05.00.00 Engineering science

05.00.00 Технические науки

UDC 330.46

SYSTEMATIC APPROACH TO MODELLING IN ECONOMIC SYSTEMS INFORMATION PETRI NETS *

Dmitry V. Gorbachev

Orenburg State Institute of Management
16 Volgogradskaya St., Orenburg, 460038
PhD (Technical), associate professor
E-mail: gordi47@mail.ru

The article describes the systematic approach to developing a system of combined models of discrete processes. Mathematical basis for constructing a model of information Petri nets.

Key words: information Petri net, system combined model, language of the terminal type.

Исследование технико-экономических систем (ТЭС) представляет собой достаточно актуальную задачу, особенно в перспективе перехода предприятия на инновационные технологии и методы управления. Для решения данной задачи в настоящее время уже разработаны и активно применяются достаточно эффективные модели, позволяющие исследовать и совершенствовать ТЭС по выбранному критерию. Однако, характерными чертами каждой из них является то, что, во-первых, модель преимущественно отражает лишь ограниченный круг особенностей функционирования элементов систем в строго определенных условиях, а оценки, получаемые при этом, достаточно грубы, чтобы судить об эффективности всей системы; введение же в аппарат описания дополнительных элементов существенно усложняет формализацию задачи.

Во-вторых, при решении прикладных задач с использованием заданного математического аппарата, как правило, требуется разрабатывать свой, в некоторых случаях специфический метод синтеза более рациональной системы.

В-третьих, по своей природе модели процессов, зачастую, относятся к классу стохастических моделей, при реализации которых детерминированные связи, зачастую достаточно важные, учитываются лишь косвенно.

В-четвертых, при переводе аналитических зависимостей полученных моделей, в имитационную форму, т.е. на какой-либо язык программирования ЭВМ, требуются значительные затраты на разработку алгоритмов программного продукта, калибровку, отладку моделей, а также обработку результатов моделирования [1].

Указанные недостатки существующих моделей могут быть преодолены путем комплексного, системного рассмотрения ТЭС, что позволит в конечном итоге проводить не только анализ эффективности ее функционирования, но и рациональным образом синтезировать новую, более совершенную систему.

---

* Работа выполнена в рамках государственного контракта №02.740.11.0666 (шифр заявки «2010-1.1-215-033-032»).

В связи с этим предлагается рассматривать ТЭС как некоторый абстрактный объект, описываемый определенной математической структурой и обладающий рядом характерных для него признаков:

- система рассматривается во всем ее комплексе, при этом за основу берется структурная связанность подсистем и элементов между собой и зависимость эффективности функционирования основной системы, в состав которой она входит, от особенностей ее построения и комплектования;
- при моделировании процессов, протекающих в сложной технической системе, рассматриваются не отдельные их составляющие, а вся технологическая цепочка функционирования объектов системы;
- функционирование системы происходит в установленном масштабе времени;
- при синтезе системы по заданным, возможно нескольким, критериям качества оценивается процесс, протекающий в системе.

Таким образом, перечисленные аспекты подходов к моделированию ТЭС, требований, предъявляемых к системе и методов ее исследования, обуславливают актуальность проведения исследования в данном направлении.

Подход, с помощью которого строится системная модель ТЭС, состоит в следующем.

Исходя из содержательного описания системы, дается точное математическое определение ее элементов, используя для этого аналитические и (или) имитационные формы. Затем на основании реально существующих взаимосвязей между объектами определяется алгебраическая структура модели, описывающая связи объектов. При этом под объектом системы понимается, один или несколько элементов ТЭС (специалисты, оборудование, и т.д.), либо операция или процесс, протекающие в ней.

При построении алгебраической модели ТЭС предполагается, что данная система обладает следующими свойствами: суть система с дискретным временем; стационарная; линейная; с конечным числом входов и выходов [2].

Пусть задано множество моментов времени T_c элементами $t \in Z$, где Z – множество целых чисел; пространство состояний, X, системы равное K^n – векторному пространству n-ок над полем K; U – множество значений входных воздействий (входной алфавит A), оно равно K^m; Y – множество значений выходных величин (выходной алфавит B), равных K^p; Ω – пространство входных воздействий, т.е. пространство произвольных последовательностей $\omega(0), \omega(1),\ldots$ где $\omega(t) \in U$; пространство выходных величин Γ, т.е. произвольных функций $T \to Y$; $\varphi : T \times T \times X \times \Omega \to X$ – переходная функция состояния вида

$$(t+1;\, t, x, \omega) \to \varphi\,(t+1;\, t, x, \omega) = Fx\,(t) + q\;\omega\,(t),$$

где F – матрица ($n \times n$) над полем K, представляющая собой набор признаков описывающих объект; Q - матрица ($n \times m$) над полем K – входные признаки объекта; выходная функция $\eta : T \times X \to Y$ вида

$$(t, x) \to \eta\,(t, x) = Vx,$$

где V – матрица ($a \times d$) над полем K, характеризующая набор выходных признаков объекта.

Тогда ТЭС может быть представлена восьмеркой:

$$S = \langle T, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, \eta \rangle,$$

т.е. – это стационарная динамическая система S с дискретным временем, с m входами и p выходами над полем K, представляющая собой отображения:

$$F : X \to X,$$

$$Q: K^m \to X,$$
$$V: X \to K^p.$$

Поскольку X абстрактное векторное пространство, принято считать, что две системы эквивалентны, если свойства преобразований входных воздействий в выходные величины и свойства переходных преобразований этих систем оказываются идентичными с точностью до некоторого изоморфизма соответствующих пространств состояний. Другими словами, две линейные динамические системы $S = (F, Q, V)$ и $\hat{S} = (\hat{F}, \hat{Q}, \hat{V})$ называются изоморфными тогда и только тогда, когда существует некоторый K-изоморфизм $\alpha: X \xrightarrow{\sim} \hat{X}$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "F"] \arrow[dd, "\wr"', "\alpha"] & X \arrow[dr, "V"] \arrow[dd, "\alpha"', "\wr"] & \\
U \arrow[ur, "Q"] \arrow[dr, "\hat{Q}"'] & & & Y \\
 & \hat{X} \arrow[r, "\hat{F}"'] & \hat{X} \arrow[ur, "\hat{V}"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Следовательно, в этом случае система $\hat{S} = (\hat{F}, \hat{Q}, \hat{V})$ может быть принята в качестве модели реальной системы S, а указанный характер связи между системой и моделью математически выражается свойством функториальности, поэтому соответствующую конструкцию перехода от системы к модели называется функториальной. При этом, функториальность $\hat{S}$ необходима, прежде всего, как свойство, гарантирующее при правильном выборе функтора непротиворечивость модели и согласуемость результатов.

Таким образом, обоснованность применения результатов моделирования опирается на факт существования К-гомоморфизма процесса реализуемого объектами системы $\hat{S}$ и процессом, протекающим в реальной системе S. При этом очевидно, что К-гомоморфизм $\alpha: S \to \hat{S}$ существует по временному параметру $T \xrightarrow{\alpha} T$, характеризующему эффективность функционирования S и $\hat{S}$ соответственно. В связи с чем, задача построения адекватной модели ТЭС сводится к нахождению такой математической структуры, которая при определенном наборе аналитических выражений, имитационных и алгебраических форм, допускает однозначную интерпретацию объектов исследуемой системы.

Возможности для определения такой математической структуры представляет системная комбинированная модель (СКМ). Наиболее существенным преимуществом СКМ по сравнению с другими моделями является то, что реализующий ее алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируемые элементарные явления, составляющие процесс, отражаются полностью с сохранением их логической структуры и последовательности протекания, что позволяет по исходным данным получать сведения о состоянии системы и течении процесса в определенные моменты времени, проводить оценку характеристик системы. При этом роль аналитических моделей, по сравнению с имитационными, заключается в получение представления о поведении системы в реальных условиях, а не в вычислении характеристик и оптимизации отдельных свойств объектов.

Основополагающим принципом при построении СКМ является блочно-модульный принцип, отличительной особенностью которого является то, что каждый модуль представляет собой модель отдельно взятого процесса, а объединение отдельных модулей в единую метамодель осуществляется посредством операторов сопряжения, определяемых в терминах алгебраического подхода.

Одним из эффективных средств решения данной задачи являются графические модели, построенные на базе информационных сетей Петри (ИСП) [1]. ИСП представляет собой систему (C,R), где сеть Петри C есть пятерка $C=(P,T,I,O,\mu)$, а $R=(R_ф,R_p,R_t)$ задает информационную интерпретацию объектов сети Петри. Функционирование сети Петри, а, следовательно, и системы, описывается алфавитом свободного языка L терминального типа (T-типа). Этот язык включает в себя множество всех последовательностей, ведущих от маркировки μ_0 к некоторой фиксированной терминальной маркировке μ'. Язык L $^{m}(C)$ относится к классу языков T-типа и определяется следующим образом:

$L^T(C) = \{\sigma(\beta) \in \Sigma^* \mid \beta \in T^* \,\&\, \delta(\mu,\beta)$ определены, $\forall t_j \in T, \delta(\delta(\mu,\beta),t_j)$ не определены $\}$,

где, $\sigma: T \rightarrow \Sigma$ – функция помечения переходов сети Петри, определяющая условия их срабатывания; Σ – алфавит, включающий в себя множество всех строк Σ^* из символов $\{a,b,c,...\} \in \Sigma$, и множество $\{\lambda\} \subseteq \Sigma$, где λ – пустое слово; $\delta: N^n \times T \rightarrow N^n$ функция следующего состояния для сети $C=(P,T,I,O,\mu)$, которая определена тогда и только тогда, когда $\mu(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j)), \forall p_i \in P$. Если $\delta(\mu, t_j)$ определена , то $\delta(\mu, t_j)=\mu'$, где

$$\mu'(p_i) = \mu(p_i) - \#(p_i, I(t_j)) + \#(p_i, O(t_j)), \forall p_i \in P$$

правило изменения маркировки позиции $p_i \in P$.

Таким образом, в качестве операторов сопряжения могут быть приняты символы из L. По-существу, далее достаточно поставить в однозначное соответствие символам из алфавита L действие, происходящее в реальной системе, и возможно будет получение действенной модели исследуемого объекта в его органическом единстве с системой.

Интерпретация $R_ф$ каждой фишке приписывает информационную среду (структуру данных), которая определяет информационное содержание фишки:

$$R_ф : \Phi \rightarrow \aleph,$$

где $\aleph$ – множество допустимых информационных сред фишек. В прикладном аспекте, не уточняя формальных определений, информационные среды фишек есть произвольные наборы данных и переменных, подлежащих изменениям под воздействием операторов, помещаемых в позициях и переходах, и отражающих течение процесса, реализуемого системой. При прохождении фишки по сети, в зависимости от информационной среды (ИС) позиций и переходов, а также преобразований, выполняемых в них, изменяется ИС фишки.

Каждая позиция p_i сети Петри C обладает собственной ИС, называемой локальной (ЛИС). Обозначим через W множество допустимых ИС позиций. Тогда, при интерпретации

$$R_{p_i} : m \times f^{p_i} \to \mathrm{W},$$

каждой позиции в соответствие ставится позиционное преобразование ИС f^{p_i} из множества информационных преобразований позиций и ЛИС, *W*. Преобразование f^{p_i} имеет вид

$$f = \left\{ f_j : \left| f_j : D_j \times \bigwedge_{k=1}^{r_j} \aleph \to D_j \times \bigwedge_{k=1}^{r_j} \aleph \right. \right\},$$

где $D_j \in W$, $j = \overline{1,n}$ – информационная среда позиции p_i; r_j – пропускная способность позиции p_i $0 < r_j < +\infty$

Посредством f_j осуществляется взаимодействие (обработка) ИС фишек с соответствующими ЛИС позиций. Результатом взаимодействия является изменение ИС фишек $\left(\bigwedge_{k=1}^{r_j} \aleph \to \bigwedge_{k=1}^{r} \aleph \right)$ при постоянстве ЛИС позиций ($\{D_j\} \to \{D_j\}$). Фишки, прошедшие обработку в p_j, составляют выходное множество позиции, откуда они могут быть выбраны соответствующими переходами. ЛИС позиций могут быть по своему содержанию – сложными и пустыми, по выполняемым преобразованиям – предметными, временными и логическими.

Как показано в [3], сложными позициями называются позиции, которые могут быть развернуты в собственную сеть, и несут информационную нагрузку о множестве значений одной переменной. В такие позиции может входить (выходить) несколько дуг, а передача фишек из них осуществляется в соответствии с запросами соединенных с данными позициями переходами. Пустой позицией называется позиция, не имеющая собственной ЛИС и не выполняющая преобразований ИС фишек, но необходимая как изобразительное средство для обеспечения выразительности описания.

Предметными, временными или логическими позициями называются такие позиции, в которых реализуются преобразования предметных, временных или логических переменных (фишек).

Интерпретация переходов R_T определяет совокупность условий, которым должны удовлетворять информационные среды фишек для прохождения переходов, а также преобразования информационных сред фишек, связанных с прохождением переходов:

$$R_T : T \to \Lambda \times \Psi \times Q.$$

Таким образом, каждому переходу ставится в соответствие переходное преобразование информационных сред – функция Ψ, оператор выбора фишек из входных позиций перехода – Λ (матрица операторов выбора) и выходной предикат – Q.

Функция ψ_j из множества Ψ определяет правило формирования комплектов фишек в выходных множествах переходов:

$$\Psi = \left\{ \psi_j \,|\, \psi_j : \bigwedge_{k=1}^{I(t_j)} \aleph \to \bigwedge_{k=1}^{O(t_j)} \aleph \right\}.$$

Если задана начальная маркировка μ_0 ИСП, то при запуске сети осуществляется обработка ИС фишек в позициях, т.е. происходит преобразование информационных сред фишек и соответствующих позиций. Обработанные фишки помещаются в выходные комплекты позиций. После чего может сработать один из переходов. При этом переход активизирован и может сработать, если во всех его входных позициях имеются фишки. При срабатывании перехода осуществляется преобразование ψ_j. Таким образом, меняется маркировка ИСП. Фишки переходят в новые позиции. Осуществляется обработка фишек в следующих позициях и т. д.

Получаемая таким образом ИСП совместно с графом сети Петри и интерпретацией фишек, позиций и переходов представляет собой граф операций, формализующий процесс функционирования системы, который формально представляется семёркой [1]:

$$G = \langle C, R, S, U, Q, f, \psi \rangle, ,$$

где C – сеть Петри, $C=\{P,T,I,O,\mu_0\}$, отображающая динамику протекающего процесса; R – множество интерпретаций фишек, позиций и переходов, характеризующее информационные среды фишек и позиций (множество переменных); S –множество информационных преобразований (операторов); U – множество условий; Q – множество булевых функций относительно условий, определяющих срабатывание переходов (переход может сработать, если он активизирован и Q =1), f и ψ– функции, задающие преобразования позиций и переходов.

Множество операторов S, условий U и булевых функции $Q(u)$ представляется следующими наборами переменных [1]:

операторы, формируемые внешней, по отношению к системе средой, $\varphi(в^{\kappa}) = \langle \varphi(в_1^{\kappa}),...,\varphi(в_Q^{\kappa}) \rangle$, κ – уровень иерархии объекта системы, $\kappa=(\kappa\text{-}2,...,\kappa\text{+}2)$, $в \in F$;

операторы, вызывающие изменения временных

$\varphi(\tau^{\kappa}) = \langle \varphi(\tau_1^{\kappa}),...,\varphi(\tau_1^{\kappa}) \rangle$, $\tau \in \mathrm{T}$ и

предметных

$\varphi(\rho^{\kappa}) = \langle \varphi(\rho_1^{\kappa}),...,\varphi(\rho_c^{\kappa}) \rangle$, $\rho \in \mathrm{P}^*$ неотрицательных переменных;

условия $U(x^{p_j}) = \langle U(x_1^{p_j}),...,U(x_n^{p_j}) \rangle, x \in X$, характеризующие состояние позиций p_j и сигнализирующие о завершении преобразований локальной информационной среды позиции;

условия $U(x^{\Im j}) = \langle U(x_1^{\Im j}),...,U(x_l^{\Im j})$, определяющие состояние временных и предметных неотрицательных переменных (т.е. ИС фишек).

Булевы функции $Q(\varphi_в^{\kappa})$, $Q(\varphi_\tau^{\kappa})$, $Q(\varphi_x^{\kappa})$, $Q(U_{pj}^{\kappa})$, $Q(U_{\Im j}^{\kappa})$, выполняют присваивание логической переменной ϖ единичного либо нулевого значения:

$$\varpi = \begin{cases} 1, \; Q(\varphi_в^{\kappa}) = Q(\varphi_\tau^{\kappa}) = Q(\varphi_x^{\kappa}) = E^{\varphi^{\kappa}}, Q(U_{pj}^{\kappa}) = Q(U_{\Im j}^{\kappa}) = E^{\Im j} \\ 0, \; Q(\varphi_в^{\kappa}) = Q(\varphi_\tau^{\kappa}) = Q(\varphi_x^{\kappa}) = \overline{E^{\varphi^{\kappa}}}, Q(U_{pj}^{\kappa}) = Q(U_{\Im j}^{\kappa}) = \overline{E^{\Im j}} \end{cases},$$

где $E \in \{F, P, T\}$.

Значение логической переменной ϖ для каждого случая (срабатывание перехода, изменение ИС фишки, позиции и т.д.) определяется дополнительно.

Функции преобразования $f^*: p \rightarrow f$, выполняемого позицией, где f^* – множество всех подмножеств множества f, объединяет в себе все упорядоченные наборы операторов, сопоставленные технологическим операциям процесса функционирования системы.

Функция преобразования $\psi: T \rightarrow q$, реализуется переходом.

Сложность структуры ИСП, кроме того, определяется введением особенных переходов с ингибиторными (сдерживающими) дугами, осуществляющими проверку позиций на нулевую разметку. Ингибиторная сеть представляет собой сеть Петри, дополненную специальной функцией инцидентности $I(t_j): P \times T \rightarrow \{0,1\}$, которая вводит ингибиторные дуги для тех пар (p,t), для которых $I_{tj}(p,t) = 1$ [4].

Анализ динамики функционирования системы и характера множеств возможных последовательностей реализации событий проводится путем определения последовательностей срабатывания переходов, представляемой *L(C)*. В семиотическом смысле язык $L^T(C)$ представляет собой строго формализованный язык, т.к. введением серии понятий и конструкций может быть построена адекватная логико-алгебраическая модель исследуемой системы.

Таким образом, предлагаемая концепция системного моделирования ТЭС позволяет существенно повысить мощность модели, ее гибкость и реализуемость и впоследствии оперировать этой моделью как целостной системой, определяя наиболее приемлемые параметры и характеристики ее функционирования.

В общем смысле методика моделирования ТЭС предполагает последовательное выполнение следующих этапов [1]:

1. Определение объектов информационной сети Петри и отношений между ними;
2. Интерпретация элементов исследуемой системы объектами сети Петри;
3. Содержательное описание функционирования модели;
4. Определение языка сети Петри в соответствии с задаваемыми условиями срабатывания переходов;
5. Моделирование динамики функционирования сети на основе выбранного языка сети;
6. Сопоставление символам языка сети и объектам сети Петри аналитических и имитационных форм, описывающих элементы реальной системы;
7. Анализ параметров и структуры СТС на предмет удовлетворения выбранным критериям;
8. Машинный синтез и корректировка возможностей новой системы.

Примечания:

1. Моделирование дискретных технологических процессов путем построения комбинированной математической модели на основе сети Петри сложной структуры / Д.В. Горбачев Д.В., М.М. Кандауров, М.Ю. Подлесных // отчет о НИР, номер гос. регистрации 1.1.06. Оренбург : Оренб. гос. ин-т менеджмента, 2006. 105 с.

2. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Ариб ; перевод с англ. под ред. Я.З. Цыпкина. М.: Мир, 1971. 400 с.

3. Анисимов А.В., Борейша Ю.Е. Исследование жизненных циклов сложных технических систем посредством сетей Петри / А.В. Анисимов, Ю.Е. Борейша // Автоматика и телемеханика. 1987. № 4. С. 90–101.

4. Юдицкий С.А., Покалев С.С. Логическое управление гибким интегрированным производством / С.А. Юдицкий, С.С. Покалев. М.: Наука, 1989. 212 с.

УДК 330.46

МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ИНФОРМАЦИОННЫМИ СЕТЯМИ ПЕТРИ

Дмитрий Владимирович Горбачев

Оренбургский государственный институт менеджмента
Оренбург, Россия, 460038, г. Оренбург, ул. Волгоградская, 16
Кандидат технических наук, доцент
E-mail: gordi47@mail.ru

В статье приводится описание методического подхода к разработке системной комбинированной модели дискретных процессов. Математическую основу для построения модели составляет информационная сеть Петри.

Ключевые слова: информационная сеть Петри, системная комбинированная модель, язык терминального типа.