UDC 519.6

Stabilization and Control Models of Systems With Hysteresis Nonlinearities

[1] Mihail E. Semenov
[2] Dmitry V. Grachikov
[3] Maxim Yu. Mishin
[4] Darya V. Shevlyakova

[1] Voronezh military aviation engineering university, Russia
Staryh Bolshevikov street 54, Voronezh city, 394064
Dr. (physical mathematical), Professor
E-mail: mkl150@mail.ru
[2] Voronezh architecture and building university, Russia
20-letiya Oktuabrya street 84, Voronezh city, 394006
PhD student
E-mail: dgrachikov@gmail.com
[3] Voronezh architecture and building university, Russia
20-letiya Oktuabrya street 84, Voronezh city, 394006
PhD student
[4] Voronezh state university Voronezh, Russia
Universitetskaya pl. 1 394006
PhD student
E-mail: frezziy@mail.ru

Abstract.

Mechanical and economic systems with hysteresis nonlinearities are studied in article. Dissipativity condition of inverted pendulum under the hysteresis control is obtained. The solution of the optimal production strategy problem was found where price has hysteresis behaviour.

Keywords: Hysteresis, inverted pendulum, feedback control, optimal production.

Введение. В последние годы гистерезисные явления активно изучаются в технике и физике. Помимо этого в ряде работ отмечалось наличие гистерезисных явлений. Возможность исследования моделей систем с гистерезисом основывается на операторной трактовке гистерезисных нелинейностей, развитой М.А. Красносельским и его учениками. Учет нелинейностей гистерезисной природы приводит к необходимости пересмотра подходов к решению целого ряда задач моделирования и анализа динамических процессов и систем. Работа состоит из двух разделов. В первом из них рассматривается математическая модель стабилизации перевернутого маятника [1], управляемого выходом гистерезисного преобразователя – люфта в двух постановках: посредством программного управления – вертикальных осцилляций подвеса и посредством обратной связи при горизонтальных движениях основания. Во втором приводится решение задачи об оптимальной производственно-ценовой стратегии в условиях гистерезисного поведения цены.

Исследование устойчивости перевернутого маятника с гистерезисным управлением. Модель перевернутого маятника с осциллирующей нижней точкой подвеса была впервые детально изучена П.Л. Капицей [1]. В этих работах было показано, что при достаточно большой частоте и малой амплитуде вертикальных осцилляций подвеса верхнее положение маятника может быть сделано асимптотически устойчивым.

Если в нижней точке крепления маятника имеется люфт, уравнения движения будут иметь вид:

$$\ddot{\varphi}-\frac{1}{l}(g+\alpha\omega^2 G(t,H)\varpi(t))\varphi=0 \quad (1)$$

$$\varphi(0)=\varphi_{10},\dot{\varphi}(0)=\varphi_{20}, \quad (2)$$

$$\varpi(t)=-sign(\sin(\omega t)), \quad (3)$$

$$G(t,H)=\begin{cases}0, t\in(t^*+\Delta t),\\ 1, t\notin(t^*,t^*+\Delta t),\end{cases} \quad (4)$$

где φ - угол отклонения маятника от вертикальной оси, ω - частота колебаний нижней точки крепления, α - амплитуда, уравнения (3), (4) описывают входно-выходные соответствия преобразователя-люфта в смысле М.А. Красносельского, А.В. Покровского [2], в ситуации, когда входом является гармоническая функция t^* – моменты времени, соответствующие смене знака управления, $\Delta t=\sqrt{\frac{2H}{\alpha\omega^2}}$ - время, затрачиваемое поршнем на прохождение цилиндра.

Одним из основных результатов работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено неравенство:

$$\left|\left(2ch\left(2\sqrt{k}\Delta\tau\right)ch\left(k_1\gamma\right)+\left(\frac{\sqrt{k}}{k_1}+\frac{k_1}{\sqrt{k}}\right)sh\left(2\sqrt{k}\Delta\tau\right)sh\left(k_1\gamma\right)\right)\cos\left(k_2\gamma\right)+\right.$$
$$\left(\left(\frac{\sqrt{k}}{k_2}-\frac{k_2}{\sqrt{k}}\right)sh\left(2\sqrt{k}\Delta\tau\right)ch\left(k_1\gamma\right)+\left(\frac{k_1}{k_2}-\frac{k_2}{k_1}\right)ch^2\left(\sqrt{k}\Delta\tau\right)sh\left(k_1\gamma\right)+\right. \quad (5)$$
$$\left.\left.\left(\frac{k}{k_2k_1}-\frac{k_1k_2}{k}\right)sh^2\left(\sqrt{k}\Delta\tau\right)sh\left(k_1\gamma\right)\right)\sin\left(k_2\gamma\right)\right|<2,$$

где $k=\frac{g}{l\omega^2}$, $s=\frac{a}{l}$, $k_1^2=k+s$ $k_2^2=s-k$, $\gamma=\pi-\Delta\tau$, тогда существует такая окрестность нулевой точки в фазовом пространстве уравнений (1)-(4) и согласованная с ним область в пространстве состояний люфта, что всякое решение, начавшееся в этой области остается ограниченным на $[0,+\infty)$.

Теорема 1 означает, что при выполнении ограничений на параметры системы (1)-(4), ее решения будут устойчивы по Лагранжу. Диаграммы зон устойчивости при различных растворах цилиндра приведены на следующем рисунке.

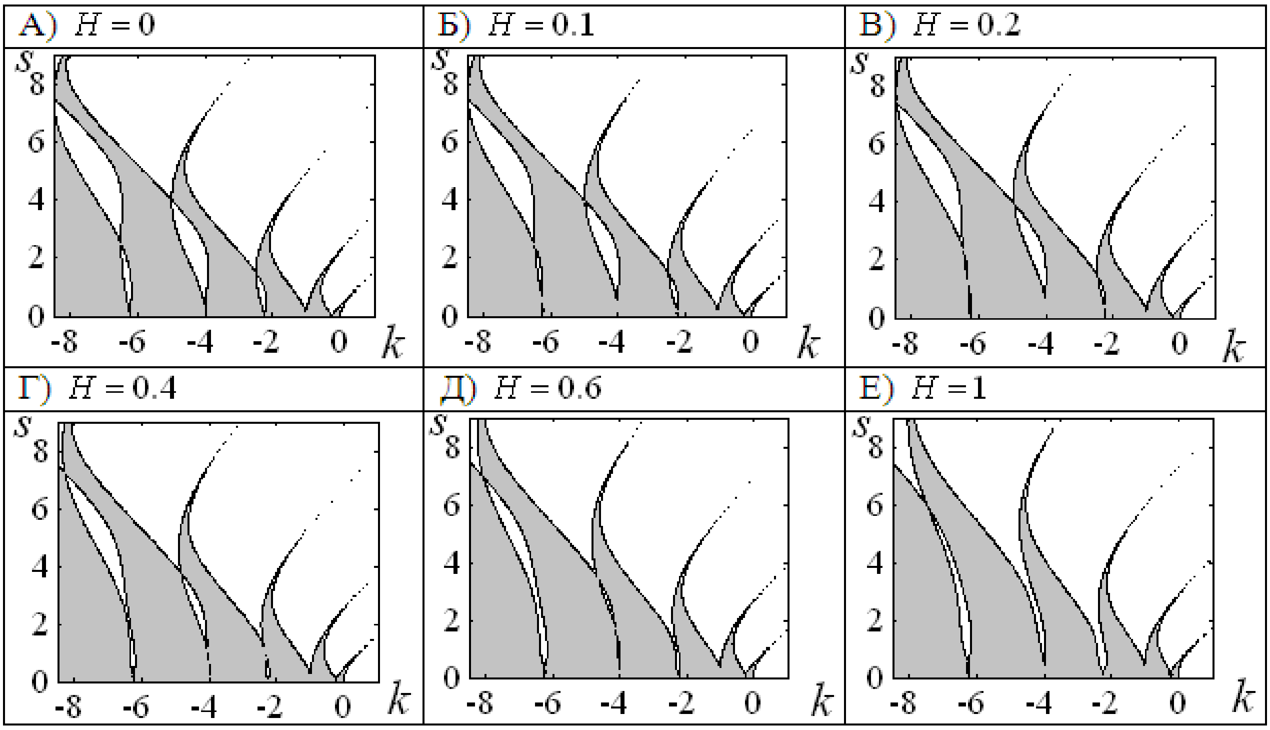

Рис. 1. Диаграммы устойчивости при различных длинах поршня H .

Следующий результат связан со стабилизацией верхнего положения обратного маятника посредством гистерезисного управления при горизонтальном движении опоры.

В линеаризованной постановке уравнение движения будет иметь вид:

$$A\ddot{\varphi} = mgl\varphi - m\ddot{u}l, \tag{6}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega(0) = \omega_0, \tag{7}$$

где $\varphi(t)$ – угол отклонения маятника, $u(t)$ – закон движения цилиндра раствора H.

Зависимость движения цилиндра $u(t)$ от движения поршня определяется *оператором гистерезисного типа* Γ – *обыкновенным люфтом* [2]:

$$u(t) = \Gamma[u_0, h]x(t). \tag{8}$$

Движение поршня $x(t)$ подчиним обратной связи:

$$\ddot{x} = k\, sign(B\varphi + \omega), \tag{9}$$

где $B = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ *(g* – ускорение свободного падения*)*. Достаточное условие устойчивости по Лагранжу уравнения (6) содержится в следующей теореме.

Теорема 2. Для того, чтобы движение маятника было устойчиво по Лагранжу достаточно выполнения условия

$$e^{B\tau}\left|B\varphi_0 + \omega_0\right| \le \left|\frac{kB}{g}\right|, \tag{10}$$

где $\tau = \sqrt{\dfrac{2h}{k}}$ – время преодоления поршнем цилиндра.

На следующем рисунке приведен фазовый портрет уравнения (6), когда выполнено условие (10).

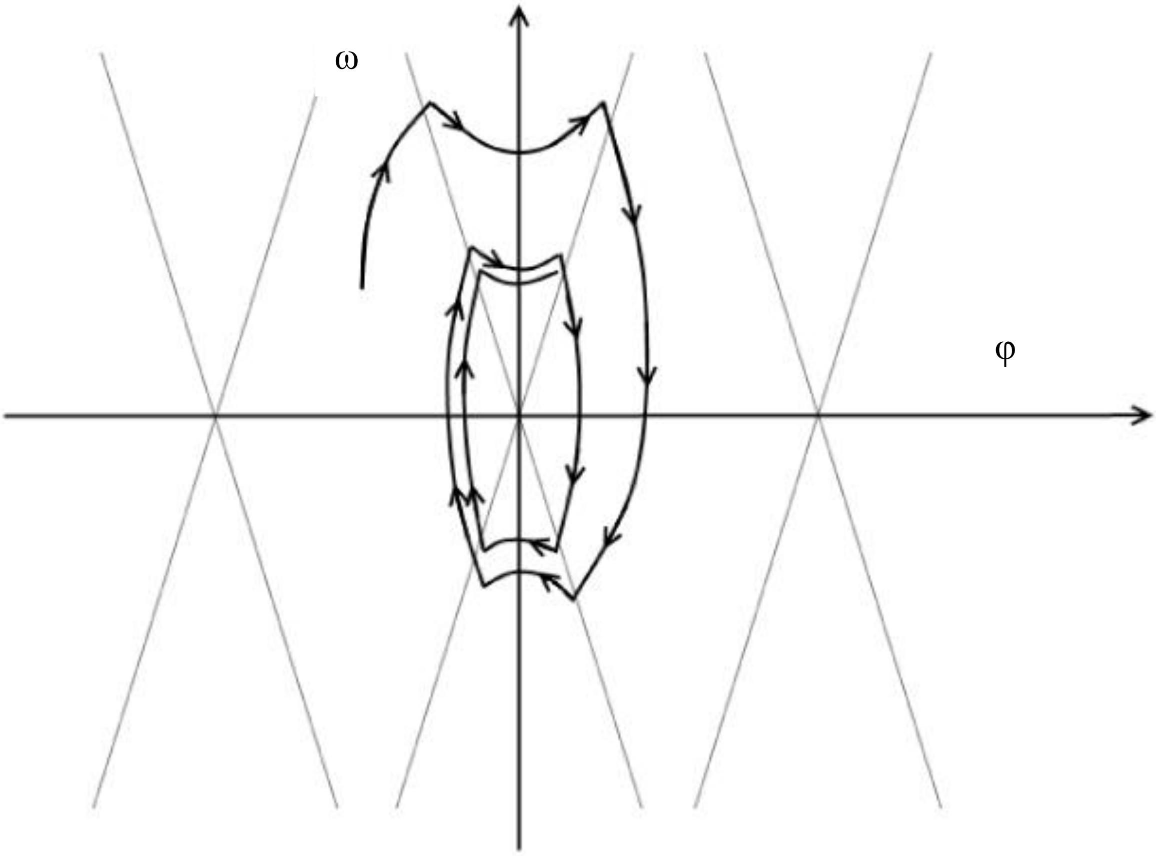

Рис. 2. Фазовый портрет уравнения (6)-(7).

Отметим, что наличие гистерезисного звена в контуре управления существенным образом влияет на динамику системы: в частности, в отличии от классического обратного маятника [1] в изучаемых системах принципиально нереализуемы асимптотически устойчивые режимы. Кроме этого размерность пространства параметров увеличивается, т.к. включает в себя параметры соответствующей гистерезисной нелинейности.

Динамическая модель оптимального производства в условиях гистерезисного поведения цены. Рассмотрим модельную экономическую систему, состоящую из производителя и конечного числа потребителей. Фазовое пространство этой системы будет состоять из z – количества товаров у производителя и V — количества товаров у потребителей. Обозначим через U темп производства, N – количество потребителей, k — коэффициент склонности к потреблению, , *k1* — коэффициент затрат на хранение, p – цена единицы товара, S(p) и D(p) – функции спроса и предложения. Динамика изменения количества товара у производителя и потребителей подчиняются уравнениям:

$$\dot{z} = U - NQ\left(\frac{S(p)}{p}\right), z(0) = 0, \tag{11}$$

$$\dot{V} = NQ\frac{S(p)}{p} - kV, V(0) = 0. \tag{12}$$

Функции спроса и предложения определим соотношениями [2], [3].

$$Q\left(\frac{S(p)}{p}\right) = q - a\frac{p}{S(p)}, \tag{13}$$

$$D(p,z) = z\frac{p}{p_{cr}}, \tag{14}$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени, a – мера эластичности функции спроса по цене, а p_{cr} - решение уравнения Q(S(p)/p) = 0.

В настоящей работе модель ценообразования предлагается подчинить следующей системе:

$$\dot{p} = f(u, p), \tag{15}$$

$$\dot{u} = \gamma(S(p) - D(p)), \tag{16}$$

где линия уровня функции $f(u, p) = 0$ имеет S-образную форму:

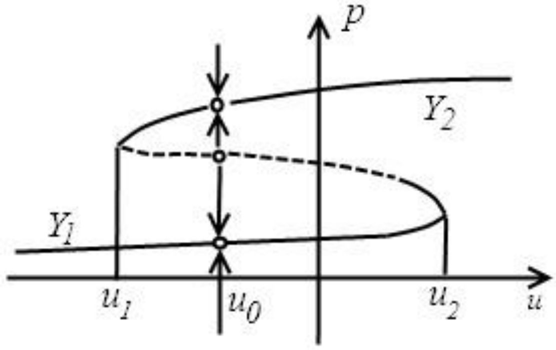

Рис. 3. Линия уровня f(p,u)=0

То есть в стационарном режиме цена будет осуществлять малые колебания вокруг неустойчивого положения равновесия (показано на рисунке пунктиром).

Обозначим через p_0 себестоимость производства единицы товара, тогда прибыль производителя на конечном временном интервале [0;T] будет определяться соотношением

$$J(T) = \int_0^T (NpQ\left(\frac{S(p)}{p}\right) - Up_0 - k_1 z)dt. \tag{16}$$

Из экономических соображений следует, что темп производства должен лежать в интервале

$$0 \le U \le U_0, \tag{17}$$

где U_0 – максимальный темп производства, ограниченный технологическими возможностями. Таким образом задача об оптимальной производственной стратегии свелась к задаче оптимального управления: определить такой темп производства, удовлетворяющий ограничению (17), при котором максимизировался функционал (16), при выполнении уравнений динамики объекта (11)-(12). Эта задача решалась с помощью принципа Л.С. Понтрягина.

В установившемся режиме фазовые переменные совершают слабые колебания в окрестности неустойчивого положения равновесия, обусловленные, в первую очередь, гистерезисным поведением цены. Темп производства включается на максимальную мощность почти на всем временном промежутке и обращается в ноль на 1% времени. Эти результаты, вытекающие из предложенных модельных представлений, находятся в соответствии со здравым смыслом и наблюдаемой динамикой производственных процессов.

Примечания:

1. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. Т.64. С. 7–20.
2. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. М., 1983.
3. Чернавский Д.С., Суслаков Б.А., Чернавская О.Д., Пирогов Г.Г., Старков Н.И. О социально-экономической структуре общества / Д.С. Чернавский, // Законодательство и экономика. 1995. Вып. 7/8. С. 8-14.

4. Семенов М.Е., Лебедев Г.Н., Матвеев М.Г. Оптимальное управление в задаче о выборе производственной и ценовой стратегии // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 4.1 (38). С. 71–73.

УДК 519.6

Модели стабилизации и управления систем с гистерезисными свойствами

[1] М.Е. Семенов
[2] Д.В. Грачиков
[3] М.Ю. Мишин
[4] Д.В. Шевлякова

[1] ВАИУ, Россия
ул. Старых Большевиков 54, г. Воронеж, 394064
доктор ф.-м. наук, профессор
E-mail: mkl150@mail.ru
[2] Воронежский ГАСУ, Россия
ул. 20-летия Октября 84, г. Воронеж, 394006
аспирант
E-mail: dgrachikov@gmail.com
[3] Воронежский ГАСУ
ул. 20-летия Октября 84, г. Воронеж, 394006
аспирант
[4] ВГУ, Россия
г. Воронеж, Университетская площадь, 1, 394006
аспирант
E-mail: frezziy@mail.ru

Аннотация. В работе изучаются механические и экономические системы с гистерезисными нелинейностями. Приводятся условия дисспативности обратного маятника, управляющим воздействием на который является выход гистерезисного преобразователя. Приводится решение задачи об оптимальной производственно-ценовой стратегии в условиях гистерезисного поведения цены.

Ключевые слова: гистерезис; обратный маятник; обратная связь; оптимальное производство.