UDC 519.21

Regular Variation of the Tail of Distribution of the Sum of the Random Number of Independent Random Variables *

[1] Eduard A. Danielyan
[2] Arsen R. Simonyan
[3] Elena I. Ulitina

[1] Yerevan State University, Armenia
Alex Manoogian, 1, Yerevan, 0025
Dr. (Physico-mathematical), Professor
[2-3] Sochi State University, Russia
Sovetskaya st.26A, Sochi, 354000
[2] PhD (mathematical), Associate professor
E-mail: oppm@mail.ru
[3] PhD (mathematical), Associate professor
E-mail: ulitinaelena@mail.ru

Abstract. In article the behavior of tails of the sum of independent random variables, when their quantity a random variable is considered.
Keywords: regularly varying functions; the sum of random variables; independence.

1^0. Пусть $\{\xi_n\}$ - последовательность независимых СВ,

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \qquad \overline{S}_n = \max_{1 \le k \le n} S_k, \qquad N_n(t) = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k \le t), \ n \ge 1 \ \ t > 0$$

В [1], гл.1. показано, что правильное изменение $N_n(t)$ при $t \to +\infty$(в частности вероятностей $P(\xi_k \ge t)$, $k = \overline{1,n}$) влечет

$$P(\overline{S}_n \ge t) \sim \mathrm{P}(\mathrm{S_n} \ge t) \sim \mathrm{N_n}(t),\ t \to +\infty \tag{1}$$

Запись $f(t) \sim \mathrm{g(t)}$, $t \to +\infty$ означает, что $\lim_{t \to +\infty} (f(t)/g(t)) = 1$.

Естественность условия выполнимости (1) подтверждает следующий *пример*. Пусть ξ_1 и ξ_2 независимы и

$$P(\xi_k < t) = \begin{cases} 1 - \exp(-t), & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases} \qquad k = 1,2.$$

Тогда $P(\overline{S_2} \ge t) = P(S_2 \ge t) = (1+t) \cdot \exp(-t)$, $t \ge 0$ и
$\lim_{t \to +\infty} (P(S_2 \ge t)/P(\xi_1 \ge t)) = +\infty. \rhd$

Пусть $\nu > 0$ - не зависящий от $\{\xi_n\}$ целочисленный случайный индекс с распределением $\{c_n\}$, $S_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu$, $\overline{S}_\nu = \max_{1 \le n \le \nu} S_n$,

$$C(t) = \sum_{n \ge 1} c_n \cdot N_n(t) = \sum_{n \ge 1} c_{\ge n} \cdot P(\xi_n \ge t), \qquad t > 0, \tag{2}$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-01-00196-а.

где $c_{\geq n} = \sum_{k\geq n} c_k$, $n \geq 1$.

Пусть $P(\xi_k \geq t)$, $k \geq 1$правильно меняются. Возникает *задача* выявления условий справедливости соотношений (ср.с (1)).

$$P(\overline{S_v} \geq t) \sim P(\mathrm{S_v} \geq t) \sim \mathrm{C(t)},\ t \to +\infty \qquad (3)$$

С учетом (2) к (3) приводит *формальная* подстановка (1) в формулы полной вероятности для $P(\overline{S_v} \geq t)$ и $P(S_v \geq t)$.▷

В необходимости дополнительных условий для справедливости (3) убеждает следующий *пример*. Пусть $\{\xi_n\}$-последовательность НОР СВ и $Mv = +\infty$, где M - знак математического ожидания. По (2), при всех $t > 0$

$$C(t) = P(\xi_1 \geq t) \cdot Mv = +\infty.▷$$

Для (3) сходимость ряда (2) при больших t *необходима*. Это условие равносильно

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0. \qquad (4)$$

Действительно, из (4) следует сходимость (2) при больших *t*. Обратно, по признаку Вейерштрасса [4], с.427, ряд (2) в области своей сходимости сходится равномерно, а из теор.4, с.434 [4] следует (4).▷

Далее, *условие (4) не противоречит (3)*, т.е. $P(\overline{S_v} = +\infty) = P(S_v = +\infty) = 0$.

Действительно, при $n \geq 1$ обозначим

$$\eta_n = \max(0, \xi_n),\ \theta_n = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n, \qquad \theta_v = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_v\ .$$

Для последовательности $\{\eta_n\}$

$$P(\theta_n < t) \leq \prod_{k=1}^{n} P(\eta_k < t),\ n \geq 1,\ t > 0$$

и, значит, $P(\theta_n = +\infty) = 0$, $n \geq 1$. Отсюда и из формулы полной вероятности следует $P(\theta_n = +\infty) = 0$ и утверждение вытекает из неравенств

$$P(\theta_v < +\infty) \leq P(\overline{S_v} < +\infty) \leq P(S_v < +\infty)\,.▷$$

Условие (4) входит в следующее *условие А*: существует $t_0 > 0$ такое, что $C(t_0) < +\infty$ и при $t \in [t_0, +\infty)$ сходимость $\lim_{n\to+\infty} (C_n(t)/C(t)) = 1$ равномерна.

Здесь обозначено $C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \sum_{m=1}^{k} P(\xi_m \geq t)$, $n \geq 1$, $t > 0$.

Условие А равносильно следующему: найдутся $t_0 > 0$ и для $\varepsilon \in (0,1)$целое $n_0 > 1$ (не зависящее от $t \in [t_{0,}\ +\infty)$ такие, что $n \geq n_0$ и $t \geq t_0$

$$C_{>n}(t) \stackrel{def}{=} \sum_{k>n} c_k \cdot \sum_{m=1}^{k} P(\xi_m \geq t) \leq \varepsilon \cdot C(t) < +\infty\,.▷ \qquad (5)$$

Нами установлена

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* A. *Тогда правильное изменение одной из функций* $C(t), P(\overline{S_v} \geq t)$, $P(S_v \geq t)$ *при* $t \to +\infty$*влечет правильное изменение остальных двух и соотношения (3).*

Случай НОР СВ рассмотрен в [5], [6]. Соотношения (3) установлены в [7] в рамках следующей *модели*, подпадающей под *условие А*.

Пусть $\delta_n > 0$, $n \geq 1$, $\alpha > 0$, $P(\xi_n \geq t) \sim \delta_n \cdot t^{-\alpha} L(t)$, $t \to +\infty$ равномерно по n,

$$A \overset{def}{=} \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^{n} \delta_k < +\infty.$$

В данном случае $C(t) \sim \mathrm{A} \cdot \mathrm{t}^{-\alpha} L(t)$, $t \to +\infty$.▷

2^0. Обозначим $T(t) = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^{n} P(S_k \geq t)$, $\quad \mathrm{V(t)} = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^{n} P(\overline{S}_k \geq t)$, $t > 0$.

Теорема 1 вытекает из следующего утверждения при $a = 1$.

Теорема 1*. *Пусть* $a \geq 1$ *и* $a > 0$ *произвольны и выполнено условие* A.

а) Из условия

$$t^{-\alpha} \cdot L(t) \preceq T(t) \preceq a \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t)\, e, \qquad t \to +\infty \tag{6}$$

следует

$$a^{-1} t^{-\alpha} \cdot L(t) \preceq C(t) \preceq a \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \to +\infty. \tag{7}$$

б) Из условия

$$a^{-1} t^{-\alpha} \cdot L(t) \preceq C(t) \preceq t^{-\alpha} \cdot L(t), \qquad t \to +\infty \tag{8}$$

следует

$$a^{-1} t^{-\alpha} \cdot L(t) \preceq T(t) \preceq a \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \to +\infty. \tag{9}$$

в) B *а) и б)* $T(t)$ *можно заменить на* $V(t)$.

Развитием одной идеи Феллера [3], с.319-320 мы установим *теорему 1** в случае $c_{\geq n+1} = 0$ с некоторым $n \geq 1$ (тогда $C(t)$, $T(t)$, $V(t)$ приобретают нижний индекс n), а далее для анализа случая $c_{\geq n} > 0$ при всех $n \geq 1$ докажем две вспомогательные леммы.▷

Доказательство теоремы 1^* *при* $c_{\geq n+1} = 0$. Выбрав $\delta > 0$, при $t > 0$ обозначим $y = (1 + \delta) t$.

Тогда

$$P(S_2 \geq t) \geq P(\xi_1 \geq y) \cdot P(\xi_2 \geq -\delta \cdot t) + P(\xi_2 \geq y) \cdot P(\xi_1 \geq -\delta \cdot t), \ t > 0. \tag{10}$$

Для $\varepsilon = \varepsilon(\delta) \in (0{,}1)$ найдется $t_0 > 0$ такое, что $P(\xi_i \geq -\delta \cdot t) \geq 1 - \varepsilon, i = 1{,}2$ при $t > t_0$.

Следовательно, при $t > t_0$ из (10) имеем $P(S_2 \geq t) \succeq N_2(t)$, $t \to +\infty$, что последовательно от $k = 2$ до $k = n > 1$ обобщается:

$$T_n(t) \succeq C_n(t), \qquad t \to +\infty. \tag{11}$$

Полагая $z = (1 - \delta) \cdot t$ с $0 < \delta < (1/2)$ и $t > 0$, запишем неравенство

$$P(S_2 \geq t) \leq N_2(t) + P\xi_1 \geq \delta \cdot t) \cdot P(\xi_2 \geq \delta \cdot t). \tag{12}$$

Обозначая $\lambda_k = (1 - \delta)^k$, $k = \overline{1, n}$, при $t > 0$ из (12) имеем

$$P(S_n \geq t) \leq \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k \geq \lambda_{n-k+1} \cdot t) + \sum_{k=2}^{n} P(\xi_k \geq \delta \cdot \lambda_{n-k+2} \cdot t) \cdot P(S_{k-1} \geq \delta \cdot \lambda_{n-k+2} \cdot t) \leq$$
$$\leq N_n(\lambda_n \cdot t) + q_n(\delta \cdot \lambda_n \cdot t) \cdot N_n(\delta \cdot \lambda_n \cdot t),$$

где $q_n(t) = \max_{1 \leq k \leq n} P(S_k \geq t)$. Отсюда, из-за неравенств $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ и $g_1(t) \geq g_2(t) \geq \ldots \geq g_n(t)$, $t > 0$, получаем

$$T_n(t) \le C_n(\lambda_n \cdot t) + q_n(\delta \cdot \lambda_n \cdot t) \cdot C_n(\delta \cdot \lambda_n \cdot t)\,, \qquad t > 0. \tag{13}$$

Одновременно, из (11) и (13) для $\varepsilon > 0$ и больших t выводим

$$T_n(t) \le C_n(\lambda_n \cdot t) + q_n(\delta \cdot \lambda_n \cdot t) \cdot T_n(\delta \cdot \lambda_n \cdot t)(1+\varepsilon). \tag{14}$$

Фиксируем δ и n. Тогда

$$\lim_{t\to+\infty} q_n(\delta\lambda_n t) = 0 \cdot \triangleright \tag{15}$$

Докажем а). Пусть верно (6). В силу (6) и (15),

$$0 \le \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{q_n(\delta\lambda_n t) T_n(\delta\lambda_n t)}{T_n(t)} \le a \cdot (\delta\lambda_n)^{-\alpha} \lim_{t\to+\infty} \frac{L(\delta\lambda_n t)}{L(t)} \cdot \lim_{t\to+\infty} q_n(\delta\lambda_n t) = 0,$$

откуда следует

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{q_n(\delta\lambda_n t) \cdot T_n(\delta\lambda_n t)}{T_n(t)} = 0.$$

Из последнего соотношения и (14) получаем $T_n(\lambda_n^{-1} t) \preceq C_n(t)$, $t \to +\infty$.

Отсюда, используя вытекающие из (6) оценки

$$T_n(\lambda_n^{-1} t) \succeq (\lambda_n^{-1} t)^{-\alpha} \cdot L(\lambda_n^{-1} t) \sim \lambda_n^{\alpha} (t^{-\alpha} \cdot L(t)) \succeq a^{-1} \cdot \lambda_n^{\alpha} \cdot T_n(t),\ t \to +\infty,$$

заключаем $a^{-1} \cdot \lambda_n^{\alpha} \cdot T_n(t) \preceq C_n(t)$, $t \to +\infty$, что при $\delta \downarrow 0$ (тогда $\lambda_n \uparrow 1$) дает

$$a^{-1} \cdot T_n(t) \preceq C_n(t),\ t \to +\infty. \tag{16}$$

Из (6), (11) и (16) следует (7). $\triangleright$

Докажем б). Пусть верно (8). В силу (8) и (15), $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{q_n(\delta\lambda_n t) C_n(\delta\lambda_n t)}{C_n(\lambda_n t)} = 0$.

Из последнего соотношения и (14) получаем $T_n(t) \preceq C_n(\lambda_n \cdot t)$, $t \to +\infty$. Аналогично предыдущему случаю приходим к (16). Из (8), (11) и (6) следует (9). $\triangleright$

Докажем в). Так как $V_n(t) \ge T_n(t)$, $t > 0$, то верхняя оценка (6) для $V_n(t)$ приводит к верхней оценке (6) для $T_n(t)$, а нижняя оценка (9) для $T_n(t)$ – к нижней оценке (9) для $V_n(t)$.

Далее, так как $\eta_n \ge 0$,

$$P(\eta_n \ge t) = P(\xi_n \ge t) \quad , \quad V_n(t) \le P(\theta_n \le t),\ \ n \ge 1,\ t > 0 \tag{17}$$

то в а) и б) $T_n(t)$ можно заменить на $P(\theta_n \le t)$ и, в силу (17), верхняя оценка (9) приводит к верхней оценке (9) для $V_n(t)$, а нижняя оценка (6) для $V_n(t)$ – к нижней оценке (6) для $P(\theta_n \le t)$. $\triangleright$

В доказательстве условие $c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 1$ не используется, что будет учтено в дальнейшем. Именно, под $C_n(t)$, $T_n(t)$, $V_n(t)$ можно понимать суммы первых n слагаемых рядов $C(t)$, $T(t)$ и $V(t)$ соответственно. $\triangleright$

3^0. Ниже модифицирован метод, предложенный в [7].

Лемма 1. *Пусть* $a \ge 0$ *и*

$$C_n(t) \preceq t^{-\alpha} \cdot L(t),\ t \to +\infty. \tag{18}$$

Тогда

$$T(t) \preceq V(t) \preceq 2 \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t),\ \ t \to +\infty. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $C(t_0) < +\infty$. При $t \ge t_0$ и $n \ge 1$ введем СВ

$$(\xi_n)_t = \begin{cases} t_0, если\ \xi_n < t_0, \\ \xi_n, если\ t_0 \le \xi_n \le t, \\ 0, если\ \xi_n > t \end{cases} \qquad и \quad s_\nu(t) = (\xi_1)_t + (\xi_2)_t + \ldots (\xi_\nu)_t.$$

Нетрудно видеть, что при $t \ge t_0$

$$T(t) \le C(t) + P(s_\nu(t) \ge t). \qquad (20)$$

Интегрируя по частям при $\alpha \ge \beta$, $t \ge t_0$, $k \ge 1$, получаем

$$M((\xi_k)_t) \le t_0^\beta + \beta \cdot \int_{t_0}^{t} x^{\beta-1} P(\xi_k \ge x) dx.$$

Поэтому, по неравенству Чебышева, формуле (см.теор.2.1, гл.2, [2])

$$\int_{t_0}^{t} x^{\beta-\alpha-1} L(x) dx \sim \frac{t^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} L(t), \qquad t \to +\infty$$

и неравенству $C(t) \le (1+\varepsilon) \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t)$ для $\varepsilon > 0$ и больших *t* (см.(18)), имеем

$$P(s_\nu(t) \ge t) \le \sum_{n \ge 1} c_n \cdot t^{-\beta} \cdot \sum_{k=1}^{n} M((\xi_k)_t)^\beta \preceq \left(\frac{t_0}{t}\right)^\beta + t^{-\alpha} L(t) \cdot \frac{\beta \cdot (1+\varepsilon)}{\beta - \alpha}, \quad t \to +\infty.$$

Отсюда, устремляя $\varepsilon \downarrow 0$ и $\beta \to +\infty$, находим $P(s_\nu(t) \ge t) \preceq t^{-\alpha} L(t)$, $t \to +\infty$ что при подстановке вместе с (18) в (20) дает $T(t) \preceq 2 \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t)$, $t \to +\infty$. (см.(19)).

В последнем неравенстве, как и в утверждении в) (см.2°) $T(t)$ можно заменить на $P(\theta_\nu \ge t)$, т.е. $P(\theta_\nu \ge t) \preceq 2 \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t)$, $t \to +\infty$. Осталось заметить, что $P(\theta_\nu \ge t) \succeq V(t)$, $t \to +\infty$.▹

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и условие* A. *Тогда для* $\varepsilon \in (0{,}1/4)$ *найдется* $n_0 > 1$ *такое, что*

$$\sum_{n=1}^{n_0} c_n \cdot P(\overline{S_n} \ge t) \preceq 4\varepsilon \cdot t^{-\alpha} L(t),\ t \to +\infty\ , \qquad (21)$$

$$\sum_{n > n_0} c_n \cdot P(S_n \ge t) \preceq 4\varepsilon \cdot t^{-\alpha} L(t),\ t \to +\infty. \qquad (22)$$

Доказательство. По (5) и (18), для $\varepsilon \in (0{,}1/4)$ найдется $n_0 > 1$ такое, что

$$c_{>n_0} \cdot \sum_{n=1}^{n_0} P(\xi_n \ge t) \preceq \varepsilon \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \to +\infty, \qquad (23)$$

$$\sum_{n > n_0} c_n \cdot \sum_{k=n_0+1}^{n} P(\xi_k \ge t) \preceq \varepsilon \cdot t^{-\alpha} L(t),\ t \to +\infty, \qquad (24)$$

где $c_{>n_0} = c_{\ge n_0+1}$. Выведем (22) ((21) выводится аналогично переходом к $\{\eta_n\}$.

Для последовательности $\{\delta_k = \xi_{n_0+k}\}$ обозначим $s_\mu = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_\mu$; , где $\mu > 0$ – не зависящий от $\{\delta_n\}$ целочисленный случайный индекс, для которого

$$\rho_k \overset{def}{=} P(\mu = k) = P(\nu = n_0 + k / \nu > n_0) = \frac{c_{n_0+k}}{c_{>n_0}}, \; k \geq 1 .$$

Здесь $P(X/Y)$ - условная вероятность X при условии Y.

В терминах $\{\delta_n\}$ и μ (25) приобретает вид

$$c_{>n_0} \cdot \sum_{n\geq 1} \rho_n \cdot \sum_{k=1}^{n} P(\delta_k \geq t) \preceq \varepsilon \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \to +\infty.$$

В силу (23) и последнего неравенства, по *лемме 1*, имеем

$$c_{>n_0} \cdot P(S_{n_0} \geq t) \preceq 2 \cdot \varepsilon \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \to +\infty \quad \text{и} \quad c_{n_0} \cdot P(s_{\mu} \geq t) \preceq 2 \cdot \varepsilon \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \to +\infty,$$

откуда и из (14), (15) с $n = 2$ выводим (22). ▹

4°. Перейдем к *доказательству теоремы* 1^* при $c_{\geq n} > 0$, $n \geq 1$.

В силу неравенств $V(t) \succeq T(t) \succeq C(t)$, $t \to +\infty$, имеем, что при некотором $B \geq 1$

$$C(t) \preceq B \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \to +\infty. \tag{25}$$

Наличие константы B в (25) несущественно в доказательстве *леммы 2*. Поэтому сохраняется форма условия A (5) с одновременным выполнением неравенств (21), (22). ▹

Докажем а). Из (6) и (22) получаем $(1-4\varepsilon) \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t) \preceq T_{n_0}(t) \preceq a \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t)$, $t \to +\infty$, откуда, применяя утверждение а) *теоремы* 1^*, находим

$$\frac{(1-4\varepsilon)^2}{a} \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t) \preceq C_{n_0}(t) \preceq a \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t), \qquad t \to +\infty. \tag{26}$$

Теперь из (5), (26) следуют неравенства

$$\frac{(1-4\varepsilon)^2}{a} \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t) \preceq C(t) \preceq (a+\varepsilon) \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t), \; t \to +\infty.$$

Устремляя $\varepsilon \downarrow 0$, доказываем утверждение а). ▹

Докажем в). Из (8) и (5) получаем неравенства

$$(a^{-1} - \varepsilon) \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t) \preceq C_{n_0}(t) \preceq t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \to +\infty,$$

откуда, применяя утверждение б) *теоремы* 1^*, находим

$$(a^{-1} - \varepsilon) \cdot L(t) \cdot T_{n_0}(t) \preceq \frac{a}{1 - \varepsilon \cdot a} t^{-\alpha} \cdot L(t), \qquad t \to +\infty. \tag{27}$$

Теперь из (24), (27) следуют неравенства

$$(a^{-1} - \varepsilon) \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t) \preceq T(t) \preceq \left(\frac{a}{1 - \varepsilon \cdot a} + 4\varepsilon \right) t^{-\alpha} \cdot L(t), \; t \to +\infty.$$

Устремляя $\varepsilon \downarrow 0$, доказываем утверждение б). ▹

Утверждение в) доказывается переходом к последовательности $\{\eta_n\}$. ▹

5°. Приведем условия на частные суммы $N_n(t), n \geq 1, t > 0$ ряда

$$N(t) \overset{def}{=} \sum_{n\geq 1} P(\xi_n \geq t) \tag{28}$$

и на хвост распределения $\{c_n\}$, из которых следует *условие* A.

В случае расходимости ряда (28) при всех $t>0$ “шкалу” роста “хвоста” $\{c_n\}$ задаем с помощью параметра $\alpha\in[0,1]$ и возрастающей функции $L_0(t)$ и, в зависимости от этого, постулируем порядок роста $N_n(t)$ к $+\infty$ при $n\to+\infty$.

Именно, пусть $\alpha\in[0,1]$ и для некоторой возрастающей $L_0(t)$:

1. $M(v^\alpha\cdot L_0(v))<+\infty$;
2. существует СВ ξ и $t_0>0$ такие, что при $t\ge t_0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N_n(t)}{n^\alpha\cdot L_0(n)}=P(\xi\ge t)>0;$$

3. при $a=0$ считаем $\lim\limits_{t\to+\infty}L_0(t)=+\infty$.

Введем следующее *условие B_α:* имеет место сходимость

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N_n(t)}{n^\alpha\cdot L_0(n)\cdot P(\xi\ge t)}=1, \tag{29}$$

равномерная по $t\in[t_0,+\infty)$. ▹

Лемма 3. *Из условия B_α следует условие A.*

Доказательство. Выберем $\delta\in(0,1)$. Согласно (29), выберем не зависящее от t целое $m_0=m_0(\delta)\ge 1$ такое, что при $n\ge m_0$ и $t\ge t_0$

$$(1-\delta)\cdot P(\xi\ge t)\le\frac{N_n(t)}{n^\alpha\cdot L_0(n)}\le(1+\delta)\cdot P(\xi\ge t). \tag{30}$$

Зафиксируем δ и m_0. Для заданного $\varepsilon\in(0,1)$, в силу условия 1, по (29), можно выбрать целое $n_0\ge m_0$ из условия

$$\sum_{n>n_0}c_n\cdot n^\alpha\cdot L_0(n)\le\varepsilon\cdot\frac{1-\delta}{1+\delta}\left(\sum_{n>m_0}c_n\cdot n^\alpha\cdot L_0(n)\right).$$

Выбранное n_0 фиксируем. В силу (30) и $C_{>m_0}(t)\le C(t)$, $t>0$, при $n\ge n_0$ и $t\ge t_0$ имеем

$$C_{>n}(t)\le(1+\delta)\cdot P(\xi\ge t)\cdot\sum_{k>n}c_k\cdot k^\alpha\cdot L_0(k)\le$$

$$\le\varepsilon(1-\delta)\cdot\left(\sum_{k>m_0}c_k\cdot k^\alpha\cdot L_0(k)\cdot P(\xi\ge t)\right)\le\varepsilon\cdot\sum_{k>m_0}c_k\cdot k^\alpha\cdot L_0(k)\cdot\frac{N_k(t)}{k^\alpha\cdot L_0(k)}=$$

$$=\varepsilon\cdot C_{>m_0}(t)\le\varepsilon\cdot C(t).\ ▹$$

Отметим “крайний” случай *условия* B_α.

$M_v=+\infty$ существует СВ ξ и $t_0>0$ такие, что $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{-1}\cdot N_n(t)=P(\xi\ge t)>0$ при $t\ge t_0$, имеет место равномерная по $t\in[t_0,+\infty)$ сходимость

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N_n(t)}{n\cdot P(\xi\ge t)}=1. \tag{31}$$

Условие (31) выполнено, в частности, если существует равномерный по $t \in [t_0, +\infty)$ предел $\lim_{n \to +\infty} \frac{P(\xi_n \ge t)}{P(\xi \ge t)} = 1$, что устанавливается методом доказательства *теоремы Штольца* [8], с.67-68. ▹

В случае сходимости ряда (28) при $t \ge t_0$ пусть существует равномерный по $t \in [t_0, +\infty)$ предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{N_n(t)}{N(t)} = 1. \qquad (32)$$

Аналогично *лемме 3* делаем *вывод*: *Из (32) следует условие* A. ▹

Полученные результаты дают нам возможность для получения новых представлений основных характеристик системы M|G|1|∞ [9].

Примечания:

1. Аракелян А.З. Правильное изменение хвостов распределений супремумов сумм независимых случайных величин. Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Ереван, ЕГУ, 2001. 95 с.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 145 с.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. М.: Мир, 1984. 725 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. М: Наука, 1969. 800 с.
5. Greenwood P. Asymptotics of Randomly Stopped Sequences with Independent Increasements. Ann. Prob., 1973, v.1, p. 317–321.
6. Stam A.J. Regular Variation of the Tail of a Subordinated Probability Distribution. – Adv. Appl. Prob., 1973, 5, p. 308-327.
7. Аракелян А.З., Даниелян Э.А. О максимуме сумм случайного числа независимых случайных величин // Ученые Записки ЕГУ. 2000. №2. С. 24–35.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
9. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Представления на языке медленно меняющихся функций в модели M|G|1|∞ в условиях критической загрузки // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2003, т.10, в.3. С. 745–746.

УДК 519.21

Правильное изменение хвоста распределения суммы случайного числа независимых случайных величин

[1] Эдуард Ашотович Даниелян
[2] Арсен Рафикович Симонян
[3] Елена Ивановна Улитина

[1] Ереванский государственный университет, Армения
0025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1
доктор физико-математических наук, профессор
[2-3] Сочинский государственный университет, Россия
354000, г. Сочи, ул. Советская, 26а
[2] кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: oppm@mail.ru
[3] кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: ulitinaelena@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается поведение хвостов суммы независимых случайных величин, когда их количество случайная величина.

Ключевые слова: правильно меняющиеся функции; сумма случайных величин; независимость.