

# ОГЛЯД ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ СТОХАСТИЧНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

УДК 519.81

## БРЫНЗА Наталья Александровна

кандидат технических наук, преподаватель кафедры информатики и компьютерной техники,  
Харьковский национальный экономический университет, Харьков, Украина

**Научные интересы:** теория принятия решения, информационные технологии, системный анализ.

### ВСТУП

В даний час є велика бібліографія щодо проблем багатокритеріальної оптимізації та методів прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності, тобто в умовах ймовірнісної невизначеності з різними рівнями апіорної інформованості особа, що приймає рішення (ОПР) про значення статистичних параметрів що характеризують ситуацію прийняття рішення. Однак основні наукові теоретичні та прикладні результати отримані при сильно спрощуючих припущеннях: задачі багатокритеріальної оптимізації вирішуються в детермінованій постановці, тобто всі необхідні дані апіорно відомі і задані у вигляді точкових детермінованих значень; при вирішенні задач прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності передбачається, що апіорно задано скалярний критерій оцінювання ефективності рішень, однак проблеми багатокритеріальної оптимізації та прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності тісно пов'язані. Це обумовлено тим, що всі реальні прикладні оптимізаційні завдання є багатокритеріальними.

Метою рішення загальної задачі прийняття рішень є вибір з допустимої множини рішень  $X$  єдиного найбільш ефективного вирішення  $x^o \in X$ . У формальній постановці це означає, що необхідно вирішити задачу

$$x^o = \arg \operatorname{extr}_{x \in X} E(x) \quad (1)$$

де  $E(x)$  – узагальнений скалярний показник якості рішень.

При прийнятті рішень в умовах багатокритеріаль-

ності, коли ефективність рішення характеризується кортежем суперечливих різномірних часткових показників (критеріїв)  $\langle k_j(x) \rangle, j = \overline{1, m}$ , для яких не існує рішення  $x = \arg \operatorname{extr}_{x \in X} \langle k_j(x) \rangle, \forall j = \overline{1, m}$ , виникає додаткова задача обчислення узагальненої скалярної оцінки ефективності рішень, відомої як функція корисності  $P(x)$  [1]

$$P(x) = F \langle k_j(x) \rangle, j = \overline{1, m} \quad (2)$$

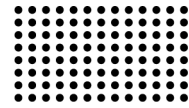
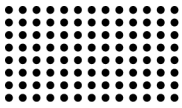
**Постановка задачі синтезу.** Моделі (2) обчислення можуть бути представлена у вигляді

$$P(x) = \sum_{j=1}^m a_j k_j(x), j = \overline{1, m} \quad (3)$$

де  $a_j, j = \overline{1, m}$  – кортеж параметрів моделі (відносна вага часткових характеристик);  $k_j(x), j = \overline{1, m}$  – розширений простір часткових характеристик якості рішення.

Багатофакторна оцінка ефективності рішення є не точкової детермінованою величиною, а інтервальною невизначеною оцінкою. Це обумовлено тим, що, поперше, коефіцієнти  $a_j$  незалежно від способу їх ідентифікації є інтервальними величинами, а по-друге, значення часткових критеріїв в загальному випадку, також мають інтервальний характер.

Будь-яка система є відкритою, тобто взаємодіє із зовнішнім середовищем, яка не контролюється локальною системою, а особа, що приймає рішення не во-



лодіє повною інформацією про її стан, тому всі або частина показників ефективності рішень  $k_j(x)$  є інтервально невизначеними.

Розглядається тільки стохастична інтервальна невизначеність, що означає, що інформація про інтервал і розподіл значень змінних усередині інтервалу сформульована в термінах теорії ймовірності.

У кінцевому рахунку, це означає, що рішення необхідно приймати за моделлю

$$x^o = \arg \operatorname{extr}_{x \in X} \sum_{j=1}^m \bar{a}_j \bar{k}_j(x) \quad (4)$$

де знаком « $\bar{\phantom{x}}$ » позначені випадкові величини.

У випадку статистичної невизначеності інтервал і характер розподілу значень на інтервалі задається функцією розподілу ймовірності та відповідними статистичними параметрами: математичним сподіванням, дисперсією тощо. Проте в багатьох випадках статистична оцінка не може бути отримана з причин відсутності представницької вибірки спостережень, її статистичної неоднорідності, або коли аналізована величина принципово не може бути інтерпретована як випадкова. У аналітика може бути відсутня як об'єктивна, так і суб'єктивна інформація про характер розподілу можливих значень на інтервалі.

Задача прийняття рішень в умовах стохастичної невизначеності (4), на відміну від детермінованої ситуації, коли ефективним є рішення, що екстремізує узагальнений показник якості, є двукритеріальною: рішення необхідно вибирати з урахуванням, як ефективності, так і ймовірності її реалізації. Задача полягає в синтезі моделі обчислення стохастичною оцінки ефективності рішень  $x \in X$ , тобто функції корисності

$$\bar{P}(x) = \sum_{j=1}^m a_j^H \bar{k}_j^H(x) \quad (5)$$

визначений за моделлю [3], де  $a_j^H$  – детерміновані безрозмірні значення вагових коефіцієнтів;  $\bar{k}_j^H(x)$  – безрозмірні випадкові величини, з однаковим інтервалом можливих значень  $[0,1]$ , тобто

нормалізовані різномірні часткові критерії.

При вирішенні поставленої задачі в даній статті прийняті наступні припущення:

1. Передбачається, що відомі об'єктивні чи суб'єктивні функції розподілу ймовірностей випадкових характеристик  $\bar{k}_j^H(x)$  рішень. При цьому розглядаються тільки два закони розподілу ймовірностей: нормальний (Гауса) і рівноможливий. Це обумовлено тим, що значення кожної характеристики  $\bar{k}_j^H(x)$ ,  $j = \overline{1, m}$  є результатом дії багатьох випадкових факторів, сума яких дає нормальний розподіл. Тому переважна більшість реальних стохастичних рядів коректно апроксимуються законом Гауса [2].

2. Випадкові величини  $\bar{k}_j^H(x)$ ,  $j = \overline{1, m}$  взаємно незалежні, тобто не корельовані.

3. Інтервал можливих значень  $[c_j, b_j]$  всіх випадкових величин  $\bar{k}_j^H(x)$ ,  $j = \overline{1, m}$  відомий. Аналіз [3] моделі (5), показує, що для обчислення  $\bar{P}(x)$  необхідно реалізувати операції множення випадкової величини на детермінований коефіцієнт і підсумовування отриманих результатів.

Існує велика кількість моделей прийняття рішень в умовах стохастичної невизначеності, які, з одного боку, орієнтовані на облік як об'єктивних особливостей ситуації прийняття рішень, таких як розмірність задачі, ступінь і форма невизначеності подання вихідної інформації тощо, так і суб'єктивних переваг ОПР, вимушеного тим чи іншим способом відшкодовувати відсутню об'єктивну інформацію.

Незважаючи на ці відмінності, можна сформулювати узагальнену постановку задачі прийняття рішень в умовах стохастичної невизначеності.

Будемо вважати, що множинну станів зовнішнього середовища  $Y$  задано явно, а стохастична невизначеність проявляється у випадковій реалізації станів  $y \in Y$ , що не залежать від вибору альтернатив  $x \in X$ . Стохастична невизначеність описується щільністю розподілу ймовірності  $p(y)$ .

Для наочності, але без втрати спільності, надалі будемо вважати, що множини  $X$  та  $Y$  є лічильними, тобто  $X = \{x_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $Y = \{y_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Тоді при виборі конкретного рішення  $x_i \in X$  і випадкової

реалізації одного з можливих станів зовнішнього середовища  $y_j \in Y, j = \overline{1, m}$ , ефективність рішення  $E(x, s)$  характеризується двома частковими критеріями: оцінкою очікуваного ефекту  $f(x_i, x_j)$  і ймовірністю його реалізації  $p(y_j), j = \overline{1, m}$  тобто

$$E(x_j) = \Phi[f(x_i, y_j), p(y_j)] \quad (6)$$

Комбінаторна множина значень вказаних часткових критеріїв утворює множинну можливих рішень. Мета задачі полягає в максимізації ефекту

$$x_1^o = \arg \max_{x_i \in X, p(y_j)} \Phi_1[f(x_i, y_j), p(y_j)] \quad (7)$$

Альтернативою оцінки ефективності прийнятого рішення можна використовувати «ризик»  $r(x_i, y_j)$ , який характеризує втрачений ефект. Ризик являє собою різницю між максимально можливим потенційним ефектом, який можна було б отримати в умовах повної визначеності про стан зовнішнього середовища, і дійсним ефектом:

$$r(x_i, y_i) = \max_i f(x_i, y_i) - f(x_i, y_i) \quad (8)$$

У цьому випадку метою задачі прийняття рішень полягає в мінімізації ризику, тобто

$$x_2^o = \arg \max_{x \in X} \Phi_2[r(x_i, y_j), p(y_j)] \quad (9)$$

Незалежно від виду оцінки (6) або (9) для конст-руктивного вирішення задачі прийняття рішення необхідно сформулювати узагальнений критерій вибору, що враховує два зазначених часткових критерії. Це суб'єктивна процедура, яка визначається ОПР.

ОПР вибирає кращу альтернативу в залежності від цільової установки, яку вона реалізовує в процесі виконання завдання. Результат розв'язання задачі ОПР визначає по одному з критеріїв прийняття рішень. Для того, щоб перейти до однозначного і по можливості найбільш вигідному варіанту вирішення, необхідно ввести оціночну (цільову) функцію. При цьому, кожній альтернативі ( $x_i$ ) ОПР приписує деякий імовірнісний

результат  $p(x_i)$ , який характеризує всі наслідки цього рішення. З масиву результатів прийняття рішень ОПР вибирає елемент  $P(x^*)$ , який найкращим чином відображає мотивацію його поведінки.

Критерій вибору точкового рішення. Критерій максимального математичного очікування [4] орієнтований на максимізацію математичного очікування ефекту або мінімізацію математичного очікування ризику і відповідно має для дискретного випадку вид

$$x_1^o = \arg \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m f(x_i, y_j) p(y_j) \quad (10)$$

$$x_2^o = \arg \min_{x \in X} \sum_{i=1}^m r(x_i, y_j) p(y_j) \quad (11)$$

В силу особливості математичного сподівання, яке є середнім значенням багаторазово повторюваного випадкової величини, рішення  $x_1^o$  і  $x_2^o$  є ефективними в середньому по безлічі багаторазового застосування в однорідних стохастичних умовах і не придатні для рішень, які приймаються і використовуються один раз. У цьому випадку ефект або ризик можуть прийняти будь-яке значення з інтервалу

$$[M(E) \pm 3\sigma(E)] \text{ або } [M(r) \pm 3\sigma(r)] \quad (12)$$

де  $\sigma = \sqrt{D}$  [2].

Критерій мінімальної дисперсії [4] орієнтований на вибір такого рішення з допустимої множини  $X$ , яке мінімізує величину інтервалів (12), знижує ризик отримання невисокого виграшу при реалізації конкретного одиничного рішення за рахунок його відхилення від математичного очікування. Оптимальними за цим критерієм приймаються рішення

$$x^o = \arg \min_{x \in X} \int_{y \in Y} [f(x, y) - M(x)]^2 p(y) dy \quad (13)$$

$$x^o = \arg \min_{x \in X} \sum_{j=1}^m [f(x_i, y_j) - M(x)]^2 p(y_j) \quad (14)$$

відповідно для безперервного і дискретного випадків.

Критерій компромісу між математичним очікуванням і дисперсією. Це адаптивний критерій, який дозволяє користувачеві реалізувати рішення, що визначає компроміс між очікуванням сприятливого стану зовнішнього середовища (оптимізмом) і острахом отримати великі втрати (ризик) за рахунок несприятливого стану  $Y_j$  (песимізмом). Критерій має вигляд

$$x^o = \arg \max_{x \in X} p[(1-k)M(x) - kD(x)] \quad (15)$$

де  $0 \leq k \leq 1$ ; а  $M(x)$  і  $D(x)$  визначаються відповідно формулами (10) та (14). При  $k = 0$  критерій має вигляд реалізується критерій максимуму математичного сподівання (10), а при  $k = 1$  – критерій мінімуму дисперсії (14). У всіх інших випадках реалізується компромісне рішення.

Критерій граничного рівня орієнтований на максимізацію ймовірності отримання деякого ефекту  $f^*$ , що лежить інтервалу

$$\min_{x \in X, y \in Y} f(x, y) \leq f^* \leq \max_{x \in X, y \in Y} f(x, y) \quad (16)$$

тобто вибір альтернативи за критерієм

$$x^o = \arg \min_{x \in X} P[f(x, y) \geq f^*] \quad (17)$$

при цьому значення  $f^*$  призначається евристично користувачем.

Критерій найбільш ймовірного результату забезпечує вибір такого рішення  $x \in X$ , яке забезпечує максимальний очікуваний ефект при найбільш імовірному стані зовнішнього середовища  $y^*$ .

$$y^* = \arg \max_j p(y_j) \quad (18)$$

Вибір рішення здійснюється за правилом

$$x^o = \arg \max_{x_i \in X} f(x_i, y^*) \quad (19)$$

Цей критерій не доцільне застосовувати, якщо зовнішнє середовище може приймати багато станів з невеликими ймовірностями, а також, якщо кілька станів мають рівні або близькі ймовірності реалізації.

Вибір конкретного виду критерію вибору точкового рішення з інтервалу можливих значень здійснюється ОПР і тому рішення завжди носять суб'єктивних характер.

### ВИСНОВКИ

У статті проведено огляд проблеми прийняття рішень в умовах стохастичної невизначеності, синтез моделі прийняття рішень в умовах стохастичної невизначеності. Розглянуто основні підходи до синтезу критеріїв вибору точкових рішень з інтервалу можливих значень, як двукритеріальний компромісу між ефективністю і можливим ризиком неодолення очікуваного ефекту.

На даний час не існує вичерпної єдиної нормативної методології вирішення задач багатокритеріальної оптимізації в умовах невизначеності, при цьому вид і форма подання невизначеності вихідних даних можуть бути різними. Створення методології, яка об'єднує моделі та інформаційні технології вирішення задач багатокритеріальної оптимізації та прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності відкриває перспективи розвитку теоретичних основ більш коректного та адекватного вирішення проблеми прийняття ефективних рішень.

### ЛІТЕРАТУРА:

1. Petrov E.G. Metodi I zasobi priynyattya rshen v sotsialno – ekonomichnih sistemah / E.G. Petrov, M.V. Novozhilova, I.V. Grebennik. – K.: Tehnika, 2004. – 256 s.
2. Venttsel E.S. Teoriya veroyatnostey / E.S. Venttsel. – M.: Nauka, 1969. – 668 s.
3. Petrov E.G. Determinizatsiya nechetkih parametrov modeli mnogokriterialnogo otsenivaniya / E.G. Petrov, O.A. Pisklakova, N.A. Brynza // Vestnik HGTU. – 2008. – #2(31). – S. 71-75.
4. Grebennik I.V. Metodi pidtrimki priynyattya rshen / I.V. Grebennik, T.E. Romanova, A.D. Tevyashev, G.M. Yaskov: Navch. posibnik. – Harkiv: HNURE, 2010.