

NON-LİNEER GERİLME-ŞEKİL DEĞİŞTİRME BAĞINTISINA SAHİP MALZEMEDEN YAPILMIŞ SONLU ÇUBUKTA NON-LİNEER ELASTİK DALGALAR

Yaşar PALA, Özkan BADEMCİ ve Gültekin KARADERE

Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 16059/Görükle/Bursa

Geliş Tarihi : 28.04.2005

ÖZET

Bu çalışmada, non-lineer gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip malzemedan yapılmış sonlu uzunlukta çubuktaki non-lineer elastik ve elastik-plastik dalga hareketi analiz edilmektedir. Elde edilen non-lineer kısmi diferansiyel denklem yeni bir metot kullanılarak iki non-lineer adi diferansiyel denkleme dönüştürülmektedir. Sınır şartlarını ve başlangıç şartlarını sağlayan analitik çözüm denklemlerin özel çözümlerinden elde edilmektedir. Çubuktaki gerilmeler, dalga hızları ve yer değiştirmeler keyfi koşullar için bulunmaktadır. Makalede iki farklı başlangıç şartı ve sınır şartı gurubu önerilmektedir. İlk gurup halinde çözümde sınırlama gelirken, pratik açıdan daha manidar ikinci gurup sayesinde bu sınırlama kaldırılmaktadır. Sunulan yöntem mühendislik malzemelerinden yapılmış çubukların elastik-plastik dalga hızına da uygulanabilmektedir. Sadece başlangıç hızının mevcut olduğu durumda yarı sonsuz çubuk için geliştirilmiş Karman-Donnel teorisinin aksine, mevcut yöntem başlangıç ve sınır şartlarının her ikisinin de sıfır olmadığı sonlu uzunluktaki çubuklar için de kullanılabilir.

Anahtar Kelimeler : Ankastre, Çubuk, Non-lineer, Dalga, Yayılım, Gerilme

NON-LINEAR ELASTIC WAVES IN A FINITE BAR MADE OF A MATERIAL HAVING NON-LINEAR STRESS-STRAIN RELATION

ABSTRACT

This study is devoted to the non-linear elastic wave motion in a finite bar made of a material obeying non-linear stress-strain relation. Non-linear governing partial differential equation is separated into two non-linear ordinary differential equations using a new method for the separation. Analytical solution satisfying boundary and initial conditions are constructed from the proper solutions of equations. Stresses, wave velocities and displacements in the rod are found for arbitrary conditions. Two methods are developed. While the first method brings a limitation on the solution, the second one removes this problem by selecting more practically logical conditions. The present method is also applicable to elastic-plastic wave motion in rods of engineering materials. On the contrary to Karman-Donnel elasto-plastic wave theory developed for semi infinite bars subjected to initial velocity condition only, the present method proves to be useful for rods of finite lengths subjected to both initial and boundary conditions .

Key Words : Ancastrre, Rod, Non-linear, Wave, Motion , Stress

1. GİRİŞ

Lineer elastik malzemedan yapılmış çubuklardaki dalga hareketi ve gerilme analizi çok sayıdaki

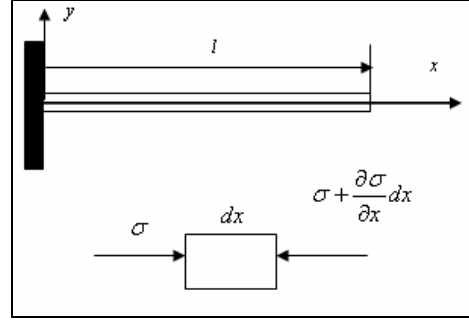
makale ve kitabın konusu olmuştur (Rayleigh, 1906; Kolsky, 1953; Love, 1944; Morse, 1950 ; Goldsmith, 1960; Inmann, 1994). Ancak, bazı alaşımlar, kompozitler ve kauçuklar gibi non-lineer elastik veya hiper-elastik davranış gösteren birçok

endüstriyel malzeme mevcuttur. Ayrıca, tavlanmış çelikler gibi Hooke kanuna uyan bazı mühendislik malzemeleri özel ısıtma işlemlerinden sonra non-linear davranış gösterebilirler. Mühendislik alanında ve özellikle de uzay sistemleri endüstrisinde kullanılan birçok yapısal eleman non-linear davranış sergiler. Bu gelişmelerin sonucu olarak non-linear malzemeden yapılmış çubuklardaki gerilme ve dalga analizi ilgi çekmektedir. Buna rağmen, bu alanda çok çalışmaya rastlanmamıştır. Bu sebeple, bu çalışmada çubuklardaki gerilme ve dalga hareketine dair analitik ifadeler elde etmemizi sağlayan analitik bir yöntem geliştirilmeye çalışılmaktadır.

Yeterince büyük yükleme koşulları için, malzemede hem elastik ve hem de plastik şekil değiştirmeler gelişebilir. Elastik ve elastik-plastik bölgeyi kapsayan tek değerli gerilme-şekil değişirme bağıntısı göz önüne alındığında, malzeme özelliği $\sigma = k\varepsilon^n$ şeklinde karakterize edilmek koşuluyla, buradaki yöntem ; çubuk, tel ve kirişlerdeki elastik-plastik gerilme ve dalgaları açıklamak için de kullanılabilir. Burada; k, n malzeme sabitleridir. Elastik-plastik dalga hareketi üzerine birçok araştırma makalesi yayınlanmış olmasına rağmen (Rakhmatulin, 1945; Karman, 1950; Craggs, 1952; Campell, 1953; Taylor, 1954; Hopkins, 1955; Cristescu, 1957; Zukas, 1982), gerilme-şekil değişirme eğrisinin tipine bağlı olmadan verilmiş bir keyfi başlangıç şartı ve sınır şartı için gerilme, şekil değişirme ve dalga hızlarını verebilen elle tutulur bir katkı yapılamamıştır. İlâveten, elasto-plastik şekil değiştirmeler sırasındaki dalga hareketi üzerine yapılan analitik çalışmalar, sınır ve başlangıç koşullarının tam olarak sağlanamaması zorluğundan dolayı daha ziyade yarı sonsuz çubuklar üzerinde yürütülmüştür. Bilahare, yeni yöntem; elasto-plastik dalga analizinde kullanılan iç bükey gerilme-şekil değişirme bağıntısı üzerine kurulu Von-Karman ve Donnell'in oran-bağımsız teorisine nispetle daha etkin ve tam çözüm olanağını sağlamaktadır. Buradaki metodun esas iddiası, keyfi başlangıç ve sınır şartları için non-linear elastik malzemelere uygulanabilir olmasıdır.

2. ANALİZ

Şekil 1'deki gibi l uzunluğunda bir çubuk düşünelim. Çubuğun kesiti A ve malzeme yoğunluğu ρ 'dur. Hareket denklemini elde etmek için Şeki 1'deki diferansiyel elemanı göz önüne alıp, x yönünde Newton'un ikinci hareket kanununu yazalım (Pala, 2004):



Şekil 1. Bir ucundan ankastre non-linear malzemeden yapılmış çubuk.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

Burada; u , x doğrultusundaki yer değiştirmedir. $\sigma = k\varepsilon^n$ non-linear elastik gerilme-şekil değişirme bağıntısını kullanarak (1) denklemini

$$k \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

ya da

$$c_v^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

olarak yazabiliriz. Burada $c_v = \sqrt{k/\rho}$ 'dur. (3) denklemini elemanter teknikler kullanılarak açık (explicit) çözümü periyodik fonksiyonlar cinsinden bulunamayan ikinci derece bir non-linear kısmi diferansiyel denklemdir.

(3) denklemini sağlayan bir çözüm aramak yerine kısmi diferansiyel denklemini iki adi diferansiyel denkleme ayırmayı tercih edeceğiz. Bu metodun temelleri Pala tarafından kurulmuştur (Pala, 1997). (3) denklemini adi diferansiyel denklemlere bölmek için u 'nun aşağıdaki gibi yazılabildiğini varsayalım:

$$\xi(x, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = V^s(x) T^m(t) \quad (4)$$

Burada; s , m ; değerleri ayrıştırılmış adi diferansiyel denklemlerin çözümleri en basit olacak şekilde seçilmeleri gerekli sabitlerdir.

(3) denkleminin sağ tarafı u nun t ye göre kısmi türevini ihtiva ettiği için (4) denkleminin formu (3) denkleminde kullanılmak için uygun değildir. Bunun

üstesinden gelmek için (3) denkleminin her iki tarafını x e göre türetelim :

$$c_v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (5)$$

(4) denklemleri ile (5) denkleminin müracaat ederek

$$c_v^2 \left[s(s-1)V^{s-2}V'^2T^m + sV^{s-1}V''T^m \right] \\ = V^{\frac{s}{n}} \left[\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) T^{\frac{m}{n}-2} \dot{T}^2 + \frac{m}{n} T^{\frac{m}{n}-1} \ddot{T} \right] \quad (6)$$

elde ederiz. Şimdi, $m = n$ ve $s = 1$ seçelim. m ve s nin bu değerleri $V(x)$ ve $T(t)$ diferansiyel denklemlerinin formunu daha da basitleştirir. Bilahare, (6) denklemden

$$c_v^2 V'' T^n = \ddot{T} V^{\frac{1}{n}} \quad (7)$$

ya da buradan ,

$$\frac{\ddot{T}}{T^n} = c_v^2 \frac{V''}{V^{\frac{1}{n}}} \quad (8)$$

elde ederiz.

(8) denkleminin sağ tarafı sadece x in fonksiyonu iken, sol taraf sadece t nin fonksiyonudur. Bu ise sadece iki tarafında bir sabite eşit olmasıyla mümkündür. Bu sabite $-\lambda^2$ diyelim. Şimdi, (8) denklemden aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$\ddot{T} + \lambda^2 T^n = 0 \quad (9a)$$

$$V'' + \mu^2 V^{\frac{1}{n}} = 0, \quad \mu^2 = \frac{\lambda^2}{c_v^2} \quad (9b)$$

Denklem (9a) ve (9b), keyfi n değeri için açık çözümü analitik metotlarla kolayca bulunamayan iki adet ikinci dereceden non- lineer diferansiyel denklemlerdir. Bunun da ötesinde sönümleme terimleri içermediği için pertürbasyonlar teorisi gibi yarı analitik metotlar da bu denklemlere uygulanamaz. Aslında, literatürde bu tür denklemler üzerine kapsamlı bir çalışmada mevcut değildir. O yüzden farklı bir yol takip ederek çözüm formlarını peşinen önereceğiz.

2. 1. Çözüm Yöntemi

2. 1. 1. Non-Linear Elastik Malzemeler

İlk olarak şekil değiştirme analizini ele alalım. Dalga hızları metodun bir sonucu olarak bu ilk kısımdan elde edilecektir. Lineer hale tekabül eden $n = 1$ hali hariç (9a) denkleminin genel çözümü literatürde bulunmamaktadır. Ancak, denklemin kendisinin ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem olması münasebetiyle en az iki sabit ihtiva etmesi gerektiğini akılda tutarak (9a) denkleminin uygun çözüm formunu aşağıdaki gibi önereceğiz :

$$T(t) = T_0(t + t_0)^{s_0} \quad (10)$$

Burada, T_0, t_0 ve s_0 uygun tarzda belirlenecek sabitlerdir. (10) denklemini (9a) denkleminde yerleştirerek

$$T_0 = (-1)^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{2(n+1)}{(n-1)^2 \lambda^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (11) \\ s_0 = \frac{2}{1-n}$$

bulunur. Sağ taraftaki ilk terimden dolayı T_0 kompleks gibi görünüyor ise de, ileride bunun böyle olmadığı görülecektir. Zaman sabiti t_0 başlangıç şartlarından bulunacaktır.

Benzer şekilde (9b) denkleminin analitik çözümünü aşağıdaki gibi önereceğiz :

$$V(x) = V_0(x + x_0)^{r_0} \quad (12)$$

Burada, V_0 ve r_0 uygun tarzda belirlenecek sabitlerdir. V nin formunun iki yerine üç sabit içermesi gerektiği vurgulanmalıdır. Daha sonra görüleceği üzere, λ^2 bileşeni hesaplamalar sırasında yok olacaktır. Bu halde, sınır ve başlangıç şartlarının her ikisini de kısıtlı bir anlamda sağlanacaktır. Şimdi, (12) denklemini (9b) denkleminde yerleştirerek

$$V_0 = (-1)^{\frac{n}{1-n}} \left[\frac{2n(n+1)}{(n-1)^2 \mu^2} \right]^{\frac{n}{1-n}} \quad (13) \\ r_0 = \frac{2n}{n-1}$$

buluruz.

(10), (12) ve (4) denklemlerini birleştirerek

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= (V(x))^{\frac{1}{n}} T(t) \\ &= (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\frac{x+x_0}{t+t_0}\right]^{\frac{2}{n-1}} \end{aligned} \quad (14)$$

bulunur. (14) denkleminin x e göre integrasyonu

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\frac{1}{t+t_0}\right]^{\frac{2}{n-1}} \\ &\left[\frac{n-1}{n+1}(x+x_0)^{\frac{n+1}{n-1}}\right] + g_0(t) \end{aligned} \quad (15)$$

verir. Burada; $g_0(t)$, t 'nin bilinmeyen fonksiyonudur.

2. 1. 2. Sonlu Uzunlukta Ankastre Çubuk

Çubuğun bir ucundan ankastre olduğunu varsayalım: $x = 0$ için $u(0,t) = 0$. Bu şartın (15) denkleminde kullanılması

$$g_0(t) = - (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \frac{(x_0)^{\frac{n+1}{n-1}}}{(t+t_0)^{\frac{2}{n-1}}} \quad (16)$$

verir. Bilahare, $u(x,t)$ 'nin yeni şekli

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\frac{1}{t+t_0}\right]^{\frac{2}{n-1}} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\left[\left(x+x_0\right)^{\frac{n+1}{n-1}} - (x_0)^{\frac{n+1}{n-1}}\right] \end{aligned} \quad (17)$$

olur. Çubuğun diğer ucu gerilmesiz ise ($x = l$ için $\sigma = 0$), o takdirde $(\partial u / \partial x)(l,t) = 0$ almalıyız. Bu şartı (14) denkleminde yerine koyarak

$$x_0 = -l \quad (18)$$

elde ederiz.

Şimdi $t = 0$ anında $x = l$ 'deki yer değiştirme ve hız üzerindeki başlangıç şartlarını aşağıdaki gibi alalım :

$$u(l,0) = U_0 \quad (19a)$$

$$\dot{u}(l,0) = \dot{U}_0 \quad (19b)$$

Burada, U_0 ve \dot{U}_0 sırasıyla başlangıç yer değiştirme ve başlangıç hızıdır. (19a) denklemini (17) denkleminde yerine koyarsak

$$U_0 = -a_0 \left[\frac{(-1)^{\frac{n+1}{n-1}}}{(t_0)^{\frac{2}{n-1}}}\right] \quad (20)$$

elde ederiz. Burada

$$a_0 = (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \quad (21)$$

dır. (17) denkleminin t ye bağlı olarak türevini alır ve (19b) denklemini bu ifadeye yerine koyarak

$$\dot{U}_0 = \left(\frac{2}{n-1}\right) a_0 \left[\frac{(-1)^{\frac{n+1}{n-1}}}{(t_0)^{\frac{2}{n-1}}}\right] \quad (22)$$

buluruz. (20) ve (22) denklemlerini bir arada çözerek

$$t_0 = \frac{U_0}{\dot{U}_0} \left(\frac{2}{1-n}\right), n \neq 1 \quad (23)$$

buluruz .

(23) ifadesini (20) ifadesinde yerine koyalım:

$$\begin{aligned} U_0 &= - (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\left[\left(\frac{\dot{U}_0}{U_0}\right) \left(\frac{1-n}{2}\right)\right]^{\frac{2}{n-1}} (-1)^{\frac{n+1}{n-1}} \end{aligned} \quad (24)$$

(24) denkleminde görüldüğü gibi, yeni yöntem başlangıç şartları arasında zorunlu bir ilişkiyi gerektirmektedir. Diğer bir ifadeyle, tam çözüm (24) denkleminin sağlanmasıyla mümkün olmaktadır. Şimdiki teoriye göre \dot{U}_0 keyfi olarak seçildiği zaman U_0 otomatik olarak (24) denklemini tarafından -ya da tam tersi- belirlenmektedir. Bu durum λ^2 'nin hesaplamalar sırasında yok olmasından kaynaklanmaktadır. Bilahare, problemin sabitlerinden biri yok olmaktadır. Bu problem verilen şartların fiziki olarak daha uygun hale getirilmesiyle halledilecektir.

2.1.3. Non-Linear Elastik Dalga Hızı

(3) denklemi şu şekilde yazılabilir :

$$\frac{kn}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (25)$$

Bu denklemi standart ikinci mertebe dalga denklemiyle karşılaştırarak non-lineer elastik dalga hızının şu şekilde verildiği sonucuna varabiliriz:

$$c_n = \sqrt{\frac{kn}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n-1}} = \sqrt{\frac{kn}{\rho} \varepsilon^{n-1}} \quad (26)$$

$$c_n = c_v \sqrt{n \varepsilon^{n-1}}$$

(14) ve (18) denklemlerinin (26) denkleminde kullanılmasıyla :

$$c_n = \left(\frac{x-1}{t+t_0} \right) \quad (27)$$

elde edilir. c_v ve n denklem (27) de açıkça görülmemesine rağmen t_0 ifadesinde yer almaktadır. (27) denkleminde göre her bir gerilme, o noktadaki gerilme-şekil değiştirme eğrisinin teğetinin eğimine bağlı kendi karakteristik hızıyla ilerlemektedir. (27) denklemi aşağıdaki şekilde boyutsuz hale getirilebilir :

$$\bar{c}_n = \frac{t_0}{l} c_n = \left[\frac{\frac{x}{l} - 1}{1 + \frac{t}{t_0}} \right] \quad (28)$$

2. 2. Başlangıç Şartlarının Modifikasyonu

Görüldüğü üzere, ilk metot problemin genel çözümünde başlangıç şartları yönünden sınırlama getirmektedir. Bu sınırlamayı kaldırmak için, başlangıç ve sınır şartlarında birkaç gerekli modifikasyon yapmaya ihtiyacımız vardır. Bu sınırlamanın sebebi belki de seçilen şartların yanlış vazedilmesidir. Bunun böyle olduğunu görmek için gerilmesiz serbest uç yerine $t=0$ anında $x=l$ deki U_0 başlangıç yer değiştirmesinin bir σ_0 gerilmesinin uygulamasından meydana geldiğini düşünelim. Bu yeni halde uçtaki gerilme ile yer değiştirme arasında

$$U_0 = \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (29)$$

$$= \int_0^l \left(\frac{\sigma_0}{k} \right)^{\frac{1}{n}} dx = \left(\frac{\sigma_0}{k} \right)^{\frac{1}{n}} l$$

veya

$$\sigma_0 = k \left(\frac{U_0}{l} \right)^n \quad (30)$$

şeklinde bir bağıntı olmalıdır. Şu halde, $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0$ şartını $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \left(\frac{\sigma_0}{k} \right)^{\frac{1}{n}}$ şartı ile değiştirebiliriz. Aslında bu yeni form pratik durumlar ile daha uygundur. Bu şartın (14) denkleminde yerine konulması

$$x_0 = -1 + (t_0) \left[\frac{\sigma_0}{k(nc_v)^{\frac{n}{1-n}}} \right]^{\frac{n-1}{2n}} \quad (31)$$

sonucunu verir. Diğer iki şart $u(0,0) = 0$ ve $u(0,t) = 0$ koşulları ile değiştirilmektedir. $u(0,t) = 0$ koşulunu denklem (15) de kullanarak

$$g_0(t) = - \left(c_v^2 n \right)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \frac{(x_0)^{\frac{n+1}{n-1}}}{(t+t_0)^{\frac{2}{n-1}}} \quad (32)$$

buluruz. Şimdi, $u(x,t)$ aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$u(x,t) = (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\frac{1}{t+t_0} \right]^{\frac{2}{n-1}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left[(x+x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} - (x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} \right] \quad (33)$$

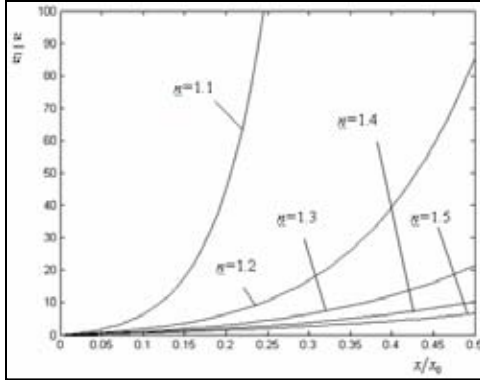
Bu ise (17) denkleminin aynısıdır. $u(0,0) = 0$ şartı, (33) denklemi tarafından otomatik olarak sağlanmaktadır. Boyutsuz yer değiştirmeyi tanımlamak için

$$\bar{u} = (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\frac{1}{t+t_0} \right]^{\frac{2}{n-1}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) (x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} \quad (34)$$

ikamesi yapılarak (33) denklemi

$$\frac{u}{\bar{u}} = \left[\left(1 + \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} - 1 \right] \quad (35)$$

boyutsuz formuna getirilir. Şekil 2, $n = 1.1$, $n = 1.2$, $n = 1.3$, $n = 1.4$, $n = 1.5$, için u/\bar{u} nun x/x_0 bağılı olarak değişimini göstermektedir.



Şekil 2. Seçilen çeşitli n değerleri için u/\bar{u} 'nun x/x_0 ile değişimi

t_0 ı elde etmek için u nun t ye göre diferansiyelini aldıktan sonra, bulunan denklemde $\dot{u}(1,0) = \dot{U}_0$ şartı kullanılır. Sonuç aşağıdaki şekildedir :

$$\dot{U}_0 = t_0^{\frac{n+1}{1-n}} (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{2}{n-1} \right) \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left[\left(1 + x_0 \right)^{\frac{n+1}{n-1}} - \left(x_0 \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \right] \quad (36)$$

Buradan ;

$$t_0 = \left[\frac{\dot{U}_0 (n+1)(1-n)}{2(c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} (n-1) \left[\left(1 + x_0 \right)^{\frac{n+1}{n-1}} - \left(x_0 \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \right]} \right]^{\frac{1-n}{n+1}} \quad (37)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, şartlar üzerindeki modifikasyonlar (24) denklemindeki sınırlamayı kaldırmakta ve çözümü tamamlamaktadır.

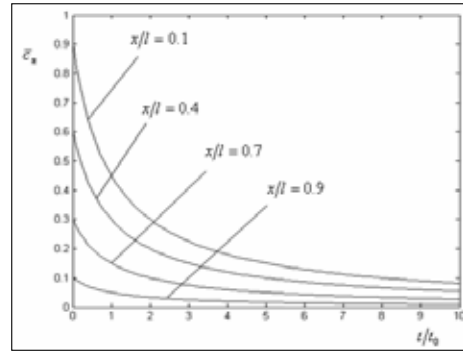
Şimdi, dalga hızlarını elde etmeye geçebiliriz. (33) denklemi ve (17) denklemindeki u ifadesi aynı olduğundan dalga denklemlerinin formu aynı olur. Yani,

$$c_n = \left(\frac{x-l}{t+t_0} \right) \quad (38)$$

dir. İfade aşağıdaki gibi boyutsuz hale getirilebilir:

$$\bar{c}_n = \frac{t_0}{l} c_n = \left[\frac{\frac{x}{l} - 1}{1 + \frac{t}{t_0}} \right] \quad (39)$$

Şekil 3, $x/l = 0.1$, $x/l = 0.4$, $x/l = 0.7$, $x/l = 0.9$ konumları için boyutsuz dalga hızının boyutsuz zamanla değişimini göstermektedir. Dalga hızının zamanla azaldığı açık bir şekilde görülmektedir.



Şekil 3. Seçilen çeşitli x/l değerleri için \bar{c}_n nin t/t_0 ile değişimi

$\sigma = k\varepsilon^n$ bağıntısı kullanılarak herhangi bir kesitteki gerilme bulunabilir :

$$\begin{aligned} \sigma(x,t) &= k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = k (V(x)) T(t)^n \\ &= k (nc_v^2)^{\frac{n}{1-n}} \left(\frac{x+x_0}{t+t_0} \right)^{\frac{2n}{n-1}} \end{aligned} \quad (40)$$

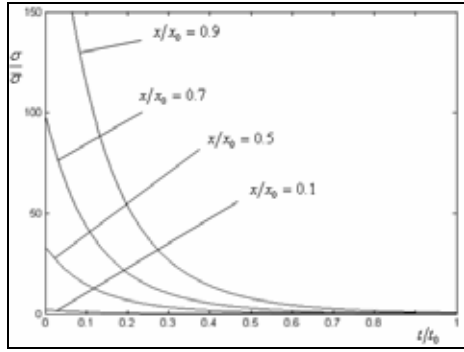
Yine, boyutu gerilme olan

$$\bar{\sigma} = k (nc_v^2)^{\frac{n}{1-n}} \left(\frac{x_0}{t_0} \right)^{\frac{2n}{n-1}} \quad (41)$$

koyarak boyutsuz gerilmeyi elde ederiz :

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} = \left[\frac{1 + \frac{x}{x_0}}{1 + \frac{t}{t_0}} \right]^{\frac{2n}{n-1}} \quad (42)$$

olur. Şekil 4 boyutsuz gerilmenin boyutsuz zaman t/t_0 ile $n = 1.3$ için değişimi çizilmiştir. Görüldüğü üzere herhangi bir kesitte gerilme zamanla azalmaktadır.



Şekil 4. $n = 1.3$ için seçilen çeşitli x/x_0 değerleri için $\sigma/\bar{\sigma}$ 'nin t/t_0 ile değişimi

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada malzemesi non-lineer gerilme-şekil değişirme bağıntısına uyan sınır ve başlangıç şartlarına maruz sonlu çubuklarda non-lineer elastik dalga hareketini ve gerilme dağılımını analiz etmek için bir analitik çözüm yöntemi geliştirildi. Gerilme-şekil değişirme eğrisi $\sigma = k\varepsilon^n$ formunda olduğu sürece sunulan metot sonlu uzunluğa sahip çubuklarda elastik-plastik dalga hareketine de uygulanabilir. Bu yönüyle bu çalışma Karman, Donnell ve Rakhmatulin'in içbükey gerilme-şekil değişirme bağıntısına uyan çalışmalarını genişletmektedir. Yeni metot, sonlu çubuklarda dalga hızının n değerine bağlı olduğunu göstermektedir. Diğer taraftan, Karman-Donnell metodu başlangıç yer değiştirmesinin dalga hızı üzerindeki etkisi hakkında herhangi bir bilgi içermemektedir. Yeni metot bu boşlukları doldurmaktadır. Takdir edileceği gibi, non-lineer kısmi denklemlerin açık çözümlerinin bulunması zordur ve bazı durumlarda elde edilmesi genellikle mümkün değildir. Çözümü bulabilirsek bile, çözüm genellikle tekillik içermektedir. Bilahare, diferansiyel denklemin yaklaşık periyodik çözümlerini bulmaya teşebbüs edebiliriz. Bununla

birlikte, biz burada yapılarıdaki dalga hızı ve gerilme analizi ile ilgilendiğimiz için bu yöntem takip edilemez. Ancak, eğer titreşim analizi yapılacaksa, o zaman $T(t)$ 'nin periyodik çözümü kullanılabilir. Bunun için hesaplamalarda n 'nin özel değerleri alınarak Mickens metodu (Mickens, 1996; 2001) kullanılabilir.

Bu çalışmada ikinci önemli nokta, çözümün non-lineer elastik dalganın çubuğun sabitlendiği kısma erişinceye kadar geçerli olduğudur. Bundan sonra, gerilme dalgaları iki uçtan yansyacaklarından, analitik çözüm geçersiz olacaktır.

Son olarak, ne Karman-Donnell metodunun ne de yeni metodun yanal atalet etkileri ve şekil değişirme oranı hassasiyetini içermediğini belirtmek gerekir. Bilahare, bu etkileri içeren yeni bir metot daha hassas sonuçlar verecektir. Yukarıda bahsedilen zorluklar dolayısıyla teorinin bu yeni genişletilmiş hale cevap verip vermeyeceği hala cevaplanması gerekli bir sorudur.

4. REFERANSLAR

- Campell, J. D. 1953. 'An Investigation of the Plastic Behavior of Metal Rods Subjected to Longitudinal Impact', J. Mech.Phys.Solids, 1, 113.
- Craggs, J. W. 1952. 'The Normal Penetration of a Thin Elastic-Plasticplate by a Rigid Circular Cone', Proc. Roy. Soc. Edin., A, 63, 369.
- Cristescu, N. 1957. 'Wave Propagation in Flexible Fibres(Influence of Speed of Deformation)'(In Russian), Priklad.Mat.Mech., 21, 486.
- Donnell, L. H. 1930. 'Longitudinal Wave Transmission and Impact' Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 52, 153.
- Goldsmith, W. 1960. Impact, The Teory and Physical Behavior of Colliding Solids, London, Edward Arnold Ltd, Sayfa. 159-166.
- Hopkins, H. G. 1955. 'On the Behavior of Infinitely Long Rigid Plastic Beams Under Transverse Concentrated Load', J. Mech.Phys.Solids., 4, 38.
- Inmann, Daniel.J. 1994. 'Engineering Vibration', Sayfa. 318-322,Prentice Hall International Edition, ISBN: 0-13-191941-5.
- Karman, T. V. and Duwez, P. E. 1950. 'On the Propagation of Plastic Deformation In Solids', J. Appl. Phys., 21, 987.

Love, A. E. H. 1944. 'A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity ', 4. edition, New York, Dover Publication.

Mickens, R. E. 1996. Oscillation in Planar Dynamic Systems, Singapore, World Scientific.

Mickens, R. E. 2001. Journal of Sound and Vibration, 246 (2), 375-378, Oscilation in an $x^{4/3}$ Potential.

Pala, Y. 2004. 'Mühendislik Mekaniği : Dinamik', Sayfa : 58-69, Nobel Yayıncılık, ISBN : 975-591-657-1.

Pala, Y. 1997. 'Generalized Method Separation of Variables on the Non-linear Elastic-Plastic Wave Motion', J. of Non-Linear Dynamics, Sayfa 49-56.

Rakhmatulin, H. A. 1945. 'On Plastic Waves of Loading (in Russian), Priklad', Mat. Mech., 9, 91.

Taylor, D. B. C. 1954. 'The Dynamics Straining of Metal Having Definite Yield Point', J.Mech.Phys. Solids, 3, 38.

Zukas, J. A., Nicholas, T., Swift, H. F., Greszcuk, L. B., Curran, D. R. 1982. 'Impact Dynamics', Sayfa. 95-109.