SAÜ. Fen Bil. Der. 17. Cilt, 2. Sayı, s. 267-270, 2013 SAU J. Sci. Vol 17, No 2, p. 267-270, 2013

P-laplasyen terim içeren bir dalga denklemi için phragmen-lindelöf tipi kestirimler

Yalçın Yılmaz[1*], Emel Aydın[1]

[1]Matematik Bölümü, Fen-Edebiyat Fakültesi, Sakarya Üniversitesi

02.01.2013 Geliş/Received, 04.04.2013 Kabul/Accepted

ÖZET

Sınır-değer problemlerinin çözümlerinin uzay değişkenine ve zaman göre davranışları Phragmen-Lindelof teoremi ve Saint-Venant prensibi gibi teoriler kullanılarak incelenmektedir. Bu çalışmada p-Laplasyen terim içeren bir hiperbolik denklem için uzay değişkenine göre davranış incelenmiştir. P sabitine bağlı olarak çözümlerin ne şekilde sıfıra gittiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: p-Laplasyen, uzaysal davranış, dalga denklemi, Saint-Venant Prensibi, Phragmen-Lindelof teoremi

For a wave equation involving p-laplacian term phragmen-lindelof type estimates

ABSTRACT

Behaviours of the solutions to initial-boundary value problems in terms of spatial or time variables are investigated by the theories such as Phragmen-Lindelof Theorem and Saint-Venant Principle. In this work, behaviours of solutions to a hyperbolic equation involving p-Laplacian term in terms of spatial variable is studied. It is showed that how the solutions decay to zero depending on the constant p.

Keywords: p-Laplacian, spatial behaviour, wave equation, Saint-Venant Principle, Phragmen-Lindelof Theorem

[*] Sorumlu Yazar / Corresponding Author

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Saint-Venant prensibi elastisite teorisinde ve uygulamalarında merkezi bir öneme sahiptir. Lineer veya lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin çözümlerinin uzaysal incelemesinde 40'lı yıllardan beri bir çok yazar tarafından kullanılan yöntem bir yönüyle Phragmen-Lindelof Prensibinin bir azalım kısmını oluşturmaktadır. Lineer sınır koşulları altında hiperbolik denklemlerde özellikle de dalga denklemi için Phragmen-Lindelof tipi kestirimler birçok yazar tarafından incelenmiştir [1-4]. [5] de Flavin ve Knops, lineer bir dalga denklemi için lineer olmayan sınır koşulları altında çözümlerin bir normunun üstel hızla sıfıra gittiğini göstermişlerdir. [6] de ise Quintanilla, hiperbolik bir ısı denklemi için uzaysal davranışını incelemiş, çözümlerin asimptotik kararlılığında ortaya çıkan katsayılar için bir üst sınır elde etmiştir. Literatürde p-Laplasyen terim içeren başlangıç-sınır değer problemleri için uzaysal kararlılık ve varlık çalışmaları mevcuttur [7-8].

2. ARTIM KESTİRİMİ (ESTIMATING INCREASE)

Bu incelemede p-Laplasyen terim içeren lineer bir dalga denklemiyle verilen aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi dikkate alınmıştır.

$$u_{tt} - \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \Delta u_t \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T] \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ \ x \in \Omega \tag{2}$$

$$u(x,t) = 0,\ \ x \in \partial\Omega, t \in [0,T] \tag{3}$$

$$u(x',0,t) = f(x_1,x_2,t),\ \ t \in [0,T] \tag{4}$$

Burada $\Omega = \{x \in R^3 : x_3 \in R^+, x' = (x_1,x_2) \in D_{x_3}\} \subset R^2$, $z > 0$, $D_z \subset R^2$ ve ∂D_z sınırları Diverjans teoremini uygulayacak kadar yeterince düzgün olsun. Burada Δ, R^3 deki Laplace operatörünü gösterir. $\Omega_z = \Omega \cap \{x \in R^3 : 0 < x_3 < z\}$, $R_z = \Omega \cap \{x \in R^3 : z < x_3 < \infty\}$ olmak üzere dV ile Ω_z bölgesindeki, ds ile de D_z bölgesindeki integral elemanı ifade edilir. Ayrıca aşağıdaki işlemlerde $(u,v)_{\Omega_z} = \int_{\Omega_z} uv dV$, $(u,v)_{D_z} = \int_{D_z} uv ds$ gösterimleri kullanılır.

Teorem 1. $u(x,t)$, (1)-(4) probleminin trivial olmayan bir çözümü ve $f(x_1,x_2,t) \equiv 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\liminf_{z\to\infty} E(z)\, z^{-(p/p-2)} > 0, \qquad p > 2$$

$$\liminf_{z\to\infty} E(z) e^{-\frac{z}{c}} > 0, \qquad p = 2$$

$$\liminf_{z\to\infty} E(z) z^{-(2/2-p)} > 0,\ p < 2.$$

İspat: Bu amaçla (1) denklemi $u_t + \varepsilon u$ ile çarpılır ve Ω_z bölgesinde L_2de integre edilirse

$$\frac{d}{dt}[\tfrac{1}{2}\int_{\Omega_z} u_t^2 dV + \varepsilon\int_{\Omega_z} uu_t\, dV + \frac{1}{p}\int_{\Omega_z} |\nabla u|^p\, dV +$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV - \varepsilon\int_{\Omega_z} u_t^2 dV +$$

$$\varepsilon\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV + \int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2 dV \ \le \left|\int_{D_z} u_t u_3^{p-1} ds\right| +$$

$$\left|\varepsilon\int_{D_z} uu_3^{p-1} ds\right| + \left|\int_{D_z} u_t u_{3t} ds\right| + \left|\varepsilon\int_{D_z} uu_{3t} ds\right| \tag{5}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik t'ye göre [0,T] aralığında integre edilirse

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_z} u_t^2 dV + \varepsilon\int_{\Omega_z} uu_t\, dV + \frac{1}{p}\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV +$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV - \varepsilon\int_0^T\int_{\Omega_z} u_t^2 dV\, d\Gamma$$

$$+\varepsilon\int_0^T\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV d\Gamma + \int_0^T\int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2 dV d\Gamma \le$$

$$\left|\int_0^T\int_{D_z} u_t u_3^{p-1} ds d\Gamma\right| + \varepsilon\left|\int_0^T\int_{D_z} uu_3^{p-1} ds d\Gamma\right| +$$

$$\left|\int_0^T\int_{D_z} u_t u_{3t} ds d\Gamma\right| + \varepsilon\left|\int_0^T\int_{D_z} uu_{3t} ds d\Gamma\right| \tag{6}$$

elde edilir. Sol taraftaki $\varepsilon\int_{\Omega_z} uu_t\, dV$ terimi için $\delta > 0$ olmak üzere, Cauchy ve Poincare eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_z} u_t^2 dV - \frac{\varepsilon\delta\lambda}{2}\int_{\Omega_z}\frac{\nabla u^2}{2} dV - \frac{\varepsilon}{2\delta}\int_{\Omega_z}\frac{u_t^2}{2} dV +$$

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV \le$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)\int_{\Omega_z} u_t^2 dV + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon\delta\lambda}{2}\right)\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV +$$

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV \tag{7}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\frac{\varepsilon}{\delta} < 1 \Rightarrow \delta > \varepsilon$ ve $1 - \lambda\delta > 0 \Rightarrow \delta < \frac{1}{\lambda}$ olarak alınır, yani $\varepsilon < \delta < \frac{1}{\lambda}$ şeklinde seçilirse

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)\int_{\Omega_z} u_t^2 dV + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon\delta\lambda}{2}\right)\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV +$$

$\frac{1}{p}\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\,dV \geq 0$
bulunur ve aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\int_0^T\left[-\varepsilon\int_{\Omega_z}u_t^{\,2}dV+\varepsilon\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\,dV+\int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2dV\right]d\Gamma$$

$$\leq\left|\int_0^T\int_{D_z}u_tu_3^{p-1}dsd\Gamma\right|+\varepsilon\left|\int_0^T\int_{D_z}uu_3^{p-1}dsd\Gamma\right|+$$

$$\left|\int_0^T\int_{D_z}u_tu_{3t}dsd\Gamma\right|+\varepsilon\left|\int_0^T\int_{D_z}uu_{3t}dsd\Gamma\right| \qquad (8)$$

Sol taraftaki ifadede Poincare eşitsizliği kullanılıp

$1-\varepsilon\lambda>0 \Longrightarrow \varepsilon<\frac{1}{\lambda}$, $\varepsilon=\varepsilon_0=\frac{1}{1+\lambda}$ olarak seçildiğinde

$$\int_0^T\left[\varepsilon\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\,dV+\int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2dV-\varepsilon\int_{\Omega_z}u_t^{\,2}dV\right]d\Gamma\geq$$

$$\int_0^T\left[\frac{1}{1+\lambda}\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\,dV+\frac{1}{1+\lambda}\int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2dV\right]d\Gamma \qquad (9)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade (8)'de yerine yazılır ve (8) $1+\lambda$ ile çarpılırsa

$$\int_0^T\left[\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\,dV+\int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2dV\right]d\Gamma\leq$$

$$(1+\lambda)\left|\int_0^T\int_{D_z}u_tu_3^{p-1}dsd\Gamma\right|+$$

$$\left|\int_0^T\int_{D_z}uu_3^{p-1}dsd\Gamma\right|+(1+\lambda)\left|\int_0^T\int_{D_z}u_tu_{3t}dsd\Gamma\right|+$$

$$\left|\int_0^T\int_{D_z}uu_{3t}dsd\Gamma\right| \qquad (10)$$

elde edilir. (10)'un sağ tarafındaki ilk integral için sırasıyla Hölder, Young ve Poincare eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\left|\int_{D_z}u_tu_3^{p-1}ds\right|\leq\frac{\lambda_1{}^p}{p}\left(\int_{D_z}|\nabla u_t|^pds\right)^{p/2}+$$

$$\frac{p-1}{p}\int_{D_z}|\nabla u|^pds$$

elde edilir. İkinci ifadeye Hölder ve Poincare eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\left|\int_{D_z}uu_3^{p-1}ds\right|\leq\lambda_2{}^{1/p}\int_{D_z}|u|^pds$$

elde edilir. Üçüncü ifadeye Cauchy ve Poincare eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\left|\int_{D_z}u_tu_{3t}ds\right|\leq\frac{1+\lambda_3}{2}\int_{D_z}(\nabla u_t)^2ds$$

ifadesine ulaşılır. Dördüncü ifadeye de benzer şekilde Cauchy, Poincare ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\int_{D_z}uu_{3t}ds\leq\frac{\lambda_4L_z}{2}\left(\int_{D_z}|\nabla u|^pds\right)^{2/p}+\frac{1}{2}\int_{D_z}\nabla u_t^{\,2}ds$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler (10) denkleminde yerine yazıldığında

$$\int_0^T\left[\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\,dV+\int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2dV\right]d\Gamma\leq(1+$$

$$\lambda)\frac{\lambda_1{}^p}{p}\left(\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u_t|^2ds\,d\Gamma+\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^pds\,d\Gamma\right)^{p/2}+$$

$$\left((1+\lambda)\left(\frac{p-1}{p}\right)+\lambda_2{}^{1/p}\right)\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^pds\,d\Gamma+$$

$$\left((1+\lambda)\left(\frac{1+\lambda_3}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)\int_0^T\int_{D_z}(\nabla u_t)^2ds\,d\Gamma+$$

$$\frac{\lambda_4L_z}{2}\left(\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^pds\,d\Gamma+\int_0^T\int_{D_z}(\nabla u_t)^2ds\right)^{2/p} \qquad (11)$$

elde edilir.

$$m_0=\left((1+\lambda)\frac{p-1}{p}+\lambda_2{}^{1/p},\ (1+\lambda)\left(\frac{1+\lambda_3}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$$

$m_1=(1+\lambda)\frac{\lambda_1{}^p}{p}$, $m_2=\frac{\lambda_4L_z}{2}$ olarak seçilir ve (11) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\int_0^T\left[\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\,dV+\int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2dV\right]d\Gamma\leq$$

$$m_1\left(\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u_t|^2ds\,d\Gamma+\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^pds\right)^{p/2}$$

$$+m_0\left(\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u_t|^2ds\,d\Gamma+\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^pds\right)$$

$$+m_2\left(\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^pds\,d\Gamma+\int_0^T\int_{D_z}(\nabla u_t)^2ds\right)^{2/p} \qquad (12)$$

elde edilir.

$$E(z):=\int_0^T\int_{\Omega_z}|\nabla u_t|^2ds\,d\Gamma+\int_0^T\int_{\Omega_z}|\nabla u|^pds\,d\Gamma$$

olarak tanımlandığında

$$E(z)\leq m_1(E'(z))^{p/2}+m_0E'(z)+m_2(E'(z))^{2/p} \qquad (13)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (13) için $\Psi(\gamma)$ fonksiyonu

$\Psi(\gamma)=m_0\gamma+m_1\gamma^{p/2}+m_2\gamma^{2/p}$ olarak

tanımlanmaktadır. Burada p'nin üç farklı durumu için (13) eşitsizliği ele alınmaktadır.
$p>2$ için,

$\liminf\limits_{z\to\infty} \frac{E(z)}{z^{m/m-1}} = \liminf\limits_{z\to\infty} \frac{E(z)}{z^{p/p-2}} =$

$\liminf\limits_{z\to\infty} E(z)\, z^{-(p/p-2)} \geq 0$

$\liminf\limits_{z\to\infty} E(z)\, z^{-(p/p-2)} > 0, \quad p > 2$
elde edilir. p = 2 için,

$\liminf\limits_{z\to\infty} E(z) e^{-\frac{z}{c}} > 0, \quad p = 2$

elde edilir. $p < 2$ için,
$\liminf\limits_{z\to\infty} \frac{E(z)}{z^{m/m-1}} =$

$\liminf\limits_{z\to\infty} \frac{E(z)}{z^{2/2-p}} = \liminf\limits_{z\to\infty} E(z)\, z^{-(2/2-p)} \geq 0$

$\liminf\limits_{z\to\infty} E(z) z^{-(2/2-p)} > 0, \ p < 2$

olarak bulunur.

3. AZALIM KESTİRİMİ (ESTIMATING DECREASE)

Bu kesimde başlangıç-değer probleminin çözümünün R_z bölgesinde ne şekilde değiştiği gösterilmektedir. Bunun için (1)-(4) denklemleriyle verilen problemde toplam enerji sınırlıysa çözüm $x \to \infty$ için sıfıra gider. Bunu şu teoremle ifade edelim:

Teorem 2. $u(x,t)$, (1)-(4) probleminin bir çözümü olsun. Ω bölgesindeki toplam enerji sonlu olduğunda $p = 2$ için çözümler üstel hızla $p \neq 2$ halinde polinomik hızla sıfıra gider.

İspat: Bu amaçla yine (1) denklemi $u_t + \varepsilon u$ ile çarpılıp ve R_z'de integre edildiğinde yukarıdakine benzer işlemler yapılarak

$$E(z) \leq m_1(-E'(z))^{p/2} + m_0(-E'(z)) + m_2(-E'(z))^{2/p} \tag{14}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlik için benzer şekilde p'nin üç farklı durumu incelenirse
$P > 2$ için (14) den

$E(z) \leq c_1(-E'(z))^{2/p}$ bulunur ki buradan

$$E(z) \leq \frac{1}{\left((E(0))^{2-p/2} + C_1 z\right)^{2/p-2}}$$

elde edilir.
$P < 2$ için (14) den

$E(z) \leq c_0(-E'(z))^{p/2}$ elde edilir ve buradan

$$E(z) \leq \frac{1}{\left((E(0))^{p-2/p} + C_0 z\right)^{p/2-p}}$$

ifadesine ulaşılır.
p = 2 için benzer şekilde (14) den

$E(z) \leq -cE'(z)$ bulunur ve buradan

$E(z) \leq E(0)\, e^{-z/m}$ eşitsizliği elde edilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

[1] TOUPİN, R. A., Saint-Venant principle, Arch Rational Mech Anal, 18, 83-96 (1965).

[2] PAYNE, L. E., SCHAEFER, P.W., Phragmen-Lindelof type results for the biharmonic equation, ZAMP, 45, 414- 432 (1994).