UDC 004.942

# Influence of parameters entanglement on the quantum algorithms

[1] Alexey V. Kasarkin
[2] Sergey M. Gushanskiy
[3] Viacheslav F. Guzik

[1-3] Taganrog Institute of Technology, Southern Federal University, Russia
Chekhova st.,22, Taganrog, 347928
[1] Student
E-mail: zaratogr@gmail.com
[2] Associate Professor
E-mail: kron@pbox.ttn.ru
[3] Dr. (Tech.), Professor
E-mail: gvf@tsure.ru

**Abstract.** The article we consider the influence of parameters entanglement on the quantum algorithms, in particular influence of partial entanglement for quantum teleportation. The simulation results presented in chart form.

**Keywords**: quantum computers; quantum entanglement; EPR state; von Neumann entropy; quantum teleportation; measure of entanglement; maximum entanglement; quantum simulation; quantum computation.

Впервые понятие «запутанных» состояний было введено Э.Шредингером в его работе от 29 ноября 1935 г. «Современное состояние квантовой механики». Известно, что появление этой статья было вызвано работой А. Эйнштейна, Б. Подольского и Н. Розена «Может ли квантово-механическое описание реальности быть полным?» (15 мая 1935 г.) с дополнением, написанным Н. Бором. Шредингер ввел понятие запутанных состояний для описания состояния совокупной или составной системы, которая состоит из нескольких частей. Причем части общей системы могут быть пространственно разнесены [1].

Запутанность есть особая форма квантовых корреляций, отличных от классических корреляций. В честь Эйнштейна, Подольского и Розена запутанные состояния так же называют EPR-состояниями [2]. Рассмотрим EPR-пару на примере.

Вектор EPR-пары имеет вид:

$$\left|\psi_{EPR}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 - \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\right), \tag{1}$$

где $\left|0\right\rangle$ и $\left|1\right\rangle$ волновые функции спина первой и второй частицы, ориентированного «вверх» и «вниз» соответственно. То есть если мы измеряем первую частицу и если она оказывается в состоянии $\left|0\right\rangle$ (а вероятность получения такого состояния 1/2), то вторую частицу мы измерим в состоянии $\left|1\right\rangle$. Знак ”-“ говорит о повороте относительной фазы.

Запутанность – это не абсолютное понятие «все» или «ничего», она имеет количественную оценку. Запутанностью можно манипулировать, т.е. “разбавлять” ее или “концентрировать” [3].

Возникает вопрос, а можем ли мы в квантовых алгоритмах использовать частично запутанные состояния и к чему это приведет. Чтоб ответить на это вопрос необходимо определится с мерой запутанности. Самая распространенная мера- энтропия фон Неймана. Для нахождения этой меры необходимо выполнить разложение Шмидта [4].

Предположим, что у нас имеется две подсистемы A (размерности N) и B (размерности M ≤ N). Тогда утверждается, что совместное состояние этих двух подсистем может быть записано в виде ПС:

$$\Psi_{AB} = \sum_{i=1}^{M} c_i \left|\alpha_i\right\rangle\left|\beta_i\right\rangle, \tag{2}$$

где $|\alpha_i\rangle = |\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \ldots |\alpha_M\rangle$ - базис для подсистемы A, $|\beta_i\rangle = |\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, \ldots |\beta_M\rangle$- базис для подсистемы B. Коэффициенты $c_i$ – действительные, положительные числа. Мы включили фазы в определение базисных состояний для удобства.

Из разложения Шмидта следует, что с точки зрения каждого из двух наблюдателей перепутанные состояния являются смешанными состояниями. Так для наблюдателя А:

$$\rho_A = Sp_B(\Psi_{AB}) = Sp_B|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \sum_{i=1}^{M}|c_i|^2|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|. \tag{3}$$

Аналогично, для другого наблюдателя:

$$\rho_B = Sp_A(\Psi_{AB}) = Sp_A|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \sum_{i=1}^{M}|c_i|^2|\beta_i\rangle\langle\beta_i|. \tag{4}$$

Энтропия частично перепутанного чистого состояния – это энтропия фон Неймана [1]

$$E = -Sp(\rho\ln\rho), \tag{5}$$

либо подсистемы А ($\rho_A$) либо В ($\rho_B$):

$$E \equiv -Sp(\rho_A\ln\rho_A) = -Sp(\rho_B\ln\rho_B) = -\sum_i c_i^2\ln(c_i^2). \tag{6}$$

Последнее равенство легко проверить на примере двух кубитов:

$$\rho_A\ln\rho_A = \begin{pmatrix} c_1^2 & 0 \\ 0 & c_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ln c_1^2 & 0 \\ 0 & \ln c_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^2\ln c_1^2 & 0 \\ 0 & c_2^2\ln c_2^2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В формулах (5), (6), (7) использовался натуральный логарифм, однако можно встретить и логарифм по основанию два [5]. В модели, о которой будет рассказано ниже, применяется основание два.

Какое влияние частичная запутанность окажет на квантовую телепортацию? Данный вопрос подразумевает что мы имеем в своем распоряжении не максимально запутанную пару, а частично, что может случится из-за влияния неблагоприятных факторов.

Квантовая телепортация – это передача квантового состояния из одного места в другое даже при отсутствии квантового канала связи между отправителем и получателем. Для объяснения смысла телепортации положим, что два человека Алиса и Боб в прошлом находились в одном месте и приготовили EPR-пару из двух кубитов. Затем эти люди разъехались в разные места, но каждый из них взял с собой один кубит из EPR-пары. По истечении длительного времени Алисе потребовалось передать некий кубит |Ψi Бобу:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{8}$$

При этом Алиса не знает состояния кубита $|\psi\rangle$, то есть не знает величины коэффициентов α и β и имеет возможность связаться с Бобом только по классическому каналу связи.

В соответствии с общими принципами квантовой механики и теоремой о неклонируемости квантового состояния, Алиса не может без разрушения кубита $|\psi\rangle$ определить коэффициенты α и β и просто передать их значения Бобу, чтобы он изготовил соответствующий кубит $|\psi\rangle$ у себя. Однако Алиса может поступить следующим образом. Алиса осуществляет взаимодействие кубита $|\psi\rangle$ с кубитом, который входит в ее EPR-пару, а затем производит измерение над образовавшимся двух-кубитовым состоянием, получая один из четырех возможных классических результатов 00, 01, 10, 11. Затем она посылает эту информацию Бобу. В зависимости от сообщения, которое пошлет Алиса Боб выполняет одну из четырех операций к своему кубиту из EPR-пары. В результате у Боба появиться кубит в состоянии $|\psi\rangle$. Это и есть квантовая телепортация. Квантовая цепь изображенная на Рис. 1 дает точное описание процесса телепортации. Состояние, которое должно быть передано определяется выражением (8), где α и β неизвестны.

Программа, моделирующая квантовую телепортацию, была написана в алгебраической среде программирования Maple. Мы видим график Рис. 2, показывающий влияние частичной запутанности на корректность телепортации. По оси абсцисс у нас энтропия фон Неймана запутанной пары, по оси ординат, величина ошибки. График построен по 20 точкам, каждая из которых вычислена на основе 1000 виртуальных телепортаций.

Что мы можем принять за величину ошибки? Вектор состояния одного кубита- это два коэфициента α и β: корень вероятности нахождения его в состоянии |0> и корень вероятности нахождения его в состоянии |1>. При успешной телепортации вектор входного и вектор выходного состояния равны. Величина ошибки- это разница между квадратами значений коэффициентов входного и выходного вектора. Алгоритм телепортирует кубиты с произвольными состояниями суперпозиции. Чтобы исключить случайный фактор и получить оценку, не зависящую от конкретного состояния, производится большое количество телепортаций с разными случайными состояниями, в данном примере 1000 на каждую величину запутанности и находится среднее арифметическое ошибок.

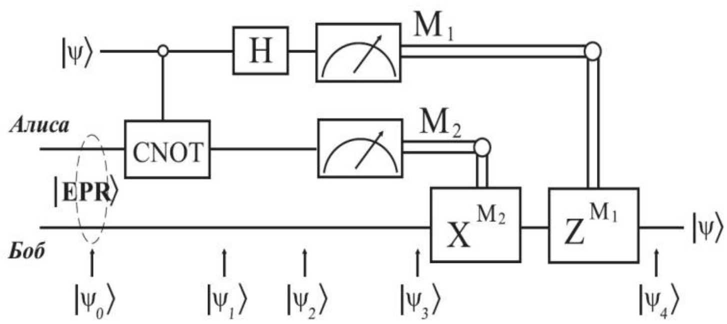


Рис. 1.

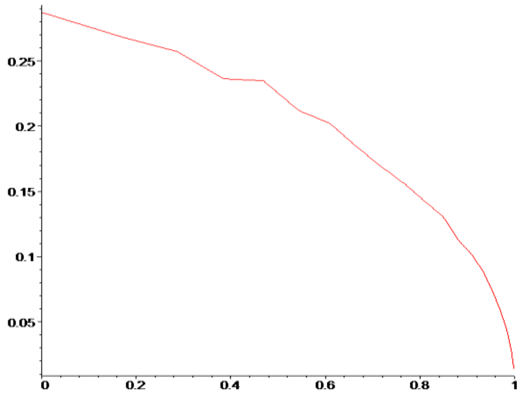


Рис. 2.

Не трудно заметить, что при максимальной запутанности (энтропия равна 1) мы имеем нулевую величину ошибки. Так же видим, что частичная запутанность не полностью делает невозможным работу алгоритма, а лишь вносит погрешность, и эта погрешность тем больше, чем меньше запутанность.

**Примечания:**

1. Кулик С.П. Физические основы квантовой информации // Курс лекций, физический факультет МГУ. URL: http://qopt.phys.msu.su/speckurs/quantinf/quantinf.htm (дата обращения: 09.04.12)

2. Einstein A, Podolsky B, Rosen N *Phys. Rev.* 47 777 (1935) [Перевод на русский язык: *УФН* **16** 440 (1936)]

3. Bennett C.H. et al., Phys. Rev. A 53, 2046 (1996).

4. Preskill J, Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation, - California Institute of Technology, (1998).

5. Доронин С.И. Мера квантовой запутанности чистых состояний // Квант. Маг. 2004. № 1. С. 1123-1137.

УДК 004.942

**Влияние параметров запутанности на квантовые алгоритмы**

[1] Алексей Викторович Касаркин
[2] Сергей Михайлович Гушанский
[3] Вячеслав Филиппович Гузик

[1-3] Технологический институт «Южного федерального университета» в г. Таганроге, Россия
347928, Таганрог, Ростовская область, ГСП-17А, пер. Некрасовский, 44
[1] Студент
E-mail: zaratogr@gmail.com
[2] Доцент
E-mail: kron@pbox.ttn.ru
[3] Доктор технических наук, профессор
E-mail: gvf@tsure.ru

**Аннотация.** В статье рассмотрено влияние параметров запутанности на квантовые алгоритмы, в частности влияние частичной запутанности на квантовую телепортацию. Результат моделирования представлен в виде графика.

**Ключевые слова**: квантовые компьютеры; квантовая запутанность; сцепленность; EPR пара; EPR состояния; мера запутанности; энтропия фон Неймана; квантовая телепортация; мера запутанности; максимальная запутанность; квантовое моделирование; квантовая симуляция.