece dik basma kuvvetlerinin iletebildiği kabul edilerek çözülmüştür. Çalışmanın sonunda ise, problem temas basınçları bilinmeyen fonksiyon olacak şekilde tekil integral denklemlerine dönüştürülerek çözülmüştür. Ersoy ise; sonsuz uzunlukta, yanal basınç altındaki dolu bir izotrop silindir için temas problemi üzerinde çalışmıştır (Ersoy, 1993). Problem; integral dönüşüm teknikleri kullanılarak tekil integral elde edilerek formüle etmiştir. Belirsiz integraller, Filon algoritması kullanılarak çözülmüştür. Tekil integral denklem, Gauss-Chebyshev yöntemi kullanılarak lineer sistem takımı haline getirilmiştir. Gerilmeler, Gauss eliminasyon yöntemi kullanılarak bulunmuş ve

sayısal sonuçlar, boyutsuz hale getirilen gerilme dağılımı grafikleri şeklinde verilmiştir.

Uyaner ve ark. (2000) ise enine izotrop dolu bir silindirdeki yüzük şeklindeki çatlak etrafındaki plastik bölgeler üzerinde çalışmışlardır. Problem, yükün her yerde eşit olduğu kabulü ile integral dönüşüm tekniği kullanılarak formüle edilmiş ve tekil integral elde edilmiştir. Gauss Chebyshev yöntemi kullanılarak sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Plastik bölgenin genişliği plastik bant modeli yöntemi ile bulunmuştur. Pek çok farklı çatlak boyutu ve farklı enine izotrop malzeme için grafik çizilmiştir. Yine buna benzer bir çalışma Uyaner ve ark. (2002) tarafından yarı düzlem ile sınırlandırılmış enine izotrop katmanda para şeklindeki çatlak için yapılmıştır.

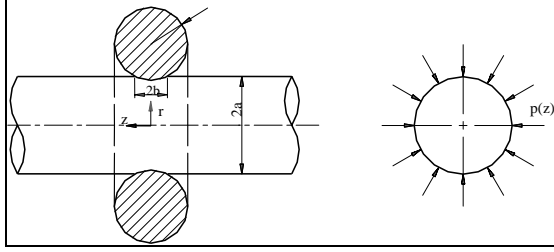
Sackfield et al., (2003) sürtünmesiz temas durumunda gelişen plastik bölgenin karakteristiğini incelemişlerdir. Bu çalışma sadece dairesel zımba için yapılmıştır. Feng et al., (2003), Blatz-Ko hiperelastik cisimleri arasında ki sürtünmeli temas problemini büyük deformasyonlar olması durumuna göre çözmüşlerdir. Dini and Hills (2003) yarı sonsuz temas problemi için D tipi bir zımba düşünmüşlerdir. Problemi sürtünmesiz temas durumunda ve kayma gerilmelerinin olduğu duruma göre ayrı ayrı çözmüşlerdir.

Bu çalışmadaki formülasyonda izlenilen yol, silindirik koordinatlarda eksenel simetrik problemler için genel olarak geliştirilmiş metotlardan birisidir. Matematiksel olarak; sınır şartları uygulandıktan sonra, problem tekil integral denklemi haline dönüştürülür. Elde edilen integral denklemi, problemin lineer denklem sistemine dönüştürülmesi ile çözülür. Ayrıca bu çalışmada enine izotrop malzemelerden E camı ve baryum titanat kullanılmıştır. E camı mukavemet, korozif ortam direnci ve hafiflik yönünden diğer malzemelere nazaran üstünlük sağlarken baryum titanat miller yüksek sıcaklık ve aşınma direnci gereken yerlerde seramik malzeme olarak kullanılmaktadır.

2. PROBLEMİN TANIMLANMASI

Bu çalışmada; sonsuz uzunlukta, lineer elastik, enine izotrop, içi dolu bir silindirin rijit bir bilezik ile maruz bırakıldığı sonlu bölgedeki radyal basınç altında oluşan eksenel simetrik temas problemi incelenmiştir. Temas bölgesinde sürtünmenin olmadığı kabul edilmiştir. Ayrıca; hacimsel kuvvetler de sıfır kabul edilmiştir. Doğal olarak, bilezik profiline ve deformasyona uğramış temas bölgesinin pozisyonuna bağlı olarak elastik silindirin

üzerinde temas bölgesi boyunca basınç dağılımı oluşması beklenir Bu çalışmada ise basınç dağılımı tek dairesel düzgün bilezik için incelenmiştir (Şekil 1).



Şekil 1. Düzgün dairesel bilezik ile temas halindeki bir silindir

Enine izotrop bir malzemenin silindirik koordinatlardaki gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sigma_r = c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = c_{11} \frac{u_r}{r} + c_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2)$$

$$\sigma_z = c_{13} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3)$$

$$\sigma_{rz} = c_{44} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (4)$$

Kütle kuvvetlerinin olmadığı duruma göre silindirik koordinatlar için denge denklemleri aşağıda verilmiştir.

Denge denklemleri,

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad (6)$$

Buradan (1-4) denklemleri, (5-6) denklemlerinde yerlerine konulursa yer değiştirimin r doğrultusundaki bileşeni olan radyal yer değiştirme $u_r(r, z)$, yer değiştirimin z doğrultusundaki bileşeni olan aksel yer değiştirme $w(r, z)$ cinsinden uygunluk denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$c_{11} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \quad (7)$$

$$c_{44} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} = 0$$

$$(c_{13} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \quad (8)$$

$$c_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

Sürtünme olmadığı için temas bölgesinde τ_{rz} 'nin değeri sıfıra eşittir. Eksenel simetrik problemlerde yer değiştirmeler r 'ye göre simetrik olduğu için gerilme bileşenleri θ açısından bağımsızdır. Bundan dolayı $\tau_{r\theta}$ ve $\tau_{\theta z}$ kayma gerilmeleri sıfırdır (Fabrikant, 1997). Buna göre sınır şartları yazılırsa,

$$\tau_{rz}(a, z) = 0 \quad 0 \leq |z| < \infty \quad (9a)$$

$$u(a, z) = (\text{Bileziğin profili})$$

$$0 \leq |z| < b \quad (9b)$$

$$\sigma_r(a, z) = 0 \quad b \leq |z| < \infty \quad (9c)$$

$$\sigma_r(a, z) = -p(z) \quad 0 \leq |z| < b \quad (9d)$$

$$p(z) = 0 \quad b \leq |z| < \infty \quad (9e)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_r(a, z) = \frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \quad 0 \leq |z| < b \quad (9f)$$

Dairesel bileziğin profili için denklem aşağıda verilmiştir.

$$r = a + \sqrt{R^2 - b^2} - \sqrt{R^2 - z^2} \quad (10)$$

Burada b , temas bölgesi genişliğidir. (9b) ve (9c) denklemleri karma sınır değer problemini meydana getirir.

3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Denklem (7) ve (8) z yönünde Fourier kosinüs ve sinüs dönüşümleri kullanılarak çözülür. Fourier dönüşümleri yapıldıktan sonra yer değiştirme ve ilgili gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_r(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(c_1^2 - c_2^2) s^2} AI_1(c_1 sr) + BI_1(c_2 sr) \right] \cos(sz) ds \quad (11)$$

$$w(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(c_1^2 - c_2^2) s^2} AI_0(c_1 sr) + BI_0(c_2 sr) \right] \sin(sz) ds \quad (12)$$

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & c_{11} \left[\frac{1}{(c_1^2 - c_2^2) s^2} A \left[c_1 s I_0(c_1 sr) - \frac{1}{r} I_1(c_1 sr) \right] \right. \\ & \left. + B \left[c_2 s I_0(c_2 sr) - \frac{1}{r} I_1(c_2 sr) \right] \right] + \\ & \frac{c_{13}}{r} \left[\frac{1}{(c_1^2 - c_2^2) s^2} AI_1(c_1 sr) + BI_1(c_2 sr) \right] \\ & + s c_{13} \left[\frac{1}{(c_1^2 - c_2^2) s^2} AI_0(c_1 sr) + BI_0(c_2 sr) \right] \end{aligned} \right\} \cos(sz) ds \quad (13)$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \frac{A}{(c_1^2 - c_2^2) s^2} (c_{12} c_1 + c_{33}) s I_0(c_1 sr) + \\ & B (c_{12} c_2 + c_{33}) s I_0(c_2 sr) \end{aligned} \right\} \cos(sz) ds \quad (14)$$

$$\tau_{rz} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \frac{A}{(c_1^2 - c_2^2) s^2} [(1 + c_1) c_{44} s I_1(c_1 sr)] + \\ & B [(1 + c_2) c_{44} s I_1(c_1 sr)] \end{aligned} \right\} \sin(sz) ds \quad (15)$$

Burada,

$$c_1 = \left[\frac{-2b_1}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4b_1}} \right]^{1/2}, \quad c_2 = \left[\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4b_1}}{-2} \right]^{1/2}$$

$$u_r(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{(1 + c_2) I_1(c_2 sa)}{(1 + c_1) I_1(c_1 sa)} I_1(c_1 sr) - I_1(c_2 sr) \right\} \frac{F}{D} \cos(sz) ds \quad (21)$$

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \frac{(1 + c_2) I_1(c_2 sa)}{(1 + c_1) I_1(c_1 sa)} \left[(c_{11} c_1 + c_{13}) s I_0(c_1 sr) + \frac{(c_{12} - c_{11})}{r} I_1(c_1 sr) \right] - \\ & (c_{11} c_2 + c_{13}) s I_0(c_2 sr) - \frac{(c_{12} - c_{11})}{r} I_1(c_2 sr) \end{aligned} \right\} \frac{F}{D} \cos(sz) ds \quad (22)$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{(1 + c_2) I_1(c_2 sa)}{(1 + c_1) I_1(c_1 sa)} (c_{12} c_1 + c_{33}) s I_0(c_1 sr) - (c_{12} c_2 + c_{33}) s I_0(c_2 sr) \right\} \frac{F}{D} \cos(sz) ds \quad (23)$$

$$\tau_{rz} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{(1 + c_2) I_1(c_2 sa)}{(1 + c_1) I_1(c_1 sa)} [(1 + c_1) c_{44} s I_1(c_1 sr)] - (1 + c_2) c_{44} s I_1(c_1 sr) \right\} \frac{F}{D} \sin(sz) ds \quad (24)$$

$$a_1 = \frac{(c_{13} + c_{44})^2}{c_{11} c_{44}} - \frac{c_{44}}{c_{11}} - \frac{c_{33}}{c_{44}}, \quad b_1 = \frac{c_{33}}{c_{11}}$$

ve I_0, I_1 sırasıyla birinci tür sıfırncı ve birinci dereceden düzeltilmiş Bessel fonksiyonlarıdır. Denklemde bilinmeyenleri A ve B ise (9a-d) denklemlerinin (13) ve (15) denklemlerinde uygulanmasıyla bulunurlar.

$$A = -\frac{(c_1^2 - c_2^2) s^2}{D} \frac{F [(1 + c_2) I_1(c_2 sa)]}{[(1 + c_1) I_1(c_1 sa)]} \quad (16)$$

$$B = -\frac{F}{D} \quad (17)$$

$$D = \left\{ \begin{aligned} & e_1 \frac{I_1(c_2 sa) s I_0(c_1 sa)}{I_1(c_1 sa)} + \\ & e_2 I_1(c_2 sa) - e_3 s I_0(c_2 sa) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{(1 + c_2)}{(1 + c_1)} (c_{11} c_1 + c_{13}), \\ e_2 &= \frac{(c_2 - c_1)}{(1 + c_1)} (c_{12} - c_{11}), \\ e_3 &= (c_{11} c_2 + c_{13}) \end{aligned} \quad (19)$$

F ise silindir üzerindeki birim uzunluktaki bileşke kuvvetin yarısidir.

$$F(t) = \int_0^b p(t) \cos(st) dt \quad (20)$$

Bulunan A ve B ifadeleri (11-15) denklemlerinde yerlerine konursa,

denklemleri elde edilir.

Denklem (21)'in z' 'ye göre türevi alınıp $r = a$ şartı uygulanırsa,

$$\frac{\partial u_r(r, z)}{\partial z} = -\frac{2}{\pi} \int_0^b p(t) \int_0^\infty K(s, a) \sin(sz) \cos(st) ds dt \quad (25)$$

elde edilir.

$K(s, a) = cK_u(s, a)$ ise burada,

$$c = \frac{(c_2 - c_1)}{(1 + c_1)} \text{ ve } K_u(s, a) = \frac{s}{D} cI_1(c_2sa) \text{ 'dır.}$$

İntegral hesabının doğruluğu için, denklem (25)'teki asimptotik analiz dikkatli yapılması gerekir. Asimptotik analiz, fonksiyonların nümerik olarak integre edilebilmesi için tekil integral çekirdeğinin açılımının yapıldığı bir işlemdir. Bu ifade de s sonsuza giderken integrali alınan ifade elde edilir, bu ifade kapalı form integrali kullanılarak çözülür ve devamı da nümerik integralle çözülür. Bu çalışmada asimptotik analiz, birinci tür düzeltilmiş Bessel fonksiyonlarının birinci ve sıfıncı dereceden değerlerini bulmak için kullanılmıştır (Yapıcı, 2004).

$$\frac{\partial u_r(a, z)}{\partial z} = -\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b p(t) \frac{(c_2 - c_1)}{(1 + c_1)} \left\{ \frac{L}{t - z} + \int_0^\infty (K_u(s) - L) \sin s(t - z) ds \right\} dt \quad (26)$$

Burada, $L = \frac{1}{e_1 - e_3}$

Bilinmeyen fonksiyon $p(t)$ 'nin bulunmasında bir standart nümerik teknik kullanılabilir. Nümerik çözüm tekniğini tekil integral denleme uygulayabilmek için, denklem boyutsuzlaştırılmalıdır. Boyutsuzlaştırma aşağıdaki büyüklüklerle yapılır.

$$\begin{aligned} t &= b\tau \\ z &= bx \\ \beta &= sa \\ N &= d(\tau - x) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} d &= b/a \\ y &= r/a \\ e &= R/a \\ e &= R/a \end{aligned}$$

Boyutsuzlaştırma işleminden sonra (26) denklemi aşağıdaki gibi olur,

$$\frac{\partial u_r(a, z)}{\partial z} = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q(\tau) \left\{ \frac{L}{(\tau - x)^+} + \int_0^\infty (K_u(\beta) - L) \sin(N\beta) d\beta \right\} d\tau \quad (28)$$

Burada,

$$q(\tau) = p(t)c \quad (29)$$

$$K_u(\beta) = \frac{\beta I_1(c_2sa)}{e_1 \frac{\beta I_1(c_2\beta) I_0(c_1\beta)}{I_1(c_1\beta)} + e_2 I_1(c_2\beta) - e_3 \beta I_0(c_2\beta)} \quad (30)$$

(9f) sınır şartıyla beraber (28) denklemi tekrar düzenlenirse,

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q(\tau) \left\{ \frac{L}{(\tau - x)} + \int_0^\infty (K_u(\beta) - L) \sin(N\beta) d\beta \right\} d\tau = \frac{d \cdot x}{\sqrt{e^2 - d^2 x^2}} \quad -1 < x < 1 \quad (31)$$

bulunur. Benzer işlemler gerilme ifadesi için yapılırsa aşağıdaki denklem bulunur.

$$\sigma_r(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 q(\tau) \text{Fun}(x, y, \tau) d\tau \quad (32)$$

Burada,

$$\text{Fun}(x, y, \tau) = \left\{ \begin{aligned} &(1-y) \sqrt{\frac{1}{y}} \left\{ \frac{c_1}{[c_1(1-y)]^2 + N^2} - \frac{c_2}{[c_2(1-y)]^2 + N^2} \right\} \\ &+ \frac{d}{e_5} \int_0^\infty K_r(\beta, y) \cos(N\beta) d\beta \end{aligned} \right\}$$

$$K_r(\beta, y) = \frac{1}{\Delta(\beta, y)} \left\{ \begin{aligned} &e_1 \frac{\beta I_1(c_2\beta) I_0(c_1\beta)}{I_1(c_1\beta)} + \\ &e_2 \frac{1}{y} \frac{I_1(c_2\beta) I_1(c_1\beta)}{I_1(c_1\beta)} - e_3 \beta I_0(c_2\beta) - e_4 \frac{1}{y} I_1(c_2y) \end{aligned} \right\}$$

$$-\frac{\sqrt{1}}{e_1 - e_3} \left\{ e^{-c_1\beta(1-y)} - e^{-c_2\beta(1-y)} \right\}$$

$$\Delta(\beta) = e_1 \beta \frac{I_1(c_2\beta) I_0(c_1\beta)}{I_1(c_1\beta)} + e_2 I_1(c_2\beta) - e_3 \beta I_0(c_2\beta)$$

4. İNTEGRAL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bilinmeyen fonksiyonun bulunması için geliştirilen tekil integrallerin uygun Gauss integral formülleriyle hesaplanması yöntemi kullanılır (Abramowitz and Stegun, 1972; Erdoğan et al., 1973). Bilinmeyen

fonksiyonlar, sınır noktalarında $\tau = \pm 1$ tekildir ve bu fonksiyonların aşağıdaki şekilde olduğu kabul edilebilir:

$$q(\tau) = G(\tau)(1 - \tau^2)^{1/2} \quad (39)$$

Buradan,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (1 - \tau_i^2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{(\tau_i - x_k)} + \\ \int_0^\infty (K_u(\beta) - L) \sin(N_{i,k}\beta) d\beta \end{array} \right\} G(\tau_i) = \frac{dx}{\sqrt{e^2 - d^2 x^2}} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (40)$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (1 - \tau_i^2) G(\tau_i) = \frac{F(c_2 - c_1)}{(1 + c_1)} \quad (41)$$

U_n ve T_n aşağıda verilmiştir. Buradaki T_n , Chebyshev polinomunun birinci türüdür.

$$U_n(\tau_i) = 0, \quad \tau_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (42)$$

$$T_{n+1}(x_k) = 0, \quad x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{n+1}\right) \quad (k = 1, \dots, n+1) \quad (43)$$

Aynı yöntemle radyal gerilme ifadesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sigma_r(x, y) = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n G(\tau_i) (1 - \tau_i^2) F_{un}(x, y, \tau_i) \quad (44)$$

5. NÜMERİK ÇÖZÜMLER VE TARTIŞMA

Sonsuz uzunlukta aksenal simetrik enine izotrop bir silindirde temas problemi silindirik koordinatlardan yola çıkarak ele alınmıştır. Problem integral dönüşüm tekniği kullanılarak enine izotrop malzemeler için formüle edilmiştir. Formülasyonda izlenen yol, silindirik koordinatlarda aksenal simetrik problemler için genel olarak geliştirilmiş metottur. Matematiksel olarak; sınır şartları uygulandıktan sonra, problem tekil integral denklemi haline dönüştürülmüştür. Elde edilen integral denklemi, problemin lineer denklem sistemine dönüştürülmesi ile çözülmüştür. Burada içi dolu silindir ile bilezik arasında kalan temas bölgesindeki gerilme dağılımı aranmaktadır. Grafikler normalize gerilme ve normalize temas yüzey uzunluğu arasındaki ilişkiyi gösterecek şekilde çizilmiştir.

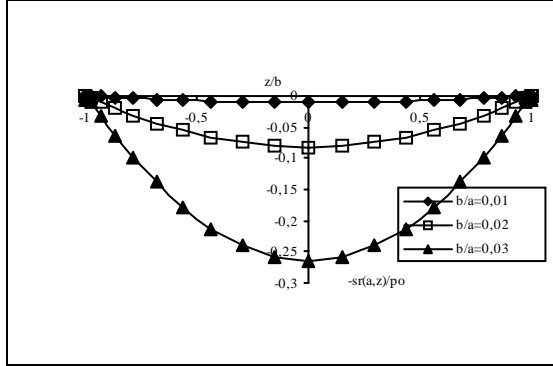
Sayısal sonuçlar (0, b) aralığı yerine normalize temas aralığı (-1, 1) için verilmiştir. Sonuçlar şu parametreler için elde edilmiştir: Temas bölgesi yarı uzunluğunun silindir yarıçapına oranı b/a ve temas bölgesindeki radyal gerilmenin ortalama yüke oranı p_0 aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$p_0 = \frac{F}{2b} \text{ 'dir.}$$

Nümerik analizler yapılırken iki farklı enine izotrop malzeme kullanılmıştır. Bunlar; E camı ve baryum titanattır. Bu çalışmada kullanılan enine izotropik malzemelerin malzeme sabitleri Tablo 1'de verilmiştir.

Analizde kullanılan ilk malzeme E-Camıdır. R/a=20/100 oranı sabit tutulup b/a oranı düzgün olarak artırıldığında gerilme değerleri özellikle b/a = 0.02-0.03 arasında ciddi bir artış (-0.5427) göstermektedirler (Şekil 2). Bu artışın sebebi temas

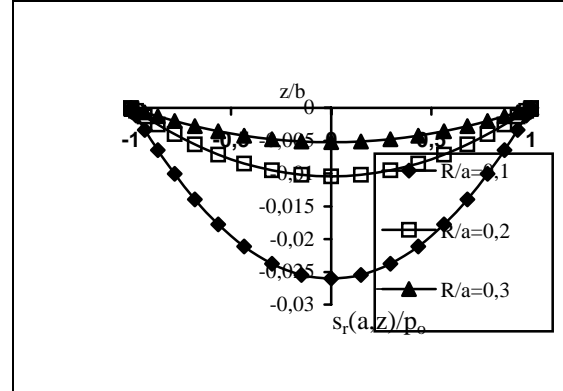
yüzeyi artarken bileziğin silindire daha fazla derine dalması ile gerilme değerlerini yükseltmesidir. Buradaki en yüksek gerilme değeri $b/a = 0.03$ için -0.2647 olarak gerçekleşmiştir.



Şekil 2. E camı için temas yüzeyindeki gerilme dağılımı ($R/a = 20/100$, $b/a = 0.01, 0.02, 0.03$)

E Camı malzemesi için R/a oranı artırıldıkça elde edilen gerilme değerleri Şekil 3'te gösterilmiştir. Doğal olarak aynı temas yüzeyi için bilezik yarıçapı en küçük olduğu durumda gerilmeler

yüksek çıkmıştır. Bu değerler $R/a = 0.1, 0.2, 0.3$ için sırasıyla $-0.026, -0.010, -0.005$ 'tir.

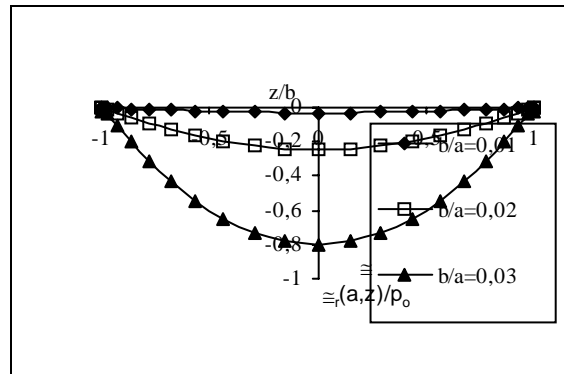


Şekil 3. E camı için temas yüzeyindeki gerilme dağılımı ($b/a = 1/100$, $R/a = 0.1, 0.2, 0.3$)

Enine izotropik malzeme olarak kullanılan diğer malzeme baryum titanat'tır. Baryum titanat malzemesinin malzeme sabitleri, E camından daha yüksek olduğundan Şekil 4'te görüldüğü gibi daha yüksek gerilme değerlerinin elde edilmesine sebep olmuştur. Bu değer $b/a = 0.03$ için -0.7975 olarak gerçekleşmiştir.

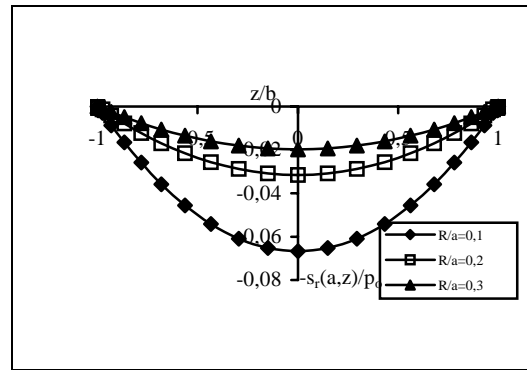
Tablo 1. Elastik Sabitlerin Değerleri (GPa)

Malzeme	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}
E Camı	14.99	6.567	5.244	42.27	4.745
Baryum-Titanat	168.0	78.0	71.0	189.0	5.46



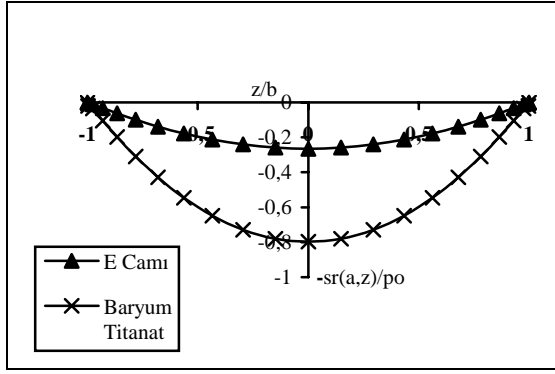
Şekil 4. Baryum titanat için temas yüzeyindeki gerilme dağılımı ($R/a = 20/100$, $b/a = 0.01, 0.02, 0.03$)

Baryum titanat için temas yüzeyini sabit tuttuğumuzda ($b/a=1/100$) farklı R/a oranları için elde edilen değerler Şekil 5'te verilmiştir. Buna göre $R/a=0.1, 0.2, 0.3$ oranlarından her bir eğri için elde edilen en yüksek gerilme değeri sırasıyla $-0.0667, -0.0316, -0.0198$ 'dir.



Şekil 5. Baryum titanat için temas yüzeyindeki gerilme dağılımı ($b/a = 1/100$, $R/a = 0.1, 0.2, 0.3$)

Bu iki malzemeyi karşılaştırdığımızda ise aşağıdaki gibi bir sonuç ortaya çıkmaktadır (Şekil 6). Bu kıyaslamada $b/a=0,03$ ve $R/a=20/100$ olarak alınmıştır. Aynı şartlardaki bu gerilme analizinde baryum titanatın E camına oranla çok daha yüksek değerlere sahip olduğu görülmüştür ve ulaştığı en yüksek değer -0.7975 olarak gerçekleşmiştir. E camının ulaştığı en yüksek değer ise -0.2647 'dir.



Şekil 6. Malzemeler arasındaki gerilme dağılımı ilişkisi ($b/a = 0.03$, $R/a = 20/100$)

6. SONUÇLAR

Aynı temas yüzeyi için farklı bilezik yarıçaplarına göre yapılan analizlerde her iki malzeme için gerilme dağılımları bulunmuştur. Benzer şekilde bilezik yarıçapı sabit tutularak farklı silindir yarıçapları için gerilme dağılımları da elde edilmiştir. Kullanılan malzemelerin malzeme sabitleri arasındaki ilişki ile sonuçlar arasındaki ilişki paralel çıkmıştır. Buna göre baryum titanat malzemesinin malzeme sabitleri yüksek değerlere sahip olduğu için aynı deformasyon miktarı için E camına nazaran daha yüksek gerilme değerlerine ulaşmıştır.

Gerilme analizinde kullanılan ilk malzeme E camıdır. E camı için yapılan analizde önce $R/a = 20/100$ olarak sabit alınıp farklı b/a oranları için analiz yapılmıştır. Buna göre elde edilen en düşük ve en yüksek gerilme değerleri sırasıyla $b/a = 0.01$ için -0.0105 ve $b/a = 0.03$ için ise -0.2647 . $b/a = 1/100$ olduğunda ise farklı R/a oranlarında elde edilen en yüksek ve en düşük değerler sırasıyla şöyledir; $R/a = 0.1$ için -0.026 ve $R/a = 0.3$ için 0.005 'tir.

Kullanılan diğer malzeme baryum titanattır. Bu malzemede $R/a = 20/100$ için elde edilen en düşük ve en yüksek gerilme değerleri sırasıyla şöyledir; temas yüzeyi $b/a = 0.01$ için -0.0316 ve $b/a = 0.03$ için -0.7975 'tir. $b/a = 1/100$ sabit alınıp bilezik yarıçapı arttırıldığında elde edilen en yüksek ve en düşük gerilmeler sırasıyla $R/a = 0.1$ için -0.0667 ve $R/a = 0.3$ için -0.0198 'dir.

7. KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1972. "Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs

and Mathematical Tables", Dover Publications, 374-378, New York.

Civelek, M.B., Erdogan, F. 1974. "The Axially symmetric Double Contact Problem for Frictionless Elastic Layer", Int. J. Solids and Structures, 10, pp. 639-645.

Dini, D. and Hills, D. A. 2003. "A Method Based on Asymptotics For the Refined Solution of Almost Complete Partial Slip Contact Problems", European Journal of Mechanics A/Solids, 22, 851-859.

Erdoğan, F., Gupta, G. D., Cook, T. S. 1973. "Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems" Nordhoff Int. Publishing, 369, Leyden.

Ersöy, L. E. 1993. Contact Problem for a Laterally Compressed Cylinder, M.S. Thesis in Mechanical Engineering M.E.T.U., Ankara.

Fabrikant, V. I. 1997. "Computation of the Resultant Forces and Moments in Elastic Contact Problems", Int. J. Engng. Sci., 35, No. 7, 681-698.

Feng, Z. Q., Peyraut, F., Labed, N. 2003. "Solution of Large Deformation Contact Problems With Friction Between Blatz-Ko Hyperelastic Bodies", International Journal of Engineering Science, 41, 2213-2225.

Gupta, G. D. 1974. "The Analysis of Semi-Infinite Cylinder Problem", Int. J. Solid Structures, 10, pp. 137-148.

Hertz, H. 1881. "N Über die BerNührung fester elastischer KNorper. J. fNur Die Reine und Angewandte Mathematik", 92, 156-171. (in German, English transl. On the Contact of Elastic Solids. In: Jones, D. E., Schott, G.A. (Eds.), Miscellaneous Papers by H. Hertz, Macmillan, London, 1896 pp. 146-162).

Muskhelishvili NI. 1953 "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", In: Radok JRM, Editor. Noordhoff.

Sackfield, A., Mugadu, A., Barber, J. R., Hills, D. A. 2003. "The Application of Asymptotic Solutions to Characterizing the Process Zone in Almost Complete Frictionless Contacts", J. of the Mechanics and Physics of Solids, 51, 1333-1346.

Seely, F. B. 1952. Advanced Mechanics of Materials, John Wiley & Sons, Inch., Illinois.

Sneddon, I. N. 1951. Fourier Transforms, Mc Graw-Hill New York.

Uyaner, M., Akdemir, A., Erim, S., Avcı, A. 2000. "Plastic Zones In A Transversely Isotropic Solid Cylinder Containing a Ring Shaped Crack", *International Journal of Fracture*, 106, 161-175.

Uyaner, M., Ataberk, N., Avcı, A. 2002. "Plastic Zones For A Penny-Shaped Crack In A Transversely Isotropic Layer Bonded Between Two Isotropic Half

Spaces", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21, 401-410.

Yapıcı, A. 2004. "Yanal Basınç Altındaki Sonsuz Uzunluklu Enine İzotrop Bir Silindirde Temas Gerilmeleri", Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.

