SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

Motorova Elvira Alekseyevna
candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor,
Nizhny Novgorod branch of MESI, Russia

Motorov Viktor Borisovich
senior lecturer,
branch of the RSUH in Nizhny Novgorod, Russia

GENERALIZED FORMULA IMPOSSIBLE RATIOS FERMS

In this paper discusses the relation $d^m + b^n = g^n$, where d<b<g, i.e. defined the order of the numbers d,b,g on the number axis. According to the theorem of Ferma, the ratio $d^n + b^n = g^n$ when n > 3 is impracticable under any natural values of d,b,g. In this paper it is shown that the d^m+b^n=g^n when n > 3; m > = 2; m < n also not sustainable under natural values of d,b,g. This statement is a generalized formulation of Fermat's theorem, allowing the degree of least value smaller than other degrees.

Keywords: ratio, Ferma theorem, formula.

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА НЕВЫПОЛНИМЫХ СООТНОШЕНИЙ ФЕРМА

В настоящей работе рассматривается соотношение $d^m + b^n = g^n$, где d<b<g, т.е. определен порядок расположения чисел d,b,g на числовой оси. Согласно теореме Ферма, соотношение $d^n + b^n = g^n$ при $n \geq 3$ невыполнимо ни при каких натуральных значениях d,b,g. В данной работе показано, что $d^m + b^n = g^n$ при $n \geq 3$; $m \geq 2$; $m \leq n$ также невыполнимо при натуральных значениях d,b,g. Это утверждение является обобщенной формулировкой теоремы Ферма, допускающей степень наименьшего параметра меньше степени остальных.

Ключевые слова: соотношения, теорема Ферма, формула.

В [1]-[3] был проведен анализ некоторых целочисленных соотношений. В настоящей работе рассматривается соотношение $\mathrm{d}^\mathrm{m} + \mathrm{b}^\mathrm{n} = \mathrm{g}^\mathrm{n}$, где d<b<g, т.е. определен порядок расположения чисел d,b,g на числовой оси.

Согласно теореме Ферма [4], соотношение $\mathrm{d}^\mathrm{n} + \mathrm{b}^\mathrm{n} = \mathrm{g}^\mathrm{n}$ при $\mathrm{n} \geq 3$ невыполнимо ни при каких натуральных значениях d,b,g. Покажем, что

$d^m + b^n = g^n$ при $n \geq 3$; $m \geq 2$; $m \leq n$ также невыполнимо при натуральных значениях d,b,g. Это утверждение является обобщенной формулировкой теоремы Ферма, допускающей степень наименьшего параметра меньше степени остальных. Будем рассматривать соотношение

$$d^m = g^n - b^n \qquad (1)$$

где d,g,b,n,m - натуральные числа, для которых выполняются условия

$$d \geq 1;\ b > d;\ g > b;\ n \geq 3;\ m \geq 2;\ m \leq n \qquad (2)$$

Доказывается, что (1) не может быть выполнено ни при каких натуральных значениях d,b,g.

Покажем, что при выполнении (2) из (1) следует неравенство

$$d > g - b. \qquad (3)$$

Пусть $g = \alpha(d + b)$, где $\alpha > 0$. Тогда согласно (1)

$$d^m + b^n = g^n = \alpha^n(d^n + b^n) + \alpha^n(nd^{n-1}b + C_n^2 d^{n-2}b^2 \dots + ndb^{n-1}),$$

т.е.

$$(d^n + b^n)(1 - \alpha^n) + d^m - d^n = \alpha^n(nd^{n-1}b + C_n^2 d^{n-2}b^2 \dots + ndb^{n-1}). \qquad (4)$$

Поскольку $\alpha^n(nd^{n-1}b + C_n^2 d^{n-2}b^2 \dots + ndb^{n-1}) > 0$ при $\alpha > 0$, то левая часть (4) положительна, т.е. при m=n выполняется $0 < \alpha < 1$; при m<n выполняется $\alpha^n < (b^n + d^m)/(b^n + d^n) < 1$, что доказывает (3).

Согласно (2),(3), d и g можно представить в виде g=b+p, d=p+k, где p, k - натуральные числа. Подставив полученные выражения в (1), получаем

$$(p + k)^m = (b + p)^n - b^n. \qquad (5)$$

Принимается посылка: не существует делителей, общих для b,p,k одновременно, поскольку в противном случае (5) может быть сокращено на общий делитель. При m=n получаем

$$(b + p)^n - b^n = (p + k)^n \qquad (6)$$

Соотношение (6) преобразуется к следующему соотношению

$$np^{n-1}(b-k) + C_n^2 p^{n-2}(b^2-k^2) + \dots + np(b^{n-1}-k^{n-1}) - k^n = 0. \qquad (7)$$

Будем рассматривать (7) как уравнение (n-1)-ой степени относительно p. Пусть $p \neq 1$. Тогда числа p и kимеют общие делители, поскольку согласно теореме Виета [3] число p является делителем k^n. Пусть j – наибольший общий делитель p и k. Тогда p= ju, k=ja, где a и u – взаимно простые числа или числа, равные 1. При u=1 выполняется p=j, k=ja. Пусть $u \neq 1$. Поскольку $k^n = j^n a^n$ делится на p=ju и числа a и u – взаимно простые, то j^{n-1} делится на u. Обозначим $j^{n-1}/u = v$. Тогда

$$j^{n-1} = uv, p = ju \qquad (8)$$

Пусть z- наибольший общий делитель чисел {u,j}. Тогда

$$u = zs;\ j = zx, \qquad (9)$$

где s и x- взаимно простые числа или числа, равные 1. Согласно (9), структура k,p соответствует соотношениям

$$p=z^2xs;\ k=zxa. \qquad (10)$$

Покажем, что при z=1 выполняется s=1. Действительно, если z - наибольший общий делитель $\{u,j\}$, то z^{n-1}-наибольший общий делитель чисел $\{j^{n-1},u^{n-1}\}$. Согласно (8), $j^{n-1}=uv$, т.е. z^{n-1} -наибольший общий делитель чисел $\{uv,u^{n-1}\}$. Тогда $z^{n-1}=uQ$, где Q- целое число.

Следовательно, если $z=1$, то $u=1$ и $Q=1$. Согласно (9), $s=u/z$, т. е. если $z=1$, то $s=1$. Подставив (10) в (6), получаем

$$nb^{n-1}z^2xs+C_n^2b^{n-2}(z^2xs)^2\cdots+nb(z^2xs)^{n-1}+(z^2xs)^n=(zx)^n(a+zs)^n. \qquad (11)$$

Разделив обе части (11) на zx, получаем соотношение

$$nb^{n-1}zs+C_n^2b^{n-2}(zs)^2(zx)+\cdots+nb(zs)^{n-1}(zx)^{n-2}+(zs)^n(zx)^{n-1}=(zx)^{n-1}(a+zs)^n\ . \qquad (12)$$

Сократив (12) на z, получаем равенство, согласно которому $nb^{n-1}s$ делится на x. Поскольку x и s - взаимно просты, а b не может делиться на x согласно исходной посылке, то n делится на x. Будем полагать, что n - простое число. Действительно, если n=kj, где $k\geq 3$ –простое число, то $x^n=(x^j)^k$. Следовательно, если (6) не может быть выполнено при условии $\{n\geq 3$ – простое число$\}$, то (6) невыполнимо и при условии $\{n=kj$, где$k\geq 3$ –простое число$\}$. Аналогично, если (6) выполняется для $n=2^j$, где $j>2$, то в этом случае $x^n=(x^q)^4$, где $q=2^{j-2}$, т.е. (6) выполняется для $n=4$, что исключено [4]. Следовательно, достаточно рассмотреть (6) для случая, когда $n\geq 3$–простое число. Заметим, что если n–простое, то C_n^i делится на n при $0<i\leq n-1$.

Итак, если n - простое и n делится на x, то либо x=1 либо x=n. Если x=n, то сократив (12) на zn, получаем равенство, согласно которому b делится на x, что исключено согласно исходной посылке. Следовательно, x=1.

Итак, возможны варианты: 1) $z=1, x=1$; 2) $z\neq 1, x=1$.

1. $\mathbf{z=1, x=1}$, **т. е.** $\mathbf{p=1,\ k=a,\ d=a+1}$. Тогда (6) имеет вид

$$(b+1)^n-b^n=(1+a)^n\ . \qquad (13)$$

2. $\mathbf{z\neq 1, x=1}$, **т.е.** $\mathbf{p=z^2s, k=za, p+k=z^2s+za}$. Тогда (6) имеет вид

$$(b+z^2s)^n\text{-}b^n=(z^2s+za)^n\ . \qquad (14)$$

Анализ соотношения (13).

Соотношение (13) преобразуется к выражению

$$n(b^{n-1}-a^{n-1})+C_n^2(b^{n-2}\text{-}a^{n-2})+\ldots+n(b-a)=a^n\ , \qquad (15)$$

откуда следует, что a^n делится на $b-a$.

Числа b^n и $(b+1)^n$ представим в виде $b^n=[(b-a)+a]^n$, $(b+1)^n=[(b-a)+(a+1)]^n$. Тогда (13) запишется:

$n(b-a)^{n-1}+C_n^2(b-a)^{n-2}[(a+1)^2-a^2]+\ldots+C_n^2(b-a)^2[(a+1)^{n-2}-a^{n-2}]+n(b-a)[(a+1)^{n-1}-a^{n-1}]=a^n$. (16)

Замечаем, что a^n делится на $n(b-a)$, т.е. а делится на n, поскольку n - простое число. Следовательно, числа $\{b-a,a\}$ имеют общие делители. Пусть $J=J_1J_2\ldots J_s$- наибольший общий делитель$\{b-a,a\}$.

Тогда $b-a=J_1^{q1}J_2^{q2}\ldots J_s^{qs}$, где $q_j\leq n$, $a=nXJ_1J_2\ldots J_s$. Если $b-a$ не делится на n и хотя бы одно из $\{q_1q_2\ldots q_s\}$строго меньше n, то $(a+1)^{n-1}$ должно иметь с числом а общий делитель, что исключено. Действительно, если какое-то $q_j<n$, то сократив (16) на n(b-a), получаем, что правая часть и все слагаемые левой части (16), кроме $(a+1)^{n-1}$, делятся на J_j. Но $(a+1)^{n-1}$ не может делиться на J_j, поскольку числа {a,a+1}-взаимно простые. Следовательно, если b-ане делится на n, то $b-a=J^n$. Если $b-a$ делится на n,то $b-a=n^kQ^n$, a=nXQ, где $k\leq n$. Если $k<n-1$, то разделив (16) на n(b-a), получаем в правой части число, которое делится на n. В левой части все слагаемые делятся на n, кроме числа $(a+1)^{n-1}$, которое является числом типа An+1. Следовательно, (16) сводится к равенству типа An+1=0, что невыполнимо при целых A,n. Если k=n и число a не делится на n^2, то левая часть (16) делится на n^{n+1}, а правая часть - только на n^n, что невыполнимо при целочисленных параметрах. Если k=n, число a делится на n^2, число Q не делится на n, то разделив (16) на n(b-a) получаем, что правая часть и все слагаемые левой части (16), кроме $(a+1)^{n-1}$, делятся на n. Тогда (16) сводится к равенству типа An+1=0, что невыполнимо при целых A,n. Таким образом, если b-аделится на n,то $b-a=n^{n-1}Q^n$. При этом, не исключено, что число Q делится на n^k, число a делится на n^{k+1}.

Итак, возможны варианты: $b-a=J^n$; $b-a=n^{n-1}Q^n$.

Представив $b^n=(b+1)^n-n(b+1)^{n-1}+\ldots-C_n^2(b+1)^2+n(b+1)-1$, из (13) получаем $n\left[(b+1)^{n-1}-a^{n-1}\right]-C_n^2\left[(b+1)^{n-2}+a^{n-2}\right]+\cdots$

$$+C_n^2[(b+1)^2-a^2]-n(b+1+a)=a^n. \qquad (17)$$

Поскольку для любых натуральных X,Y,k выполняются соотношения:

$$(X^{2k}-Y^{2k})/(X+Y)=X^{2k-1}-X^{2k-2}Y+\ldots+XY^{2k-2}-Y^{2k-1}; \qquad (18)$$

$$(X^{2k+1}+Y^{2k+1})/(X+Y)=X^{2k}-X^{2k-1}Y+\ldots-XY^{2k-1}+Y^{2k},$$

то каждое слагаемое левой части и правая часть (17) делится на b+a+1, т.е. (17) запишется

$$n(b+1+a)[(b+1)^{n-2}-(b+1)^{n-3}a+\cdots+(b+1)a^{n-3}-a^{n-2}]-C_n^2(b+1+a)[(b+1)^{n-3}-(b+1)^{n-4}a+\cdots-(b+1)a^{n-4}+a^{n-3}]+\cdots+C_n^2(b+1+a)[b+1-a]-n(b+1+a)=a^n \qquad (19)$$

Из (19) следует, что a^n делится на $b+1+a$.

Пусть ψ-наибольший общий делитель {a,b+1+a}. Тогда $a=Y\psi$, где

$\psi = \psi_1\psi_2\ldots\psi_m$; b+1+a=$\psi_1^{s1}\psi_2^{s2}\ldots\psi_m^{sm}$, где $s_j \le n$, j=1,2…m,$b+1 = \psi_1^{s1}\psi_2^{s2}\ldots\psi_m^{sm} - Y\psi_1\psi_2\ldots\psi_m = B\psi$.

Поскольку для любого k выполняются соотношения

$[(b+1)^{2k}-a^{2k}]=\psi_1^{s1}\ldots\psi_m^{sm}[(B\psi)^{2k-1}-(B\psi)^{2k-2}Y\psi+\ldots+B\psi(Y\psi)^{2k-2}-(Y\psi)^{2k-1}]=$

$\psi_1^{s1}\psi_2^{s2}\ldots\psi_m^{sm}\psi^{2k-1}[B^{2k-1}-B^{2k-2}Y+B^{2k-3}Y^2-\ldots+BY^{2k-2}-Y^{2k-1}]$;

$[(b+1)^{2k+1}+a^{2k+1}]=\psi_1^{s1}\psi_2^{s2}\ldots\psi_m^{sm}[(B\psi)^{2k}-(B\psi)^{2k-1}Y\psi+\ldots-B\psi(Y\psi)^{2k-1}+(Y\psi)^{2k}]=$

$\psi_1^{s1}\psi_2^{s2}\ldots\psi_m^{sm}*\psi^{2k}[B^{2k}-B^{2k-1}Y+B^{2k-2}Y^{2-}-\ldots-BY^{2k-1}+Y^{2k}]$,то (19) запишется:

$$n\psi^{n-2}[B^{n-2}-B^{n-3}Y+\cdots+BY^{n-3}-Y^{n-2}]-C_n^2\psi^{n-3}[B^{n-3}-B^{n-4}Y+\cdots+Y^{n-3}]+\cdots+C_n^2\psi(B-Y)-n = Y^n\psi_1^{n-s1}\cdots\psi_m^{n-sm} \qquad (20)$$

Из (20) следует, что если существует $s_j < n$, то n делится на ψ_j, т.е. ψ_j=n, т.к. n- простое. Следовательно, если b+1+a не делится на n,то$b+1+a=\psi^n$. Если $b+1+a$ делится на n, то $b+1+a=n^k\varphi^n$;a=Yn . Действительно, если существует делитель φ^s числа b+1+a, где s<n, $\varphi \ne n$, то разделив (19) на b+1+a, получаем, что n делится на φ. Это исключено, т.к. n – простое. Если k<n-1, то разделив (19) на n(b+1+a), получаем в правой части число, которое делится на n, т.е. (19) сводится к равенству типа An-1=0, что невыполнимо при целых A,n. Если k=nи число a не делится на n^2, то левая часть (19) делится на n^{n+1}, а правая часть-только на n^n, что невыполнимопри целочисленных параметрах. Если k=n, число a делится на n^2, число φ не делится на n, то разделив (19) на n(b+1+a), получаем равенство типа An-1=0, что невыполнимо при целых A,n. Таким образом, если b+1+a делится на n, то $b+1+a=n^{n-1}\varphi^n$. При этом, не исключено, что число φ делится на n^k, число a делится на n^{k+1}. Следовательно, возможны варианты:

$b-a=J^n$, $b+1+a=\Psi^n$. Здесь $\{n; (b-a); (b+1+a)\}$-взаимно просты;

$b-a=n^{n-1}Q^n$; $b+1+a=\Psi^n$;

3) $b-a=J^n$, $b+1+a=n^{n-1}\varphi^n$.

Рассмотрим вариант 1: $b-a=J^n, b+1+a=\Psi^n$.

Тогда $\Psi^n+J^n=2b+1$;ψ^n-J^n=2a+1, откуда следует

$a=(\psi^n-J^n-1)/2; b=(\Psi^n+J^n-1)/2$, и (13) запишется

$$[(\Psi^n+J^n+1)/2]^n-[(\Psi^n+J^n-1)/2]^n=[(\Psi^n-J^n+1)/2]^n \qquad (21)$$

Рассмотрим вариант 2: $b-a=n^{n-1}Q^n, b+1+a=\Psi^n$.

Тогда $\Psi^n+n^{n-1}Q^n=2b+1$;$\psi^n-n^{n-1}Q^n$=2a+1, откуда следует

$a=(\psi^n-n^{n-1}Q^n-1)/2; b=(\Psi^n+n^{n-1}Q^n-1)/2$, и (13) запишется

$$[(\Psi^n+n^{n-1}Q^n+1)/2]^n-[(\Psi^n+n^{n-1}Q^n-1)/2]^n=[(\Psi^n-n^{n-1}Q^n+1)/2]^n \qquad (22)$$

Рассмотрим вариант 3: $b-a=J^n, b+1+a=n^{n-1}\varphi^n$.

Тогда $n^{n-1}\varphi^n + J^n = 2b+1; n^{n-1}\varphi^n - J^n$=2a+1, откуда следует $a = (n^{n-1}\varphi^n - J^n - 1)/2; b = (n^{n-1}\varphi^n + J^n - 1)/2$, и (13) запишется

$$[(n^{n-1}\varphi^n + J^n + 1)/2]^n - [(n^{n-1}\varphi^n + J^n - 1)/2]^n = [(n^{n-1}\varphi^n - J^n + 1)/2]^n \quad (23)$$

Полученные соотношения (21),(22),(23) будут рассмотрены при анализе (14) как частные случаи этого соотношения.

Анализ соотношения (14).

Соотношение (14) преобразуется к выражению

$$nz^2s[b^{n-1}\text{-}(za)^{n-1}]+C_n^2(z^2s)^2[b^{n-2}\text{-}(za)^{n-2}]+\ldots+n(z^2s)^{n-1}(b-za)=(za)^n, \quad (24)$$

откуда следует, что $(za)^n$ делится на $b - za$. Сократив (19) наz^2, получаем

$$ns[b^{n-1}\text{-}(za)^{n-1}]+C_n^2z^2s^2[b^{n-2}\text{-}(za)^{n-2}]+\ldots+n(z^2)^{n-2}s^{n-1}(b-za)=z^{n-2}a^n. \quad (25)$$

Из (25) следует, что z^{n-2} делится на s, т.е.z^{n-2} =sA; s делится на z; za делится на n. Если A=1, то z^{n-2} =s и (14) преобразуется к виду

$$(b+z^n)^n\text{-}b^n=(z^n+za)^n. \quad (26)$$

Если $A \neq 1$, то подставивz^{n-2} =sA в (25)и сократив на s, получаем

$$n[b^{n-1}\text{-}(za)^{n-1}]+C_n^2z^2s[b^{n-2}\text{-}(za)^{n-2}]+\ldots+n(z^2)^{n-2}s^{n-2}(b-za)=Aa^n. \quad (27)$$

Из соотношения z^{n-2} =sA следует, что все простые делители числа A являются делителями числа z^{n-2}. Тогда из (27) следует, что число nb^{n-1} имеет общие делители с числом z. Числа {b,z} не могут иметь общих делителей. Следовательно, если $A \neq 1$, то числа {n,z} имеют общие делители, т.е. z=Zn, поскольку n-простое. Левая часть соотношения (14) может быть разложена на множители как разность степеней и представлена в виде:

$(b+z^2s)^n\text{-}b^n = z^2s[(b+z^2s)^{n-1} + (b+z^2s)^{n-2}b + \cdots + (b+z^2s)b^{n-2} + b^{n-1}] = Z^2n^2s[Dn^2 + nb^{n-1}] = Z^2n^3s[Dn+b^{n-1}]$. Правая часть (14) принимает вид: $(z^2s+za)^n = (Z^2n^2s+Zna)^n=(Zn)^n(Zns+a)^n$, т.е. (14) запишется

$$Z^2n^3s[Dn+b^{n-1}] =(Zn)^n(Zns+a)^n, \quad (28)$$

причем, все простые делители s являются делителями Zn.

Следовательно, должно выполняться соотношение $Z^2n^3s=(Zn)^n$. Тогда $s=Z^{n-2}n^{n-3}$, и (14) принимает вид:

$$(b+Z^nn^{n-1})^n\text{-}b^n=(Z^nn^{n-1}+Zna)^n. \quad (29)$$

Следовательно, анализ (14) сводится к анализу (26) и (29).

Заметим, что соотношение (13) является частным случаем (26), т.е. достаточно провести анализ (26) и (29).

Анализ соотношения (26).

Соотношение (26), согласно (24), преобразуется к соотношению

$$nz^n[b^{n-1}\text{-}(za)^{n-1}]+C_n^2(z^n)^2[b^{n-2}\text{-}(za)^{n-2}]+\ldots+n(z^n)^{n-1}(b-za)=(za)^n. \quad (30)$$

Сократив (30) на z^n, получаем

$$n[b^{n-1}\text{-}(za)^{n-1}]+C_n^2z^n[b^{n-2}\text{-}(za)^{n-2}]+\ldots+n(z^n)^{n-2}(b-za)=a^n. \quad (31)$$

Из (31) следует, что a^n делится на$n(b-za)$, т.е. a делится на n, поскольку n - простое число. Следовательно, числа$\{b-za, a\}$ имеют общие делители. Пусть $J=J_1J_2\ldots J_s$- наибольший общий делитель$\{b-za, a\}$.

Тогда $b-za=J_1^{q1}J_2^{q2}\ldots J_s^{qs}$, где $q_j\leq n$, $a=nXJ_1J_2\ldots J_s$.

Числа b^n и $(b+z^n)^n$ представим в виде$b^n=[(b-za)+za]^n$,

$(b+z^n)^n=[(b-za)+(za+z^n)]^n$. Тогда (26) запишется:

$$n(b-za)^{n-1}z^n+C_n^2(b-za)^{n-2}[(za+z^n)^2\text{-}(za)^2]+\ldots+C_n^2(b-za)^2[(za+z^n)^{n-2}\text{-}(za)^{n-2}]+n(b-za)[(za+z^n)^{n-1}-(za)^{n-1}]=(za)^n. \quad (32)$$

Из (32) следует, что если $b-za$ не делится на n и хотя бы одно из $\{q_1q_2\ldots q_s\}$строго меньше n, то $(za+z^n)^{n-1}$должно иметь с числом a общий делитель, что исключено. Действительно, если какое-то $q_j<n$, то сократив (32) на n(b-za), получаем, что правая часть и все слагаемые левой части (32), кроме $(za+z^n)^{n-1}$, делятся на J_j. Но$[(za+z^n)^{n-1}$ не может делиться на J_j, поскольку числа $\{a, za+z^n\}$ - взаимно простые. Следовательно, если b-zaне делится на n, то $b-za=J^n$. Если $b-za$ делится на n, то $b-za=n^kQ^n$, a=nXQ, где $k\leq n$. Если $k<n-1$, то разделив (32) на n(b-za), получаем в правой части число, которое делится на n. В левой части все слагаемые делятся на n, кроме $(za+z^n)^{n-1}$.

Следовательно, (32) невыполнимо при целочисленных параметрах.

Если k=n и число a не делится на n^2, то левая часть (32) делится на n^{n+1}, а правая часть - только на n^n, что невыполнимо при целочисленных параметрах. Если k=n, число a делится на n^2, число Q не делится на n, то разделив (32)на

n(b-za), получаем, что правая часть и все слагаемые левой части (32), кроме $(za+z^n)^{n-1}$, делятся на n. В этом случае (32) невыполнимо при целочисленных параметрах.

Таким образом, если b-zaделится на n,то $b-za=n^{n-1}Q^n$. При этом, не исключено, что число Q делится на n^k, число a делится на n^{k+1}.

Итак, возможны варианты:$b-za=J^n$; $b-za=n^{n-1}Q^n$.

Представив $b^n=[(b+z^n)\text{-}z^n]^n=(b+z^n)^n-n(b+z^n)^{n-1}z^n+\ldots\text{-}C_n^2(b+z^n)^2z^{n(n-2)}+n(b+z^n)z^{n(n-1)}\text{-}z^{n*n}$, из (14) получаем:

$$n\left[(b+z^n)^{n-1}-(za)^{n-1}\right]-C_n^2\left[(b+z^n)^{n-2}+(za)^{n-2}\right]z^n+\cdots+C_n^2\left[(b+z^n)^2-(za)^2\right]z^{n(n-3)}-n(b+z^n+za)z^{n(n-2)}=a^n. \quad (33)$$

Тогда, согласно (18), каждое слагаемое левой части и правая часть (33) делится на $b+za+z^n$, т.е. (33) запишется:

$$n(b+za+z^n)[(b+z^n)^{n-2}-(b+z^n)^{n-3}za+\cdots+(b+z^n)(za)^{n-3} \\ -(za)^{n-2}] \\ -C_n^2(b+za+z^n)[(b+z^n)^{n-3}-(b+z^n)^{n-4}za+\cdots \\ -(b+z^n)(za)^{n-4}+(za)^{n-3}]+\cdots \\ +C_n^2(b+za+z^n)[b+z^n-za] \\ -n(b+za+z^n)=a^n\ . \qquad (34)$$

Из (34) следует, что a^n делится на $b+z^n+za$. Пусть ψ-наибольший общий делитель $\{a,b+z^n+za\}$. Тогда $a=Y\psi$, где $\psi=\psi_1\psi_2\ldots\psi_m$; $b+z^n+za=\psi_1^{s1}\psi_2^{s2}\ldots\psi_m^{sm}$, где $s_j\le n$, $j=1,2\ldots m$, $b+z^n=\psi_1^{s1}\psi_2^{s2}\ldots\psi_m^{sm}-zY\psi_1\psi_2\ldots\psi_m=B\psi$.

Поскольку для любого k выполняются соотношения $[(b+z^n)^{2k}-(za)^{2k}]=\psi_1^{s1}\ldots\psi_m^{sm}[(B\psi)^{2k-1}-(B\psi)^{2k-238}Yz\psi+\ldots+B\psi(Yz\psi)^{2k-2}-(Yz\psi)^{2k-1}]=$
$\psi_1^{s1}\psi_2^{s2}\ldots\psi_m^{sm}\psi^{2k-1}[B^{2k-1}-B^{2k-2}Yz+B^{2k-3}(Yz)^2-\ldots+B(Yz)^{2k-2}-(Yz)^{2k-1}]$;
$[(b+z^n)^{2k+1}+(za)^{2k+1}]=\psi_1^{s1}\psi_2^{s2}\ldots\psi_m^{sm}[(B\psi)^{2k}-(B\psi)^{2k-1}Yz\psi+\ldots$
$-B\psi(Yz\psi)^{2k-1}+(Yz\psi)^{2k}]=\psi_1^{s1}\psi_2^{s2}\ldots\psi_m^{sm}*\psi^{2k}[B^{2k}-B^{2k-1}Yz+B^{2k-2}(Yz)^{2-}-\ldots$
$-B(Yz)^{2k-1}+(Yz)^{2k}]$, то (34) запишется:

$n\psi^{n-2}[B^{n-2}-B^{n-3}Yz+\cdots+B(Yz)^{n-3}-(Yz)^{n-2}]-C_n^2\psi^{n-3}[B^{n-3}-B^{n-4}Yz+\cdots+(Yz)^{n-3}]+\cdots+C_n^2\psi\,(B-Yz)-n=(\,Yz)^n\psi_1^{n-s1}\cdots\psi_m^{n-sm}$ (35)

Из (35) следует, что если существует $s_j<n$, то n делится на ψ_j, т.е. $\psi_j=n$, т.к. n- простое. Следовательно, если $b+z^n+za$ не делится на n, то

$b+z^n+za=\psi^n$. Если $b+z^n+za$ делится на n, то $b+z^n+za=n^k\varphi^n$, $a=Yn\,\varphi$. Действительно, если существует делитель φ^s числа $b+z^n+za$, где $s<n$, $\varphi\ne n$, то разделив (34) на $b+z^n+za$, получаем, что n делится на φ, что исключено. Если k<n-1, то разделив (34) на $n(b+z^n+za)$, получаем в правой части число, которое делится на n, т.е. (34) сводится к равенству типа An-1=0, что невыполнимо при целых A,n. Если k=n и число a не делится на n^2, то левая часть (34) делится на n^{n+1}, а правая часть-только на n^n, что невыполнимопри целочисленных параметрах. Если k=n, число a делится на n^2, число φ не делится на n, то разделив (34) на $n(b+z^n+za)$, получаем равенство типа An-1=0, что невыполнимо при целых A,n. Таким образом, если $b+z^n+za$ делится на n, то $b+z^n+za=n^{n-1}\varphi^n$. При этом, не исключено, что число φ делится на n^k, число a делится на n^{k+1}. Следовательно, возможны варианты:

1) $b-za=J^n$,$b+z^n+za=\Psi^n$. Здесь $\{n,b-za\}$ и $\{n,b+z^n+za\}$-взаимно просты;

2) $b-za=n^{n-1}Q^n$; $b+z^n+za=\Psi^n$;

3) $b-za=J^n$, $b+z^n+za=n^{n-1}\varphi^n$.

Для дальнейшего анализа перечисленных вариантов приведем следующую теорему.

Теорема об общих делителях чисел $\{J+z;\ \frac{J^n+z^n}{J+z}\}$.

Если n – нечетное число и числа $\{J, z\}$- взаимно просты, то общими делителями чисел $\{J+z;\ \frac{J^n+z^n}{J+z}\}$ могут быть только делители числа n. Если числа $\{J+z; n\}$- взаимно просты, то числа $\{J+z;\ \frac{J^n+z^n}{J+z}\}$ также взаимно просты. Доказательство.

Рассмотрим $\frac{J^n+z^n}{J+z} = J^{n-1} - J^{n-2}z + J^{n-3}z^2 - \ldots + J^2z^{n-3} - Jz^{n-2} + z^{n-1}$.

Если (n-1)/2 четно, то $J^{n-1} - J^{n-2}z + J^{n-3}z^2 - \ldots + J^2z^{n-3} - Jz^{n-2} + z^{n-1} =$

$$-(Jz)^{(n-3)/2}(J+z)^2 + (Jz)^{(n-5)/2}(J^2-z^2)^2 - (Jz)^{(n-7)/2}(J^3+z^3)^2 + \ldots$$
$$- Jz(J^{(n-3)/2} + z^{(n-3)/2})^2 + (J^{(n-1)/2} - z^{(n-1)/2})^2 + n(Jz)^{(n-1)/2}.$$

Например, при n=5 получаем

$\frac{J^5+z^5}{J+z} = J^4 - J^3z + J^2z^2 - Jz^3 + z^4 = -J^3z - 2J^2z^2 - Jz^3 + 3J^2z^2 + J^4 - 2J^2z^2 + z^4 + 2J^2z^2 = -Jz(J+z)^2 + (J^2-z^2)^2 + 5(Jz)^2$.

Если (n-1)/2 нечетно, то $J^{n-1} - J^{n-2}z + J^{n-3}z^2 - \ldots + J^2z^{n-3} - Jz^{n-2} + z^{n-1} =$

$$(Jz)^{(n-3)/2}(J+z)^2 - (Jz)^{(n-5)/2}(J^2-z^2)^2 + (Jz)^{(n-7)/2}(J^3+z^3)^2 - \ldots$$
$$+ (J^{(n-1)/2} + z^{(n-1)/2})^2 - n(Jz)^{(n-1)/2}.$$

Например, при n=3 получаем $\frac{J^3+z^3}{J+z} = J^2 - Jz + z^2 = J^2 + 2Jz + z^2 - 3Jz = (J+z)^2 - 3Jz$; при n=7 получаем

$\frac{J^7+z^7}{J+z} = J^6 - J^5z + J^4z^2 - J^3z^3 + J^2z^4 - Jz^5 + z^6 = (Jz)^2(J+z)^2 - 3(Jz)^3 - Jz(J^2-z^2)^2 - 2(Jz)^3 + (J^3+z^3)^2 - 2(Jz)^3 = (Jz)^2(J+z)^2 - Jz(J^2-z^2)^2 + (J^3+z^3)^2 - 7(Jz)^3$.

Замечаем, что каждое слагаемое правой части полученных соотношений, кроме последнего, делится на $(J+z)^2$. Действительно, число $J^{2m+1} + z^{2m+1}$ делится на $J+z$. Число $J^{2m} - z^{2m} = (J^m - z^m)(J^m + z^m)$ также делится на $J+z$, т.к. если m – нечетно, то $J^m + z^m$ делится на $J+z$; если m –четно, то $J^m - z^m$ делится на $J+z$, поскольку может быть разложено на множители как разность квадратов до тех пор, пока не появится множитель $J^t + z^t$, где t-нечетно. Таким образом,

если (n-1)/2 – нечетно, то $\frac{J^n+z^n}{J+z} = D(J+z)^2 - n(Jz)^{(n-1)/2}$.

Если (n-1)/2 – четно, то $\frac{J^n+z^n}{J+z} = D(J+z)^2 + n(Jz)^{(n-1)/2}$.

Следовательно, если числа $\{J, z\}$-взаимно просты и числа $J+z; n\}$-взаимно просты, то числа $\{J+z;\ \frac{J^n+z^n}{J+z}\}$ также взаимно просты. Если числа $\{J+z; n\}$ имеют общие делители, то числа $\{J+z;\ \frac{J^n+z^n}{J+z}\}$ имеют те же общие делители.

Теорема доказана.

Рассмотрим вариант 1: $b - za = J^n, b + z^n + za = \Psi^n$, где числа $\{\Psi, J\}$ – взаимно просты и ни одно из них не делится на n. При этом, числа $\{z^n, n\}$ также взаимно просты, поскольку, согласно вышесказанному, числа $\{a,z\}$-взаимно просты, но число а делится на n: $za = zX\psi nJ$, где X - целое число. Тогда $\Psi^n + J^n = 2b + z^n$; $\Psi^n - J^n = 2za + z^n$, откуда следует

$za = (\Psi^n - J^n - z^n)/2; b = (\Psi^n + J^n - z^n)/2$, и (26) запишется

$$[(\Psi^n + J^n + z^n)/2]^n - [(\Psi^n + J^n - z^n)/2]^n = [(\Psi^n - J^n + z^n)/2]^n. \qquad (36)$$

Соотношение (36) представим в виде

$$[\Psi^n + J^n + z^n]^n = [\Psi^n + J^n - z^n]^n + [\Psi^n - J^n + z^n]^n \qquad (37)$$

Рассмотрим правую часть (37):

$[\Psi^n + J^n - z^n]^n + [\Psi^n - J^n + z^n]^n = 2\Psi^n[[\Psi^n + J^n - z^n]^{n-1} - [\Psi^n + J^n - z^n]^{n-2}(\Psi^n - J^n + z^n) + \cdots - [\Psi^n - J^n + z^n]^{n-2}(\Psi^n + J^n - z^n) + [\Psi^n - J^n + z^n]^{n-1}] = 2\Psi^n[[\Psi^n + J^n + z^n - 2z^n]^{n-1} -$

$[\Psi^n + J^n + z^n - 2z^n]^{n-2}(\Psi^n + J^n + z^n - 2J^n) + \cdots - [\Psi^n + J^n + z^n - 2J^n]^{n-2}(\Psi^n + J^n + z^n - 2z^n) + [\Psi^n + J^n + z^n - 2J^n]^{n-1}] = 2\Psi^n[B(\Psi^n + J^n + z^n) + 2^{n-1}(z^{n(n-1)} - z^{n(n-2)}J^n + \cdots - z^nJ^{n(n-2)} + J^{n(n-1)})] = 2\Psi^n [B(\Psi^n + J^n + z^n) + 2^{n-1}\frac{(J^n)^n + (z^n)^n}{J^n + z^n}]$.

Таким образом, должно выполняться равенство

$$[\Psi^n + J^n + z^n]^n = 2B\Psi^n(\Psi^n + J^n + z^n) + 2^n\Psi^n\frac{(J^n)^n + (z^n)^n}{J^n + z^n}, \qquad (38)$$

т.е. число $\Psi^n\frac{(J^n)^n + (z^n)^n}{J^n + z^n}$ должно делиться на $\frac{\Psi^n + J^n + z^n}{2}$, а число $\frac{(J^n)^n + (z^n)^n}{J^n + z^n}$ должно делиться на $\frac{\Psi^{n-1} + (J^n + z^n)/\Psi}{2}$.

Заметим, что $\frac{\Psi^n + J^n + z^n}{2} = J^n + z^n + zX\Psi nJ$, т.е. $(\frac{\Psi^n + J^n + z^n}{2})^n = (J^n)^n + (z^n)^n + B_1(J^n + z^n) + B_2(J^n + z^n)\Psi + (zX\Psi nJ)^n = B_3(J^n + z^n) + (zX\Psi nJ)^n$.

Если разделим полученное соотношение на Ψ^n, то получим соотношение, в котором первое слагаемое правой части делится на $\frac{J^n + z^n}{\Psi}$, т.е. имеет общий делитель с $(J^n)^n + (z^n)^n$.

Последнее слагаемое $(zXnJ)^n$ взаимно просто с $(J^n)^n + (z^n)^n$. Следовательно, $(J^n)^n + (z^n)^n$ не делится на $\frac{\Psi^{n-1} + (J^n + z^n)/\Psi}{2}$.

Число $\frac{(J^n)^n + (z^n)^n}{J^n + z^n}$ является делителем $(J^n)^n + (z^n)^n$, т.е. также не делится на $\frac{\Psi^{n-1} + (J^n + z^n)/\Psi}{2}$.

Следовательно, (37) невыполнимо при целочисленных значениях параметров, если $J^n + z^n \neq \Psi$. Если предположить, что $J^n + z^n = \Psi$, то из (38) следует, что

$\frac{(J^n)^n + (z^n)^n}{J^n + z^n}$ должно делиться на $\frac{\Psi^{n-1} + 1}{2}$, и следовательно, число $2[(J^n)^n + (z^n)^n]$ должно делиться на $(J^n + z^n)^n + J^n + z^n$. Тогда разность чисел $2[(J^n)^n + (z^n)^n] - [(J^n + z^n)^n + J^n + z^n] = (J^n)^n + (z^n)^n - nJ^{n(n-1)}z^n -$

$\cdots - nJ^n z^{n(n-1)} - J^n - z^n$ также должна делиться на $(J^n + z^n)^n + J^n + z^n$. Это исключено, т.к.$(J^n + z^n)^n + J^n + z^n > (J^n)^n + (z^n)^n$- $nJ^{n(n-1)}z^n - \cdots - nJ^n z^{n(n-1)} - J^n - z^n$.

Таким образом, (37) невыполнимо при целочисленных значениях параметров. Полученное противоречие исключает рассматриваемый вариант.

Рассмотрим вариант 2: $b - za = n^{n-1}Q^n; b + z^n + za = \Psi^n$.

Тогда (26) принимает вид:

$$[(\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n)/2]^n = [(\Psi^n + n^{n-1}Q^n - z^n)/2]^n + [(\Psi^n - n^{n-1}Q^n + z^n)/2]^n \quad (39)$$

Соотношение (39) представим в виде

$$[\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n]^n = [\Psi^n + n^{n-1}Q^n - z^n]^n + [\Psi^n - n^{n-1}Q^n + z^n]^n \quad (40)$$

Рассмотрим правую часть (40):

$[\Psi^n + n^{n-1}Q^n - z^n]^n + [\Psi^n - n^{n-1}Q^n + z^n]^n = 2\Psi^n[[\Psi^n + n^{n-1}Q^n - z^n]^{n-1} - [\Psi^n + n^{n-1}Q^n - z^n]^{n-2}(\Psi^n - n^{n-1}Q^n + z^n) + \cdots - [\Psi^n - n^{n-1}Q^n + z^n]^{n-2}(\Psi^n + n^{n-1}Q^n - z^n) + [\Psi^n - n^{n-1}Q^n + z^n]^{n-1}]=$
$2\Psi^n[[\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n - 2z^n]^{n-1} -$
$[\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n - 2z^n]^{n-2}(\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n - 2n^{n-1}Q^n) + \cdots - [\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n - 2n^{n-1}Q^n]^{n-2}(\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n - 2z^n) + [\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n - 2n^{n-1}Q^n]^{n-1}] = 2\Psi^n[B(\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n) + 2^{n-1}(z^{n(n-1)} - z^{n(n-2)}n^{n-1}Q^n + \cdots - z^n(n^{n-1}Q^n)^{(n-2)} + (n^{n-1}Q^n)^{(n-1)})]=$

$2\Psi^n\ [B(\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n) + 2^{n-1}\frac{(n^{n-1}Q^n)^n + (z^n)^n}{n^{n-1}Q^n + z^n}]$.

Таким образом, должно выполняться равенство

$$[\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n]^n = 2\Psi^n B(\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n) + 2^n\Psi^n\frac{(n^{n-1}Q^n)^n + (z^n)^n}{n^{n-1}Q^n + z^n}, \quad (41)$$

т.е. число $\Psi^n\frac{(n^{n-1}Q^n)^n + (z^n)^n}{n^{n-1}Q^n + z^n}$ должно делиться на $\frac{\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n}{2}$,

а число $\frac{(n^{n-1}Q^n)^n + (z^n)^n}{n^{n-1}Q^n + z^n}$ должно делиться на $\frac{\Psi^{n-1} + (n^{n-1}Q^n + z^n)/\Psi}{2}$.

Заметим, что $\frac{\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n}{2} = n^{n-1}Q^n + z^n + zX\Psi nJ$, т.е.

$(\frac{\Psi^n + n^{n-1}Q^n + z^n}{2})^n = (n^{n-1}Q^n)^n + (z^n)^n + B_1(n^{n-1}Q^n + z^n) + B_2(n^{n-1}Q^n + z^n)\Psi + (zX\Psi nJ)^n = B_3(n^{n-1}Q^n + z^n) + (zX\Psi nJ)^n$.

Если разделим полученное соотношение на Ψ^n, то получим соотношение, в котором первое слагаемое правой части делится на $\frac{n^{n-1}Q^n + z^n}{\Psi}$, т.е. имеет общий делитель с $(n^{n-1}Q^n)^n + (z^n)^n$.

Последнее слагаемое $(zXnJ)^n$ взаимно просто с $(n^{n-1}Q^n)^n + (z^n)^n$. Следовательно, $(n^{n-1}Q^n)^n + (z^n)^n$ не делится на $\frac{\Psi^{n-1} + (n^{n-1}Q^n + z^n)/\Psi}{2}$.

Число $\frac{(n^{n-1}Q^n)^n+(z^n)^n}{J^n+z^n}$ является делителем $(n^{n-1}Q^n)^n+(z^n)^n$, т.е. также не делится на $\frac{\Psi^{n-1}+(n^{n-1}Q^n+z^n)/\Psi}{2}$.

Следовательно, (40) невыполнимо при целочисленных значениях параметров, если $n^{n-1}Q^n+z^n \neq \Psi$.

Если предположить, что $n^{n-1}Q^n+z^n = \Psi$, то из (41) следует, что число $2[(n^{n-1}Q^n)^n+(z^n)^n]$ должно делиться на $(n^{n-1}Q^n+z^n)^n+n^{n-1}Q^n+z^n$.

Тогда разность $2[(n^{n-1}Q^n)^n+(z^n)^n]$- $[(n^{n-1}Q^n+z^n)^n+n^{n-1}Q^n+z^n]$= $(n^{n-1}Q^n)^n+(z^n)^n - nz^n n^{(n-1)(n-1)}Q^{n(n-1)}$-…- $nz^{n(n-1)}n^{(n-1)}Q^n - n^{n-1}Q^n - z^n$ также должна делиться на $(n^{n-1}Q^n+z^n)^n+n^{n-1}Q^n+z^n$.

Это исключено, т.к.

$(n^{n-1}Q^n+z^n)^n+n^{n-1}Q^n+z^n >$
$(n^{n-1}Q^n)^n+(z^n)^n - nz^n n^{(n-1)(n-1)}Q^{n(n-1)}$-…- $nz^{n(n-1)}n^{(n-1)}Q^n - n^{n-1}Q^n - z^n$.

Таким образом, (40) невыполнимо при целочисленных значениях параметров Полученное противоречие исключает рассматриваемый вариант.

Рассмотрим вариант 3: $b - za = J^n$, $b + z^n + za = n^{n-1}\varphi^n$.

Тогда (26) принимает вид:

$$[(n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n)/2]^n - [(n^{n-1}\varphi^n + J^n - z^n)/2]^n = [(n^{n-1}\varphi^n - J^n + z^n)/2]^n. \qquad (42)$$

Соотношение (42) представим в виде

$$[n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n]^n = [n^{n-1}\varphi^n + J^n - z^n]^n + [n^{n-1}\varphi^n - J^n + z^n]^n \qquad (43)$$

Рассмотрим правую часть (43):

$[n^{n-1}\varphi^n + J^n - z^n]^n + [n^{n-1}\varphi^n - J^n + z^n]^n = 2n^{n-1}\varphi^n[[n^{n-1}\varphi^n + J^n - z^n]^{n-1} - [n^{n-1}\varphi^n + J^n - z^n]^{n-2}(n^{n-1}\varphi^n - J^n + z^n) + \cdots - [n^{n-1}\varphi^n - J^n + z^n]^{n-2}(n^{n-1}\varphi^n + J^n - z^n) + [n^{n-1}\varphi^n - J^n + z^n]^{n-1}]$= $2n^{n-1}\varphi^n[[n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n - 2z^n]^{n-1} -$
$[n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n - 2z^n]^{n-2}(n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n - 2J^n) + \cdots -$
$[n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n - 2J^n]^{n-2}(n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n - 2z^n) + [n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n - 2J^n]^{n-1}] = 2n^{n-1}\varphi^n[B(n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n)+2^{n-1}(z^{n(n-1)} - z^{n(n-2)}J^n + \cdots - z^n J^{n(n-2)} + J^{n(n-1)})] = 2n^{n-1}\varphi^n[B(n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n)+2^{n-1}\frac{(J^n)^n+(z^n)^n}{J^n+z^n}]$.

Таким образом, должно выполняться равенство

$[n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n]^n =$
$2n^{n-1}\varphi^n B(n^{n-1}\varphi^n + J^n + z^n)+2^n n^{n-1}\varphi^n \frac{(J^n)^n+(z^n)^n}{J^n+z^n}$, (44)

т.е. число $n^{n-1}\varphi^n \frac{(J^n)^n+(z^n)^n}{J^n+z^n}$ должно делиться на $\frac{n^{n-1}\varphi^n+J^n+z^n}{2}$, а число

$n^{n-1}\frac{(J^n)^n+(z^n)^n}{J^n+z^n}$ должно делиться на $\frac{n^{n-1}\varphi^{n-1}+(J^n+z^n)/\varphi}{2}$.

Заметим, что $\frac{n^{n-1}\varphi^n+J^n+z^n}{2}=J^n+z^n+zXn\varphi J$, т.е.

$(\frac{n^{n-1}\varphi^n+J^n+z^n}{2})^n=(J^n)^n+(z^n)^n+B_1(J^n+z^n)+B_2(J^n+z^n)n\varphi+(Xn\varphi J)^n=$ $B_3(J^n+z^n)+(Xn\varphi J)^n$.

Если разделим полученное соотношение на φ^n, то получим, что первое слагаемое правой части делится на $\frac{J^n+z^n}{\varphi}$.

Число $(zXJ)^n$ взаимно просто с $(J^n)^n+(z^n)^n$. Следовательно, общим делителем чисел $(J^n)^n+(z^n)^n$ и $\frac{n^{n-1}\varphi^{n-1}+(J^n+z^n)/\varphi}{2}$ может быть только число n.

Поскольку $\frac{n^{n-1}\varphi^{n-1}+(J^n+z^n)/\varphi}{2}$ имеет делители, отличные от n, то $n^{n-1}\frac{(J^n)^n+(z^n)^n}{J^n+z^n}$ не делится на $\frac{n^{n-1}\varphi^{n-1}+(J^n+z^n)/\varphi}{2}$.

Следовательно, (43) невыполнимо при целочисленных значениях параметров, если $J^n+z^n\neq\varphi$. Если предположить, что $J^n+z^n=\varphi$, то из (44) следует, что

число $2n^{n-1}[(J^n)^n+(z^n)^n]$ должно делиться на $n^{n-1}(J^n+z^n)^n+J^n+z^n$.

Тогда разность чисел

$2n^{n-1}[(J^n)^n+(z^n)^n]-[n^{n-1}(J^n+z^n)^n+J^n+z^n]=n^{n-1}[(J^n)^n+(z^n)^n]-$
$n^{n-1}[nJ^{n(n-1)}z^n+\dots+nJ^nz^{n(n-1)}]-J^n-z^n$

также должна делиться на $n^{n-1}(J^n+z^n)^n+J^n+z^n$.

Это исключено, т.к. $n^{n-1}(J^n+z^n)^n+J^n+z^n>n^{n-1}[(J^n)^n+(z^n)^n]-$
$n^{n-1}[nJ^{n(n-1)}z^n+\dots+nJ^nz^{n(n-1)}]-J^n-z^n$.

Таким образом, (43) невыполнимо при целочисленных значениях параметров. Полученное противоречие исключает рассматриваемый вариант.

Анализ соотношения (29).

Аналогично предыдущему случаю показывается, что $(Zna)^n$ делится на числа

b- Zna и $b+Z^nn^{n-1}+Zna$, причем, каждое из чисел {b-Zna; $b+Z^nn^{n-1}+Zn$} является n-ой степенью какого-то числа, т.е. b-Zna=J^n; $b+Z^nn^{n-1}+Zn=\Psi^n$.

Действительно, (29) преобразуется к соотношению

$nZ^nn^{n-1}[b^{n-1}-(Zna)^{n-1}]+C_n^2(Z^nn^{n-1})^2[b^{n-2}-(Zna)^{n-2}]+\dots$
$+n(Z^nn^{n-1})^{n-1}(b-Zna)=(Zna)^n$. (45)

Сократив (45) на $(\mathrm{Zn})^{\mathrm{n}}$, убеждаемся, что число a^n делится на $b - Zna$. Представив числа $\{b^n; (b + Z^n n^{n-1})^n\}$ в виде $b^n = [(b - Zna) + Zna]^n$;

$(b + Z^n n^{n-1})^n = [(b - Zna) + (Zna + Z^n n^{n-1})]^n$ преобразуем (29) к соотношению

$$n(b - Zna)^{n-1} Z^n n^{n-1} + C_n^2 (b - Zna)^{n-2}[(Zna + Z^n n^{n-1})^2 - (Zna)^2] + \ldots + C_n^2 (b - Zna)^2 [(Zna + Z^n n^{n-1})^{n-2} - (Zna)^{n-2}] + n(b - Zna)[(Zna + Z^n n^{n-1})^{n-1} - (Zna)^{n-1}] = (Zna)^n. \qquad (46)$$

Проведем анализ соотношения (46) аналогично анализу соотношения (32). Именно, предположив, что число $b - Zna$ имеет делитель J_s^{qs}, где $q_s < n$, получаем, что число Zn должно иметь общий делитель с числом a. Это исключено. Следовательно, $b - Zna$ является n-ой степенью некоторого числа, т.е. $b\text{-}Zna = J^n$. Представив b^n в виде $b^n = [(b + Z^n n^{n-1}) - Z^n n^{n-1}]^n$, преобразуем (29) к соотношению

$$nZ^n n^{n-1}[(b + Z^n n^{n-1})^{n-1} - (Zna)^{n-1}] - C_n^2 (Z^n n^{n-1})^2 [(b + Z^n n^{n-1})^{n-2} + (Zna)^{n-2}] + \ldots + C_n^2 (Z^n n^{n-1})^{n-2}[(b + Z^n n^{n-1})^2 - (Zna)^2] - n(Z^n n^{n-1})^{n-1}[b + Z^n n^{n-1} + Zna] = (Zna)^n. \qquad (47)$$

Сократив (47) на $(\mathrm{Zn})^{\mathrm{n}}$, убеждаемся, что a^n делится на число $b + Z^n n^{n-1} + Zna$. Проведем анализ соотношения (47) аналогично анализу соотношения (33). Именно, предположив, что число $b + Z^n n^{n-1} + Zna$ имеет делитель Ψ_s^{qs}, где $q_s < n$, получаем, что число Zn должно иметь общий делитель с числом a. Это исключено. Следовательно, $b + Z^n n^{n-1} + Zna$ является n-ой степенью некоторого числа, т.е. $b + Z^n n^{n-1} + Zna = \Psi^n$.

Тогда (29) преобразуется к соотношению

$$[(\Psi^n + J^n + n^{n-1}Z^n)/2]^n = [(\Psi^n + J^n - n^{n-1}Z^n)/2]^n + [(\Psi^n - J^n + n^{n-1}Z^n)/2]^n. \qquad (48)$$

Анализ (48) сводится к анализу (39). Действительно, если в соотношении (48) параметр J обозначить через z, а Z обозначить через Q, то (48) сводится к (39). Согласно вышесказанному, (39) невыполнимо в целых числах, т.е. соотношения (48) и (29) также невыполнимы в целых числах.

Итак, доказана невыполнимость соотношений (13), (14). Поскольку из невыполнимости (13), (14) следует невыполнимость (6), то (6) также невыполнимо ни при каких натуральных значениях параметров,

если $n \geq 3$.

Обобщенный случай соотношений Ферма.

Вернемся к (5). Поскольку, согласно [5], $(b + p)^n\text{-}b^n = p[(b + p)^{n-1} + b(b + p)^{n-2} + \cdots + b^{n-2}(b + p) + b^{n-1}]$, то из $(b + p)^n\text{-}b^n = (p + k)^m$ следует $npb^{n-1} < (p + k)^m$.

Поскольку p+k<b, то при $m < n$ выполняется $(p + k)^m < npb^{n-1}$. Действительно,$(p + k)^m \leq (p + k)^{n-1} < b^{n-1} < npb^{n-1}$, т.е. неравенство $npb^{n-1} < (p + k)^m$ невыполнимо.

Следовательно, при $n \geq 3, m \geq 2, m < n$ соотношение (1) невыполнимо ни при каких натуральных значениях b,d,g.

Выражаем благодарность профессору Неймарку Ю. И. за поддержку и ценные замечания.

Литература

1. Моторов В.Б. Парадокс криптографии и свойства некоторых последовательностей. Межвузовский научный сборник «Новое в науке XXI века», Н. Новгород, 2004.
2. Моторова Э.А., Моторов В.Б. О некоторых способах определения делителей больших натуральных чисел.- Межвузовский научный сборник «Новое в науке XXI века», Выпуск 5, Н. Новгород, 2007.
3. Живетин В.Б. – Высшая математика, РГГУ, М.,2002.
4. Михелович Ш.Х. Теория чисел, -М, «Высшая школа», 1967.
5. Фихтенгольц Г.М., Основы математического анализа.- СПб., «Лань»,2004.