UDC 519.2

On the Number of Fireproof Vertices of a Tree in a Random Forest *

[1] Yury L. Pavlov
[2] Elena V. Khvorostyanskaya

[1] Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre of RAS, Russia
11, Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Karelia, 185910
Dr. (Physics and Mathematics), Professor
E-mail: pavlov@krc.karelia.ru
[2] Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre of RAS, Russia
11, Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Karelia, 185910
PhD (Physics and Mathematics), Senior Research
E-mail: cher@krc.karelia.ru

Abstract. We consider the set $F_{n,N}$ of all possible forests, consisting of $N\geq 2$ ordered non-root trees and n labeled vertices. We specify the uniform distribution on $F_{n,N}$. When $N^{1/3}(n/N-2)\to\infty$ there is obtained the limit theorem for the number of fireproof vertices of one tree in a forest fire model on a random forest taken from $F_{n,N}$.

Keywords: random forest; random tree; forest fire model; fireproof vertex; limit distribution.

Введение. Разработка и исследование моделей лесных пожаров (в англоязычной литературе – forest fire models) являются новым направлением в теории случайных графов. Такие модели используются в ландшафтной экологии для определения наиболее устойчивой к пожарам топологии лесных насаждений [1,2], в статистической физике [2-4]. В экономике с их помощью пытаются понять природу кризисов банковских систем и найти способы минимизации их последствий [1].

В статье [5] рассматривается случайный процесс распространения огня по ребрам некорневого дерева с помеченными вершинами. Обозначим через T_n множество всех таких деревьев, имеющих n вершин, и зададим на этом множестве равномерное распределение вероятностей, приписывая каждому дереву меру n^{2-n}. Ребра случайного дерева могут находиться в одном из трех состояний: воспламеняемое, огнеупорное или сгоревшее. Пусть τ – случайная величина, имеющая распределение Бернулли:

$$\mathrm{P}\{\tau=1\}=1\Big/\left(1+n^{-\alpha}\right),\quad \mathrm{P}\{\tau=0\}=n^{-\alpha}\Big/\left(1+n^{-\alpha}\right), \tag{1}$$

где α – некоторое положительное число. Процесс распространения огня происходит следующим образом. До начала пожара все ребра являются воспламеняемыми. В первый момент времени равновероятно выбирается одно из ребер дерева, и считается, что именно на нем начинается пожар. Новое состояние ребра определяется с помощью случайной величины τ. Если τ=1, то ребро навсегда становится огнеупорным и в дальнейшем процессе не участвует. Такое ребро можно считать удаленным, и, следовательно, исходное дерево распадается на два поддерева. Если же τ=0, выбранное ребро считается сгоревшим, и вместе с ним сгорает всё дерево. Таким образом, продолжение процесса возможно, только если первое ребро стало огнеупорным. В этом случае второй шаг состоит в равновероятном выборе одного из воспламеняемых ребер, содержащихся в двух поддеревьях, и его дальнейшее состояние определяется с помощью τ, как и в случае первого ребра. Следующие шаги процесса происходят аналогично, и он закончится, когда в исходном дереве не останется воспламеняемых ребер. Вершина дерева называется *несгораемой*, если после окончания процесса все инцидентные ей ребра начального дерева огнеупорны. Пусть ξ –

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00009) и Программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета на 2012–2016 гг.

случайная величина, равная числу несгораемых вершин случайного дерева из T_n, $g(x)$ – плотность распределения вероятностей, имеющая вид:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x(1-x)^3}}\exp\left\{-\frac{x}{2(1-x)}\right\},\quad x\in(0,1).$$

В [5] была доказана следующая теорема, описывающая предельное поведение ξ при $n\to\infty$.

Теорема 1. При $n\to\infty$ справедливы утверждения:

1. Если $\alpha<1/2$, то $\mathbf{P}\{\xi/n=0\}\to 1$.
2. Если $\alpha=1/2$, то $n\mathbf{P}\{\xi = k\}=g(u)(1+o(1))$ для всех k таких, что $u=k/n\in(0,1)$.
3. Если $\alpha<1/2$, то $\mathbf{P}\{\xi/n=1\}\to 1$.

В [6] при $\alpha=1/2$ изучается описанный выше процесс распространения огня на дереве в случайном лесе. Рассматривается множество $F_{n,N}$ всех возможных лесов, состоящих из N упорядоченных некорневых деревьев и n помеченных вершин, на котором задано равномерное распределение вероятностей. Предполагается, что на каждом дереве такого случайного леса пожар происходит независимо от других деревьев. Пусть ξ_1 – случайная величина, равная числу несгораемых вершин одного дерева в лесе из $F_{n,N}$. В [6] получено предельное распределение ξ_1 в случаях, когда $n\to\infty$, N фиксировано и n, $N\to\infty$ так, что $n/N\to\infty$.

Ниже доказана теорема, обобщающая результаты работы [6]. Обозначим

$$Q_{n,N}=\frac{n}{dN(n-2N)},\quad d=2(2/3)^{2/3}.$$

Теорема 2. Пусть $n/N\to\infty$, так, что $N^{1/3}(n/N-2)\to\infty$. Тогда для всех $k=uQ_{n,N}(n-2N)$, $u\in(0,1/Q_{n,N})$

$$n\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=g(uQ_{n,N})Q_{n,N}(1+o(1)).$$

Доказательство. Пусть ν – случайная величина, равная объему выбранного дерева. По формуле полной вероятности справедливо равенство

$$n\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=\sum_{m=k}^{n-N+1}n\mathbf{P}\{\xi_1=k\mid \nu=m\}\mathbf{P}\{\nu=m\}.$$

Представим сумму в правой части в виде

$$n\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=S_1+S_2+S_3+S_4, \tag{2}$$

$$S_l=\sum_{L_l}n\mathbf{P}\{\xi_1=k\mid \nu=m\}\mathbf{P}\{\nu=m\},\quad l=1,2,3,4,$$

$$L_1=\left\{k\le m<n-2N-AN^{2/3}\right\},\ L_2=\left\{n-2N-AN^{2/3}\le m\le n-2N+AN^{2/3}\right\},$$

$$L_3=\left\{n-2N+AN^{2/3}<m\le n-N-A\right\},\ L_4=\left\{n-N-A<m\le n-N+1\right\},$$

положительная постоянная A будет выбрана позднее. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\nu=m\}=C_n^m m^{m-2}\,b_{n-m,N-1}/b_{n,N}, \tag{3}$$

где $b_{n,N}$, $b_{n-m,N-1}$ – число лесов в $F_{n,N}$, $F_{n-m,N-1}$ соответственно. Известно [7], что

$$b_{n,N}=n!\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N\ge 1\\ k_1+\ldots+k_N=n}}\prod_{j=1}^{N}\frac{k_j^{k_j-2}}{k_j!}.$$

Отсюда и из теоремы 1 [8] следует, что при выполнении условий теоремы справедливо соотношение

$$b_{n,N}\sim Nn^{n-2}/2^{N-1}, \tag{4}$$

и при достаточно больших A мы можем считать, что

$$b_{n-m,N-1} \sim \frac{(N-1)(n-m)^{n-m+1/2}}{2^{N-2}(n-m-2N+2)^{5/2}}, \text{ если } m \in L_1, \tag{5}$$

$$b_{n-m,N-1} \sim \frac{\sqrt{\pi}(n-m)^{n-m-2} N^{11/6}}{2^{N-3} d} p\left(\frac{y}{d}; \frac{3}{2}, -1\right), \text{ если } m \in L_2, \tag{6}$$

$$b_{n-m,N-1} \sim \frac{N!(n-m)^{2T}}{N 2^T T!}\left(1 - \frac{2T}{n-m}\right)^{1/2}, \text{ если } m \in L_3, \tag{7}$$

$$b_{n-m,N-1} \sim C_{n-m}^T \left(\frac{N-1}{2}\right)^T, \text{ если } m \in L_4, \tag{8}$$

$$p\left(\frac{y}{2d}; \frac{3}{2}, -1\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{ity}{2d} - |t|^{3/2} \exp\left\{i\frac{\pi t}{4|t|}\right\}\right\} dt,$$

$$T = n-m-N+1, \quad y = (N-1)^{1/3}\left((n-m)/(N-1) - 2\right).$$

Пусть $m \in L_1$. Учитывая (1) и теорему 1, можно показать, что

$$m\mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \nu = m\} \le C_1. \tag{9}$$

Здесь и далее через $C_1, C_2, \ldots$ обозначены некоторые положительные постоянные. С помощью формулы Стирлинга из (3)–(5) находим, что

$$\frac{n}{m}\mathbf{P}\{\nu = m\} \le \frac{C_2 n}{(n-m-2N+2)^{5/2}(n-2N)}.$$

Следовательно, $S_1 \le C_3 n/(N(n-2N)A^{3/2})$ и справедливо соотношение

$$S_1 = o(Q_{n,N}). \tag{10}$$

Если $m \in L_2$, то $k/m = uQ_{n,N}(1+o(1))$ и из теоремы 1 следует равенство

$$m\mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \nu = m\} = g(uQ_{n,N})(1+o(1)). \tag{11}$$

Из (3), (4), (6) находим, что

$$(n/m)\mathbf{P}\{\nu = m\} \sim Q_{n,N} N^{-2/3} p(y/d; 3/2, -1).$$

Отсюда и из (11) получаем, что

$$S_2 = g(uQ_{n,N})Q_{n,N}(1+o(1)) \sum_{-A \le y \le A} N^{-2/3} p(y/d;\, 3/2,\, -1),$$

где суммирование по y проводится с шагом $(N-1)^{-2/3}$. Следовательно,

$$S_2 = g(uQ_{n,N})Q_{n,N}(1+o(1))\left(\int_{-A}^{A} p(y/d;\, 3/2,\, -1)dy + \delta\right),$$

а величина δ сколь угодно мала при достаточно больших A. Поскольку $p(y/d;3/2,-1)$ является плотностью распределения вероятностей, выполнено равенство

$$S_2 = g(uQ_{n,N})Q_{n,N}(1+o(1)). \tag{12}$$

Пусть $m \in L_3$. Из теоремы 1 находим, что выполнено (11). Представим m в виде $m = n-2N+Nf_N$, где f_N меняется с шагом $1/N$ и $AN^{-1/3} \le f_N \le 1-AN^{-1}$. С помощью (3), (4), (7) получаем, что

$$\frac{n}{m}\mathbf{P}\{\nu = m\} \le \frac{C_3 f_N^{1/2} n\left(e\left(1 - f_N/2\right)\right)^{-N f_N + 1}}{N^{3/2}(n-2N)\left(1 - f_N + 1/N\right)^{N - N f_N + 3/2}}.$$

Нетрудно показать, что если $1-\varepsilon \le f_N \le 1-AN^{-1}$, где положительное число ε сколь угодно мало, то

$$\frac{n}{m}\mathbf{P}\{\nu = m\} \le \frac{C_4 n}{N^{3/2}(n-2N)} e^{-C_5 N},$$

а если $AN^{-1/3} \le f_N \le 1-\varepsilon$, то

$$\frac{n}{m}\mathbf{P}\{\nu = m\} \le \frac{C_6 n f_N^{1/2}}{N^{3/2}(n-2N)} e^{-N f_N^3/24}.$$

С помощью этих неравенств и (9) находим, что

$$S_3 \le \frac{C_7 n}{N^{3/2}(n-2N)} \sum_{m=n-2N+AN^{2/3}}^{n-N(1+\varepsilon)} f_N^{1/2} e^{-N f_N^3/24} + \frac{C_8 n}{N^{3/2}(n-2N)} \sum_{m=n-N(1+\varepsilon)}^{n-N-A} e^{-C_5 N}$$
$$\le \frac{C_9 n}{N(n-2N)}\left(\sum_{h \ge A} h^{1/2} e^{-h^3/24} + \sqrt{N} e^{-C_5 N}\right),$$

где величина $h=N^{1/3}f_N$ меняется с шагом $N^{-2/3}$. Заменяя суммирование интегрированием, получаем оценку

$$S_3 \le \frac{C_{10} n}{N(n-2N)}\left(A^{-3/2} e^{-A^3/24} + \sqrt{N} e^{-C_5 N}\right),$$

где A может быть выбрано сколь угодно большим. Следовательно, справедливо соотношение

$$S_3 = o\left(Q_{n,N}\right). \qquad (13)$$

Пусть $m \in L_4$. Из теоремы 1 находим, что выполнено (9). Используя (3), (4), (8), можно показать, что выполнено неравенство

$$\frac{n}{m}\mathbf{P}\{\nu = m\} \le \frac{C_{11} n (2/e)^{N-1}}{N(n-2N)T!}\left(\frac{N-1}{2e}\right)^T.$$

Отсюда и из (9) получаем, что

$$S_4 \le \frac{C_{12} n (2/e)^{N-1}}{N(n-2N)} \sum_{T=0}^{A+1} \frac{1}{T!}\left(\frac{N-1}{2e}\right)^T \le \frac{C_{12} n}{N(n-2N)} e^{-C_{13} N}.$$

Из последнего соотношения и (2), (10), (12), (13) следует утверждение теоремы.

Примечания:

1. Аннаков Б.Б. Банковский кризис и пожары в лесу [Электронный ресурс]. 2008. URL: http:www.empatika.com/blog/agent_modeling_forest_fire (дата обращения: 20.02.2013).

2. Zink R. Unifying wildfire models from ecology and statistical physics/ Zink R., Grimm V.// The American Naturalist. 2009. Vol. 174. E170–E185.

3. Drossel B. Self-organized critical forest-fire model/ Drossel B., Schwabl F.// Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69. P. 1629–1632.

4. Henley C.L. Static of self-organized percolation model // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71, P. 2741–2744.

5. Bertoin J. Fires on trees// Ann Inst. Henri Poincare. 2011. ArXiV1011.2308v2 (to appear).

6. Павлов Ю.Л. Сгорит ли дерево при пожаре в случайном лесе?/ Павлов Ю.Л., Хворостянская Е.В. // Труды Карельского научного центра РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии, 2012. Вып. 3, № 5, С. 89–93.
7. Колчин В.Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256с.
8. Бритиков В.Е. Асимптотика числа лесов из некорневых деревьев // Матем. Заметки. 1988. Т. 43, №5. С. 672–684.

УДК 519.2

О числе несгораемых вершин дерева в случайном лесе

[1] Юрий Леонидович Павлов
[2] Елена Владимировна Хворостянская

[1] ИПМИ КарНЦ РАН, Россия
185910, Республика Карелия, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: pavlov@krc.karelia.ru
[2] ИПМИ КарНЦ РАН, Россия
185910, Республика Карелия, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
E-mail: cher@krc.karelia.ru

Аннотация. Рассматривается множество $F_{n,N}$ всех возможных лесов, состоящих из $N\geq 2$ упорядоченных некорневых деревьев и n помеченных вершин, на котором задано равномерное распределение вероятностей. При $N^{1/3}(n/N-2)\to\infty$ получена предельная теорема для числа несгораемых вершин одного дерева в модели распространения огня в случайном лесе из $F_{n,N}$.

Ключевые слова: случайный лес; случайное дерево; модель лесного пожара; несгораемая вершина; предельное распределение.