УДК 519.248:62-192

Ю. І. Швацька, О. П Приставка

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ОЦІНКА ЗГОРТКИ РОЗПОДІЛУ ВЕЙБУЛЛА ШЛЯХОМ РОЗКЛАДАННЯ В РЯД

Розроблена обчислювальна технологія знаходження згортки розподілів Вейбулла шляхом розкладання у степеневий ряд. Проведено аналіз залежності кількості членів у розкладанні ряду Тейлора від значень параметра форми β.

Ключові слова: *згортка, розподіл Вейбулла, апроксимація, розкладання в ряд Тейлора, імперична функція розподілу, число відновлень, похибка наближення, моменти розподілу, кількість членів ряду, обсяг вибірки.*

Разработана вычислительная технология построения свертки распределений Вейбулла путем разложения в степенной ряд. Проведен анализ зависимостей количества членов ряда в разложении ряда Тейлора от значений параметра формы β.

Ключевые слова: *свертка, распределение Вейбулла, аппроксимация, разложение в ряд Тейлора, империческая функция распределения, число восстановлений, ошибка приближения, моменты распределения, количество членов ряда, размер виборки.*

Computer technology of convolution of the Weibull distribution by expanding in power series was designed. Dependency analysis of number of members in the Taylor series expansion from the values of the shape parameter β has been made.

Key words: *convolution, Weibull distribution, approximation, expanding in the Taylor series, empiric distribution function, number of updates, approximation error, moments of distribution, membership number, sample size.*

Вступ. Для розвитку прогресивних інформаційних систем, технологій моделювання структур та методів моніторингу є актуальною розробка нових обчислювальних процедур обробки даних. Задачі пов'язані з оцінкою ефективності технічних систем та процесів накопичення порушень у системах екологічного моніторингу належать до задач теорії відновлення, основною метою якої є знаходження згортки випадкових величин при кінцевому n

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} \xi_i , \xi_i > 0 . \qquad (1)$$

Розв'язок задачі побудови згортки (1) знайдено для ряду розподілів: експоненційного, нормального, рівномірного [4], оскільки для даних розподілів функція розподілу згортки має кінцевий вигляд.Застосування більш адекватних та достовірних розподілів таких як Вейбулла та інших не дозволяє в кінцевому разі знаходити розподіл згортки (1). Оскільки точний розв'язок цієї задачі досі не отриманий, тому актуальною є побудова різноманітних варіантів апроксимацій, прийнятних з різних точок зору: точності, легкості в реалізації, обґрунтованості та ін.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Одним з найперших авторів, які займались питаннями теорії відновлення, а саме аналізом характеристик числа відновлень у проміжку [0, t], вважають Лідбеттера, який в [7] займався побудовою моментів факторального типу та виявив, що якщо $F(x) = P\{x_i \le x\}$ може бути представлена в вигляді степеневого ряду, то моменти даного розподілу можуть бути представлені у вигляді ряду, коефіцієнти якого лінійним чином виражаються через коефіцієнти розкладання $F(x)$. Феллер дослідив інтегральне рівняння функції відновлення [8]. У [9] досліджено щільність функції відновлення при $t \to \infty$.

Результати попередників були узагальнені Д. Р. Коксом та В. Л. Смітом в [1]. Автори займаються дослідженням основних моделей розподілів, розподілів числа відновлень, моментами числа відновлень, налагодженням процесів відновлення, альтернуючими процесами відновлення, ймовірнісними моделями відмов та стратегіями замін. У цій роботі розглядається процес відновлення, коли кількість елементів була достатньо великою, тобто n→∞.

Першу спробу побудови згортки розподілів Вейбулла здійснили W. L. Smith та M. R. Leadbetter в [2]. У подальшому, дослідження в цій області прийняли один з наступних підходів:

1. Розробка алгоритмів для явного обчислення згорток, що лежать в основі розподілу.

2. Обчислення функції відновлення, звертаючись до перетворення Лапласа-Стільт'єса. [3]

У [4; 5] запропоновано сучасний підхід до представлення n-кратних згорток функцій розподілу у вигляді n-кратних узагальнених степенних рядів для різних законів розподілу, таких як експоненційний, Гамма-розподіл, розподіл Релея, Максвелла, Вейбулла-Гнеденко, а також представлення функції розподілу у вигляді $k2$-кратного узагальненого степеного ряду для експоненційного розподілу, розподілів Вейбулла-Гнеденко і Максвелла.

Основні два критерії, які часто використовуються для оцінки переваг аналітичних методів апроксимації: складність апроксимаційної моделі й точності апроксимації. Незважаючи на різні аналітичні моделі, що були запропоновані, дуже мало які з них можуть задовільнити одразу обидві вимоги в один і той самий час.

Дана робота наводить обчислювальні процедури побудови згортки розподілів Вейбулла шляхом розкладання в безкінечний ряд. Проведено аналіз методу апроксимації функції розподілу Вейбулла розкладанням у ряд Тейлора та зроблено висновки щодо його ефективності відносно апроксимаційної похибки наближення.

Постановка задачі. Знайти згортку n розподілів Вейбулла шляхом проведення апроксимації розподілу Вейбулла розкладанням у ряд Тейлора з подальшим знаходження функції розподілу згортки розподілів Вейбулла у вигляді безкінечного ряду. Провести аналіз наступних залежностей:

– залежність між мінімально необхідною кількістю членів в розкладанні ряду функції розподілу згортки та параметрами форми β розподілів Вейбулла;

– залежність між мінімально необхідним обсягом вибірки, достатнім для проведення імітаційного моделювання згортки та параметрами форми β розподілів Вейбулла.

Основний матеріал. Нехай $t_1, t_2, ...$ – послідовність незалежних та ідентично розподілених невід’ємних випадкових змінних із загальною функцією розподілу

$$F(t) = P(t_i \le t) . \tag{2}$$

Тоді функція розподілу суми $T_n = t_1 + t_2 + ... + t_n$ буде

$$F^{(n)}((t) = P(T_n \le t) , \tag{3}$$

де

$$F^{(1)}(t) = F(t); \tag{4}$$

$$F^{(n+1)}(t) = \int_0^t F^n(t-x)dF(x). \tag{5}$$

Визначимо $N(t)$ – число відновлень в інтервалі [0, t] – як величину n, коли справедливе співвідношення $T_n \le t \le T_{n+1}$, при $t_1 \le t$, $N(t) = 1$ і $N(t) = 0$ при $t_1 > t$.

Таким чином, отримуємо

$$P(N(t)=n)=\begin{cases}F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t),\ n>0\\ 1-F(t),\ n=0.\end{cases} \tag{6}$$

Моменти $N(t)$ виражаються наступним чином:

$$\begin{aligned}E(N(t)^k) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^k \cdot P(N(t)=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k \cdot \left(F_n(t)-F_{n+1}(t)\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^k-(n-1)^k\right)\cdot F_n(t).\end{aligned} \tag{7}$$

Зокрема середнє значення $N(t)$ дорівнює

$$M(t)=E(N(t))=\sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t), \tag{8}$$

отже

$$M(t)=F^{(1)}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t F^{(n)}(t-x)dF^{(1)}(x)=F^{(1)}(t)+\int_0^t M(t-x)dF^{(1)}(x) \tag{9}$$

Останній вираз представляє собою фундаментальне рівняння теорії відновлення. Можна отримати інтегральне рівняння для вищих моментів, розглядаючи біноміальні моменти

$$M_k(t)=E\begin{pmatrix}N(t)\\ k\end{pmatrix}=E\left(\frac{N(t)\cdot(N(t)-1)\cdot\ldots\cdot(N(t)-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\right). \tag{10}$$

Тоді маємо

$$M_k(t)=\sum_{n=k}^{\infty}\begin{pmatrix}n\\ k\end{pmatrix}\cdot\left(F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)\right)=\sum_{n=k}^{\infty}\begin{pmatrix}n-1\\ k-1\end{pmatrix}\cdot F^{(n)}(t). \tag{11}$$

[6]

Розглянемо представлення згорток будь-якого порядку у вигляді кратних рядів, використовуючи розкладання в ряд функцій розподілу, які входять до згортки.

Нехай

$$F_i(t)=\sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} f_{i,j}(t), i\ge 1, \tag{12}$$

$$F_i'(t)=\sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} f_{i,j}'(t), i\ge 1. \tag{13}$$

Будемо вважати, що ряди (12) збігаються рівномірно на будь-якому проміжку [0, T], а ряди (13) рівномірно на [ε, T] для будь-якого $\varepsilon>0$, а в нулі можуть мати інтегруєму особливість.

Замінюючи функції розподілу відповідними рядами (12) і (13) та, інтегруючи, приходимо до виразу n-кратної згортки через n-кратний ряд:

$$\begin{aligned} F^{(2)}(t) &= (F_1 * F_2)(t) = \int_0^t F_1(t-x)dF_2(x) = \int_0^t \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j} f_{1,j}(t-x) \right) dF_2(x) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j} \int_0^t f_{1,j}(t-x)dF_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j} \int_0^t f_{1,j}(t-x) \sum_{m=0}^{\infty} c_{2,m}(x)df_{2,m}(x) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{1,j}c_{2,m} \int_0^t f_{1,j}(t-x)df_{2,m}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{1,j}c_{2,m}(f_{1,j} * f_{2,m})(t) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} c_{1,k_1} c_{2,k_2} f_{\overline{\mathrm{k}}_2}^{(2)}(t) = \sum_{\overline{\mathrm{k}}_2=0}^{\infty} c_{\overline{\mathrm{k}}_2}^{(2)} f_{\overline{\mathrm{k}}_2}^{(2)}(t), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\overline{\mathrm{k}}_2 = \{k_1, k_2\}, c_{\overline{\mathrm{k}}_2}^{(2)} = c_{1,k_1} c_{2,k_2}, f_{\overline{\mathrm{k}}_2}^{(2)}(t) = (f_{1,k_1} * f_{2,k_2})(t) \,. \tag{15}$$

По індукції отримуємо: $F^{(n)}(t) = \sum_{\overline{\mathrm{k}}_n=0}^{\infty} c_{\overline{\mathrm{k}}_n}^{(n)} f_{\overline{\mathrm{k}}_n}^{(n)}(t)$, (16)

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{k}}_n = \{k_1, k_2, ..., k_n\},\ c_{\overline{\mathrm{k}}_n}^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} c_{i,k_i}, \\ &f_{\overline{\mathrm{k}}_n}^{(n)}(t) = \left(f_{\overline{\mathrm{k}}_{n-1}}^{(n-1)} * f_{n,k_n} \right)(t),\ f_{k_1}^{(1)} = f_{1,k_1}(t), \\ &\sum_{\overline{\mathrm{k}}_n=0}^{\infty} c_{\overline{\mathrm{k}}_n}^{(n)} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} ... \sum_{k_n=0}^{\infty} c_{1,k_1} c_{2,k_2} ... c_{n,k_n}. \end{aligned} \tag{17}$$

Розглянемо функцію розподілу Вейбула з параметром β і характеристичною довготривалістю α=1. Для цього випадку функція розподілу має вигляд: $F(t) = 1 - e^{-t^{\beta}} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{\beta k}}{k!}$. (18)

Для отриманого виразу функції розподілу згортки n випадкових величин з розподілу Вейбулла в [4] запропоновано рішення задачі розглядати в наступному вигляді:

$$F^{(n)}(t) = \sum_{\overline{k_n}=1, k_i>0}^{\infty} (-1)^{\left|\overline{k_n}\right| - n} \frac{B_{\overline{k_n}}^{(n)}}{\Gamma((\overline{\beta_n}, \overline{k_n})+1)} t^{(\overline{\beta_n}, \overline{k_n})}, \tag{19}$$

$$B_{\overline{k_n}}^{(n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\beta_i n_i + 1)}{\overline{k_n}! \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\beta_i k_i}}$$

та доведена абсолютна збіжність ряду, яким апроксимується функція розподілу згортки розподілів Вейбулла [5]

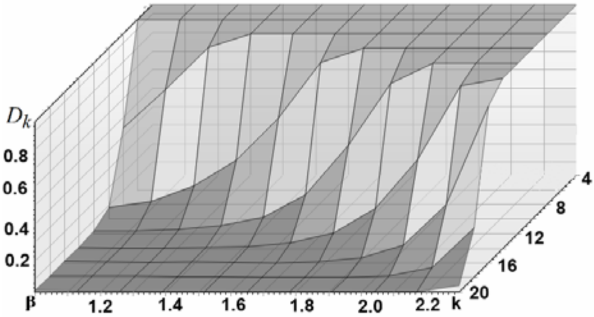

Рис. 1. Графік залежності кількості членів розкладання в ряд Тейлора при β від 0.6 до 1, k – кількість коефіцієнтів у розкладанні ряду, D_k – різниця між імперичною та апроксимованою функцією розподілу

При знаходженні такої згортки виникає задача оцінки числа членів ряду в розкладанні функції розподілу згортки. Аналіз залежності кількості членів у розкладанні ряду Тейлора від значень параметру форми β показав, що кількість членів у розкладанні ряду згортки пропорційна значенням параметра β.

За результатами проведеного аналізу запропонованого методу апроксимації функції розподілу згортки розподілів Вейбулла засобами середовища Delphi 2009 було розроблено програмне забезпечення та отримані наступні результати:

– для побудови згортки 2-х однаково розподілених випадкових величин з параметром $\beta \in [0.6, 1]$ за ймовірності 0.95 достатньо від 10 до 15 членів в розкладанні ряду для того, щоб різниця між імперичною функцією розподілу, отриманою шляхом імітаційного моделювання, та апроксимацією у вигляді ряду не перевищувала $D_k = \max_{1 \le i \le k} \left| F_e(t_i) - F_a(t_i) \right| = 0.02$ (рис. 1. Графік залежності кількості членів розкладання в ряд Тейлора при β від 0.6 до 1)

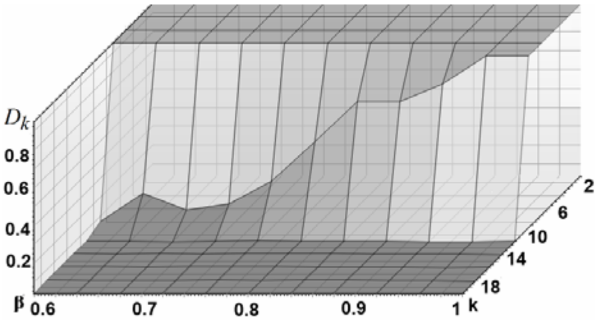

Рис. 2. Графік залежності кількості членів розкладання в ряд Тейлора при β від 1 до 2.3, k – кількість коефіцієнтів у розкладанні ряду, D_k – різниця між імперичною та апроксимованою функцією розподілу

– для побудови згортки 2-х однаково розподілених випадкових величин з параметром $\beta \in [1, 2.3]$ за ймовірності 0.95 достатньо від 15 до 25 членів у розкладанні ряду для того, щоб різниця між імперичною функцією розподілу та апроксимацією у вигляді ряду не перевищувала $D_k = \max\limits_{1 \le i \le k} \left| F_e(t_i) - F_a(t_i) \right| = 0.03$ (рис. 2. Графік залежності кількості членів розкладання в ряд Тейлора при β від 1 до 2.3)

– для побудови згортки 2-х однаково розподілених випадкових величин з параметром $\beta \in [2.3, 3.8]$ за ймовірності 0.95 достатньо від 25 до 25 членів у розкладанні ряду для того, щоб різниця між імперичною функцією розподілу та апроксимацією у вигляді ряду не перевищувала $D_k = \max\limits_{1 \le i \le k} \left| F_e(t_i) - F_a(t_i) \right| = 0.03$ (рис. 3. Графік залежності кількості членів розкладання в ряд Тейлора при β від 2.3 до 3.8)

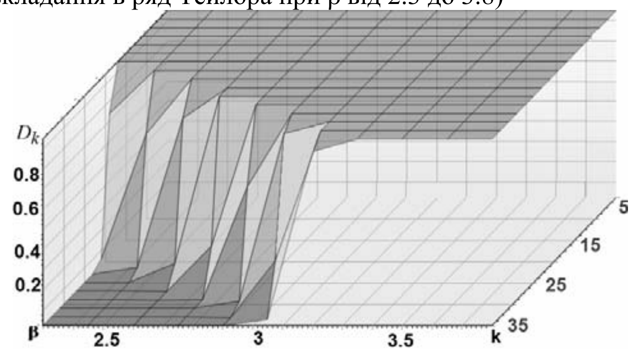

Рис. 3. Графік залежності кількості членів розкладання в ряд Тейлора при β від 2.3 до 3.8, k – кількість коефіцієнтів у розкладанні ряду, D_k – різниця між імперичною та апроксимованою функцією розподілу

З результатів таблиці 1 можна зробити висновки про те, що за ймовірності 0.95 для побудови згортки розподілів Вейбулла з параметрами $0 < \beta \le 1$ достатньо 15 членів у розкладанні ряду, при $\beta > 1$ в розкладанні ряду необхідно застосувати не менш, ніж 25 членів, для різниці між імперичною функцією розподілу та апроксимацією згортки 0.03.

Таблиця 1

Необхідна мінімальна кількість членів розкладання в ряд Тейлора

β	**K**
<1	10–15
1–1.4	15
1.4-1.8	16
1.8–2.05	17
2.05–2.3	20
2.3–2.45	25
2.45–2.9	30–31
2.9–3.05	35
>3.05	>35

де **K** – мінімальна кількість членів розкладання в ряд Тейлора

Обсяг вибірки даних для імітаційного моделювання не залежить від параметра β, але об’єм моделювання не повинен бути меншим за 1000 елементів, оскільки похибка апроксимації збільшується при об’ємі моделювання меншим за 1000 елементів.

Висновки. При кількості членів ряду більшим за 25 для будь-яких значень параметра β різниця між імперичною функцією розподілу згортки розподілів Вейбулла, отриманою шляхом імітаційного моделювання, та апроксимацією згортки розподілів Вейбулла у вигляді ряду не перевищує $D_k = \max\limits_{1 \le i \le k} \left| F_e(t_i) - F_a(t_i) \right| = 0.03$ і є зворотньопропорційною кількості членів у розкладанні ряду згортки розподілів.

Застосування апроксимації згортки розподілів Вейбулла за допомогою рядів при $0 < \beta \le 1$ є доцільним лише при кількості коефіцієнтів більшим за 15 в розкладанні початкового ряду, а при $\beta > 1$ – більшим за 25.

При кількості коефіцієнтів меншим за 15 для $0 < \beta \le 1$ та 25 для $\beta > 1$ метод апроксимації розкладанням у ряд поступається іншим апроксимаційним методам і не рекомендується до використання.

Унаслідок того, що метод апроксимації розподілу Вейбулла розкладання в ряд є громіздким, він не може бути використаним у багатьох видах практичних задач, тому найчастіше будуються апроксимації розподілу Вейбулла, засновані на експоненційному розподілі.

Бібліографічні посилання

1. **Кокс Д. Р.** Теория восстановления ; пер. с англ. / Д. Р. Кокс, В. Л. Смит, – М., 1967. – 298 с.
2. **Smith W.L.** On the renewal function for the Weibull distribution / W.L. Smith, M.R. Leadbetter – Technometrics 5 (3), 1963. – P. 393–396.
3. **Horst Rinne.** The Weibull Distribution: A Handbook/ Chapman & Hall / CRC, 2008. – 816 p.
4. **Вайнштейн В. И.** Представление N-кратных сверток функций распределения в виде рядов и нахождение функции восстановления для некоторых моделей процессов восстановления. / В. И. Вайнштейн // Электронный журнал «Исследовано в России».– 2005. – Т. 8. – С. 486-496.
5. **Вайнштейн И. И.**. Представление функции восстановления в виде степенных рядов и их сходимость. / И. И. Вайнштейн, О. О. Шмидт // Электронный журнал «Исследовано в России».– 2008. – Т. 8. – С. 549-554.
6. **White Johns**. Weibull reneval analysis. “3rd Annual Aerospace Reliable and Maintainatil Conf., Washington, D.C., 1964”, – New York, N.Y., Soc. Autonom. Engrs, 1964, 639-657
7. **Leadbetter M. R.** On series expansion for the renewal moments. – Biometrika. 1963. 50, №1–2, 75-80.
8. **Feller W. A** simple proof for renewal theorems. Communs. Pure and Appl. Math., 1961, 14, № 3, 285-293.
9. **Smith W. L.** On necessary and sufficient conditions for the convergence of the renewal density. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 104, № 1, 79-100

Надійшла до редколегії 25.08.11