УДК 519.242

С. В. Земляна

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ЗАСТОСУВАННЯ ПОСЛІДОВНОГО АНАЛІЗУ ПРИ КОНТРОЛІ НАДІЙНОСТІ В НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМАХ: ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Розглядаються методи контролю на надійність високонадійних виробів, які працюють у кусково-стаціонарному режимі. Наведено загальні положення про реалізацію методу послідовного аналізу для вибіркової реалізації з неперервним часом на основі сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом.

Ключові слова: *послідовний аналіз, вибіркова реалізація з неперервним часом.*

Рассматриваются методы контроля на надежность высоконадежных изделий, работающих в кусочно-стационарном режиме. Приводится общий вид отношения правдоподобия для выборочной реализации с непрерывным временем.

Ключевые слова: *последовательный анализ, выборочная реализация с непрерывным временем.*

In this paper we considered methods to control the reliability of highly reliable products that work in the piecewise stationary mode. We present a general view of the likelihood ratio for a sample realization in continuous time.

Key words: *sequential analysis, sample realization of continuous time.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. В даній роботі розглядаються методи контролю на надійність високонадійних виробів, які працюють у кусково-стаціонарному режимі (це значить, що нестаціонарність викликана раптовими змінами в деякі моменти часу: які при цьому не завжди наперед відомі). Контролюються як самі моменти «розладу», так і параметри надійності на стаціонарніх дільницях при невідомих точних значеннях цих параметрів, а також меж інтервалів стаціонарності.

Під «високою надійністю» розуміють ситуацію, при якій під час проведення випробувань спостерігається мало відмов, або вони довгий час зовсім відсутні і тоді єдиною інформацією про надійність виробу є час неперервної безвідмовної роботи, що далі в тексті буде називатись «використанням неперервних реалізацій» протягом випробувань на надійність. Прикладами таких виробів можуть бути різні енергетичні установки, електроприводи у системах автоматики, відмови яких призводять до катастрофічних наслідків, ракетна техніка, медична апаратура, вузли рухомого складу на залізничному транспорті та ін.

Аналіз останніх досягнень. Основний внесок до теорії планування випробувань вніс А. Вальд, який запропонував метод послідовного аналізу. В наступних роботах Дж.Кифера, Дж.Вольфовиця, Б.Марченко [1–3] ці методи набули подальшого розвитку. Запропоновано точні формули обчислень для вибіркової реалізації з неперервним часом на основі експоненційного закону розподілу часу напрацювання до відмови. Слід зазначити, що в даний час при вирішенні різних задач обробки статистичних даних знайшли широке застосування сплайн-розподіли [4], які найбільш адекватно і достовірно описують реальні процеси. Тому актуальним є використання сплайн-розподілів при розробці обчислювальних схем планування випробувань.

Мета роботи. Необхідно розробити обчислювальну технологію планування випробувань на основі сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом для вибіркової реалізації з неперервним часом.

Основна частина. Припустимо, що щільність розподілу часу безвідмовної роботи об'єкта, який підлягає випробуванню на надійність, має сплайн-експоненційний закон з одним вузлом [4], тобто

$$p\left(t;\lambda_1,\lambda_2,T\right)=$$

$$=\begin{cases}\lambda_1\exp(-\lambda_1)I_t(0,T]+\lambda_2\exp(-\lambda_2 t-(\lambda_1-\lambda_2)T)I_t(T,\infty), & t>0;\\ 0, & t\le 0,\end{cases}\qquad(1)$$

де $\lambda_1>0,\lambda_2>0,T>0$ параметри, T – момент «розладу», а $I_t(a,b]$ та $I_t(a,b)$ індикатори:

$$I_t(a,b]=\begin{cases}1, & t\in\left(a,b\right];\\ 0, & t\notin\left(a,b\right).\end{cases}\quad I_t(a,b)=\begin{cases}1, & t\in(a,b);\\ 0, & t\notin\left(a,b\right).\end{cases}$$

Представимо (1) при $t>0$, як

$$p\left(t\right)=\exp\left(\int_0^t\beta\left(\tau\right)d\tau\right),$$

$$\ln p\left(t\right)=\left(\ln\lambda_1-\lambda_1 t\right)I_t(0,T]+\left(\ln\lambda_2-\lambda_2 t-\left(\lambda_1-\lambda_2\right)T\right)I_t(T,\infty),$$

$$\beta\left(t\right)=\frac{d}{dt}\ln p\left(t\right)=-\lambda_1 I_t(0,T]-\lambda_2 I_t(T,\infty).$$

Таким чином,

$$p(t;\lambda_1,\lambda_2,T)=\exp\left(-\int_0^t\left(\lambda_1 I_t(0,T]+\lambda_2 I_t(T,\infty)\right)d\tau\right)=\exp\left(\Lambda(t)\right). \quad (2)$$

З аналізу (2) видно, що процес відмов описується узагальненим процесом Пуассона з ведучою функцією

$$\Lambda(t)=-\left(\lambda_1 I_t(0,T]+\lambda_2 I_t(T,\infty)\right)t.$$

Позначимо цей процес через x(t). Зазначимо, що x(t) – це кількість відмов, що виникли до моменту часу t.

Тепер сформулюємо гіпотези про стан об`єкта у вигляді:

H_0: $\lambda_1=\lambda_1',\lambda_2=\lambda_2',T=T';\ p(t;\lambda_1',\lambda_2',T')$,

H_1: $\lambda_1=\lambda_1'',\lambda_2=\lambda_2'',T=T'';\ p(t;\lambda_1'',\lambda_2'',T'')$.

де H_0 – основна гіпотеза – об`єкт приймається, а $H_1$ – конкуруюча гіпотеза – об`єкт бракується.

У випадку використання вибіркової реалізації процесу відмов x(t) з неперервним часом логарифм відношення правдоподібності записується у вигляді:

$$z(t)=\ln\frac{p_1(x(t),t)}{p_0(x(t),t)},\qquad z(0)=0, \quad (3)$$

де функції правдоподібності

$$p_0(x(t),t)=$$
$$=\lambda_1'^{x(t)}\exp\left(-\lambda_1' t\right)I_t(0,T']+\lambda_2'^{x(t)}\exp\left(-\lambda_2' t-\left(\lambda_1'-\lambda_2'\right)T'\right)I_t(T',\infty)$$ та

$$p_1(x(t),t)=$$
$$=\lambda_1''^{x(t)}\exp(-\lambda_1'' t)I_t(0,T'']+\lambda_2''^{x(t)}\exp\left(-\lambda_2'' t-\left(\lambda_1''-\lambda_2''\right)T''\right)I_t(T'',\infty)$$

визначаються з врахуванням неперервності часу спостережень.
z(t) – це неперервний процес на інтервалі [0, t], на відміну від випадкової послідовності, яка характерна для дискретної вибірки відмов. При такому підході використовується вся інформація, що отримується на інтервалі часу випробувань [0, t], а у випадку з дискретною вибіркою використовувалась лише інформація про відмови. Це дозволяє скоротити середню кількість випробувань.

Вираз (3) можна записати у вигляді:

1) $T'<T''$

$$z(t)=\left[x(t)\ln\frac{\lambda_1''}{\lambda_1'}-\left(\lambda_1''-\lambda_1'\right)t\right]I_t(0,T']+\left[x(t)\ln\frac{\lambda_1''}{\lambda_2'}-\left(\lambda_1''-\lambda_2'\right)t+\right.$$

$$\left.+\left(\lambda_1'-\lambda_2'\right)T'\right]I_t(T',T'']+\left[x(t)\ln\frac{\lambda_2''}{\lambda_2'}-\left(\lambda_2''-\lambda_2'\right)t-\right.$$

$$\left.-\left(\lambda_1''-\lambda_2''\right)T''+\left(\lambda_1'-\lambda_2'\right)T'\right]I_t(T'',\infty), \tag{4'}$$

2) $T' > T''$

$$z(t)=\left[x(t)\ln\frac{\lambda_1''}{\lambda_1'}-\left(\lambda_1''-\lambda_1'\right)t\right]I_t(0,T'')+\left[x(t)\ln\frac{\lambda_2''}{\lambda_1'}-\left(\lambda_2''-\lambda_1'\right)t-\right.$$

$$\left.-\left(\lambda_1''-\lambda_2''\right)T''\right]I_t(T'',T']+\left[x(t)\ln\frac{\lambda_2''}{\lambda_2'}-\left(\lambda_2''-\lambda_2'\right)t-\right.$$

$$\left.-\left(\lambda_1''-\lambda_2''\right)T''+\left(\lambda_1'-\lambda_2'\right)T'\right]I_t(0,T'), \tag{4''}$$

3) $T' = T'' = T$

$$z(t)=\left[x(t)\ln\frac{\lambda_1''}{\lambda_1'}-\left(\lambda_1''-\lambda_1'\right)t\right]I_t(0,T]+\left[x(t)\ln\frac{\lambda_2''}{\lambda_2'}-\left(\lambda_2''-\lambda_2'\right)t-\right.$$

$$\left.-\left(\lambda_1''-\lambda_2''+\lambda_1'-\lambda_2'\right)T\right]I_t(T,\infty). \tag{4'''}$$

Введемо позначення: $a=\ln A$; $b=\ln B$. Використавши результати [1], можна стверджувати, що

$$b=\ln\frac{\beta}{1-\alpha}, \tag{5}$$

$$a\le\ln\frac{1-\beta}{\alpha}. \tag{6}$$

Таким чином, вираз (5) дає точну формулу для знаходження b, на відміну від виразу (6).

Для визначення точного значення a потрібно розглянути процес R(t) наступного вигляду (залежно від випадків 1) – 3)):

1) $T_0' < T_0''$

а) $t \in \left(0, T_0'\right]$ $\quad R(t) = \dfrac{z(t)}{\ln r_1} = x(t) - c_1 t,\ r_1 = \dfrac{\lambda_1''}{\lambda_1'}, c_1 = \dfrac{\lambda_1'' - \lambda_1'}{\ln r_1}$;

б) $t \in \left(T_0', T_0''\right]$

$$R(t) = \frac{z(t)}{\ln r_2} = x(t) - c_2 t + d_2,\ r_2 = \frac{\lambda_1''}{\lambda_2'}, c_2 = \frac{\lambda_1'' - \lambda_2'}{\ln r_2},\ d_2 = \frac{\lambda_1' - \lambda_2'}{\ln r_2} T_0';$$

в) $t \in \left(T_0'', \infty\right)$ $\quad R(t) = \dfrac{z(t)}{\ln r_3} = x(t) - c_3 t + d_3,\ r_3 = \dfrac{\lambda_2''}{\lambda_2'}, c_3 = \dfrac{\lambda_2'' - \lambda_2'}{\ln r_3}$,

$$d_3 = \frac{\lambda_1' - \lambda_2'}{\ln r_3} T_0' - \frac{\lambda_1'' - \lambda_2''}{\ln r_3} T_0'';$$

2) $T_0' > T_0''$

а) $t \in \left(0, T_0''\right]$ $\quad R(t) = \dfrac{z(t)}{\ln r_1} = x(t) - c_1 t,\ r_1 = \dfrac{\lambda_1''}{\lambda_1'}, c_1 = \dfrac{\lambda_1'' - \lambda_1'}{\ln r_1}$;

б) $t \in \left(T_0'', T_0'\right]$ $\quad R(t) = \dfrac{z(t)}{\ln r_2} = x(t) - c_2 t + d_2,\ r_2 = \dfrac{\lambda_2''}{\lambda_1'}, c_2 = \dfrac{\lambda_2'' - \lambda_1'}{\ln r_2}$,

$$d_2 = -\frac{\lambda_1'' - \lambda_2''}{\ln r_2} T_0'';$$

в) $t \in \left(T_0', \infty\right)$ $\quad R(t) = \dfrac{z(t)}{\ln r_3} = x(t) - c_3 t + d_3,\ r_3 = \dfrac{\lambda_2''}{\lambda_2'}, c_3 = \dfrac{\lambda_2'' - \lambda_2'}{\ln r_3}$,

$$d_3 = \frac{\lambda_1' - \lambda_2'}{\ln r_3} T_0' - \frac{\lambda_1'' - \lambda_2''}{\ln r_3} T_0'';$$

3) $T_0' = T_0'' = T$

а) $t \in (0, T]$ $\quad R(t) = \dfrac{z(t)}{\ln r_1} = x(t) - c_1 t,\ r_1 = \dfrac{\lambda_1''}{\lambda_1'}, c_1 = \dfrac{\lambda_1'' - \lambda_1'}{\ln r_1}$;

б) $t \in (T, \infty)$ $\quad R(t) = \dfrac{z(t)}{\ln r_2} = x(t) - c_2 t + d_2,\ r_2 = \dfrac{\lambda_2''}{\lambda_2'}, c_2 = \dfrac{\lambda_2'' - \lambda_2'}{\ln r_2}$,

$$d_2 = \frac{\lambda_1' - \lambda_2' - \lambda_1'' + \lambda_2''}{\ln r_2} T.$$

Висновки та перспективи подальшого розвитку. Представлено загальні положення про реалізацію методу послідовного аналізу, отримано вигляд відношення правдоподібності для вибіркової реалізації з неперервним часом. Надалі представляється доцільним розглянути окремо часткові випадки в залежності від взаємного розташування вузлів сплайн-розподілу.

Бібліографічні посилання

1. **Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J.** Sequential decision problems for process with continuosis time parameter. Testing Hypotheses. // The Annals of Mathematical Statistics, – June, 1953, – 24, 2. –P.254–264.
2. **Kiefer J., Wolfowitz J.** Sequential Tests of Hypothes about the mean occurense time of continuous parameter Poisson process // Naval research Logistics quartaly – 3, 3 (1956). –P.205–219.
3. **Броди С.М.** Расчет и планирование испытаний систем на надежность. / С.М. Броди, О.Н. Власенко, Б.Г. Марченко – К., 1970. –192 с.
4. **Приставка А.Ф.** Сплайн-распределения в статистическом анализе. / А.Ф. Приставка – Днепропетровск, 1995. – 152 с.

Надійшла до редколегії 26.09.11