АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ВЕКТОРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ПОЛНЫМ УЧЕТОМ ВЗАИМОКОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ КАЖДОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

УДК 519.216

АТАМАНЮК Игорь Петрович
к.т.н., доцент кафедры высшей и прикладной математики Николаевского национального аграрного университета.
Научные интересы: моделирование, распознавание и экстраполяция случайных последовательностей.
e-mail: atamanyuk_igor@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

Решение многих актуальных научно-технических задач связано с применением экстраполирующих алгоритмов и устройств, которые по известной т.е. доступной наблюдению части процесса позволяют сделать оценки неизвестной недоступной его части. В частности экстраполирующие алгоритмы используются в системах автоматического управления инерционными объектами и в системах с запаздыванием. Исключительно широкое распространение получил алгоритм линейного прогнозирования, используемый в вокодерах современных систем цифровой связи, в системах сжатия аудио- и видеосигналов [1]. Также широко применяются прогнозирующие алгоритмы на основе нейронных сетей, фильтры Калмана-Бьюси, метод группового учета аргументов и ряд других [2-7]. Однако, несмотря на указанное разнообразие, потребность в быстродействующих, робастных и максимально точных алгоритмах и устройствах прогноза продолжает быть актуальной в настоящее время и в перспективе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что векторная случайная последовательность $\{\overline{X}\}=\{X_1(i)...X_h(i)...X_H(i)\}$, в исследуемом ряде точек $t_i, i=\overline{1,I}$ полностью задана дискретизированными матричными функциями $M\left[X_h(i)\right],\ h=\overline{1,H},\ i=\overline{1,I};$ $M\left[X_\lambda(\nu)X_h(i)\right],\ \nu,i=\overline{1,I},\ \lambda,h=\overline{1,H}$. Необходимо сформировать информационную технологию прогнозирования будущих значений случайной последовательности $\{\overline{X}\}$ по известным значениям $x_h(i),\ i=\overline{1,k},\ k<I, h=\overline{1,H}$, которые получены в результате измерения исследуемой последовательности на интервале наблюдения $[t_1...t_k]$.

РЕШЕНИЕ

Наиболее универсальным с точки зрения ограничений накладываемых на прогнозируемую последовательность является алгоритм экстраполяции [8]:

$$m_h^{(r_1,\dots,r_k)}(i)=\begin{cases}M\left[X_h(i)\right],\ k=0,\ i=\overline{1,I},\\ m_h^{(r_1,\dots,r_k-1)}(i)+\left[x_{r_k}(k)-m_{r_k}^{(r_1,\dots,r_k-1)}(\mu)\right]\varphi_{hk}^{(r_k)}(i),\ h=\overline{1,H},\ i=\overline{k+1,I}.\end{cases} \quad (1)$$

В выражении (1) $r_\mu,\ \mu=\overline{1,k}$ - число наблюдаемых составляющих в сечении t_μ.

Параметрами алгоритма (1) являются элементы канонического разложения

$$X_h(i) = M\left[X_h(i)\right] + \sum_{\lambda=1}^{h}\sum_{\nu=1}^{i} V_\nu^{(\lambda)}\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i),\ h=\overline{1,H}, i=\overline{1,I}. \quad (2)$$

Соотношения для их определения имеют вид:

$$V_1^{(1)} = X_1(1) - M\left[X_1(i)\right],$$
$$V_i^{(h)} = X_h(i) - M\left[X_h(i)\right] - \sum_{\lambda=1}^{h}\sum_{\nu=1}^{i-1} V_\nu^{(\lambda)}\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i),\ h=\overline{1,H}, i=\overline{1,I}; \quad (3)$$

$$D_1^{(1)} = D_1(1),$$
$$D_i^{(h)} = D_h(i) - \sum_{\lambda=1}^{h}\sum_{\nu=1}^{i-1} D_\nu^{(\lambda)}\left[\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)\right]^2,\ h=\overline{1,H}, i=\overline{1,I}; \quad (4)$$

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{1}{D_\nu^{(\lambda)}} M\left[V_\nu^{(\lambda)}\left(X_h(i) - M\left[X_h(i)\right]\right)\right],$$
$$h=\overline{1,H},\ \lambda=\overline{1,h},\ \nu, i=\overline{1,I}. \quad (5)$$

Выражение (1) в рамках описанных в каноническом разложении (2) вероятностных линейных связей последовательности $\left\{\overline{X}\right\}$ позволяет получить оптимальный в среднеквадратическом смысле результат экстраполяции значений $x_h(i),\ i=\overline{k+1,I},\ h=\overline{1,H}$. Однако, в полном объеме свойства исследуемой последовательности $\left\{\overline{X}\right\}$ в разложении (2) учтены только для составляющей $\left\{X_H\right\}$ (для $\left\{X_h\right\},\ h<H$ в (2) не использованы взаимокорреляционные связи $\left\{X_h\right\}$ с $\left\{X_{h+j}\right\},\ j=\overline{1,H-h}$) и, таким образом, только для этой составляющей результат экстраполяции алгоритмом (1) можно считать строго оптимальным для имеющегося объема априорной информации об исследуемой векторной случайной последовательности. Для других составляющей характеристики точности оценки (1) могут быть улучшены за счет увеличения объема априорной информации, которая используется для прогноза.

С целью устранения данного недостатка положим в основу алгоритма экстраполяции каноническое разложение [9,10] последовательности $\left\{\overline{X}\right\}$ с полным учетом взаимокорреляционных связей для каждой составляющей

$$X_h(i) = M\left[X_h(i)\right] + \sum_{\nu=1}^{i-1}\sum_{\lambda=1}^{H} V_\nu^{(\lambda)}\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) + \sum_{\lambda=1}^{h} V_i^{(\lambda)}\varphi_{hi}^{(\lambda)}(i),\ i=\overline{1,I}. \quad (6)$$

Элементы разложения (6) определяются соотношениями:

$$V_\nu^{(\lambda)} = X_\lambda(\nu) - M\left[X_\lambda(\nu)\right] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{H} V_\mu^{(j)}\varphi_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} V_\nu^{(j)}\varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu),\ \nu=\overline{1,I}; \quad (7)$$

$$D_\lambda(\nu) = M\left[\left\{V_\nu^{(\lambda)}\right\}^2\right] = M\left[\left\{X_\lambda(\nu)\right\}^2\right] - M^2\left[X_\lambda(\nu)\right] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{H} D_j(\mu)\left\{\varphi_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\right\}^2 - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu)\left\{\varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\right\}^2,\ \nu=\overline{1,I}; \quad (8)$$

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{M\left[V_\nu^{(\lambda)}\left(X_h(i) - M[X_h(i)]\right)\right]}{M\left[\left\{V_\nu^{(\lambda)}\right\}^2\right]} = \frac{1}{D_\lambda(\nu)}(M\left[X_\lambda(\nu)X_h(i)\right] - M\left[X_\lambda(\nu)\right]\times$$
$$\times M\left[X_h(i)\right] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{H} D_j(\mu)\varphi_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\varphi_{h\mu}^{(j)}(i) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu)\varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\varphi_{h\nu}^{(j)}(i)),\ \lambda=\overline{1,h},\ \nu=\overline{1,i}. \quad (9)$$

Координатные функции $\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i),\ h,\lambda=\overline{1,H},\ \nu,i=\overline{1,I}$ характеризуются свойствами:

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \begin{cases} 1,\ h=\lambda \,\&\, \nu=i; \\ 0,\ i<\nu. \end{cases} \quad (10)$$

Блок-схема алгоритма вычисления параметров канонического разложения (6) представлена на Рис. 1.

Пусть в момент $\mu=1$ известно значение $X_1(1)=x_1(1)$ первой составляющей $\left\{X_1\right\}$ последовательности $\left\{\overline{X}\right\}$ и, таким образом, известно значение случайного коэффициента $V_1^{(1)}=v_1^{(1)}:\ v_1^{(1)}=x_1(1)-M\left[X_1(1)\right]$. Подстановка $v_1^{(1)}$ в (6) дает

$$X_h^{(1,1)}(i) = M\left[X_h(i)\right] + \left(x_1(1) - M\left[X_1(1)\right]\right)\varphi_{h1}^{(1)}(i) + \sum_{\lambda=2}^{H} V_1^{(\lambda)}\varphi_{h1}^{(\lambda)}(i) \sum_{\nu=2}^{i-1}\sum_{\lambda=1}^{H} V_\nu^{(\lambda)}\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) + \sum_{\lambda=1}^{h} V_i^{(\lambda)}\varphi_{hi}^{(\lambda)}(i),\ i=\overline{1,I}. \quad (11)$$

$X_h^{(1,1)}(i) = X_h\left(i / x_1(1)\right)$ - апостериорная случайная последовательность, в которой $\{X_1\}$ проходит в момент $\mu = 1$ через координату $x_1(1)$.

Применение операции математического ожидания к (11) позволяет получить оценку будущего значения последовательности $\{\overline{X}\}$ при условии, что известно значение составляющей $\{X_1\}$ в первом сечении:

$$m_h^{(1,1)}(i) = M\left[X_h(i)\right] + \left(x_1(1) - M\left[X_1(1)\right]\right)\varphi_{h1}^{(1)}(i). \quad (12)$$

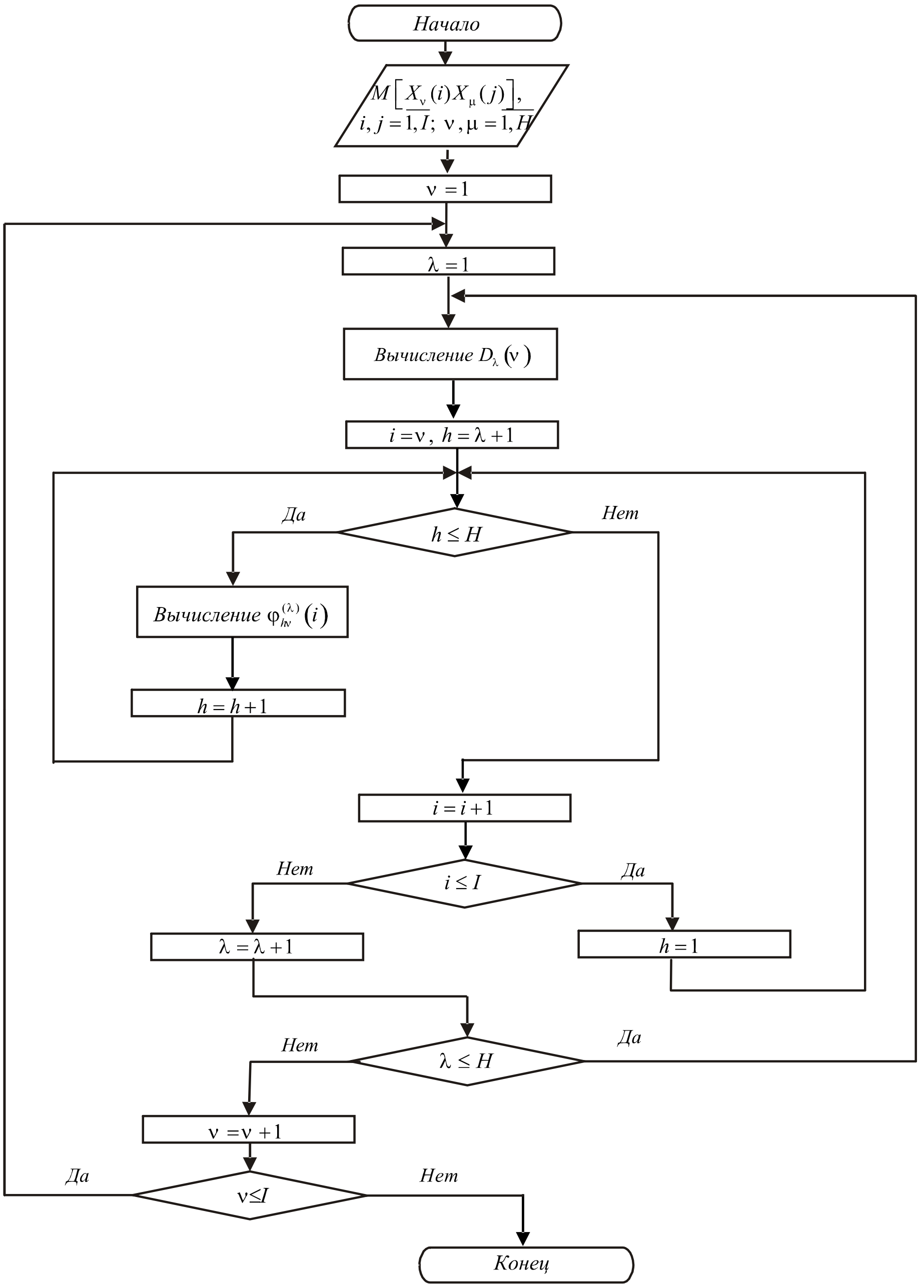

Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма вычисления параметров канонического разложения (6)

Введем в рассмотрение значение $x_2(1)$ той же реализации. Для него является справедливым разложение (11), что позволяет конкретизировать значение коэффициента $V_2^{(1)} = v_2^{(1)}$. С учетом (12) выражение для $v_2^{(1)}$ запишется в виде:

$$v_2^{(1)} = x_2(1) - m_2^{(1,1)}(1). \qquad (13)$$

Откуда

$$m_h^{(1,2)}(i) = m_h^{(1,1)}(i) + \left[x_2(1) - m_2^{(1,1)}(i)\right]\varphi_{h1}^{(2)}(i). \qquad (14)$$

При дальнейшем увеличении объема апостериорной информации, которая используется для прогноза, обобщение полученной закономерности дает алгоритм экстраполяции для произвольного числа моментов измерения

$$m_h^{(\mu,l)}(i) = \begin{cases} M\left[X_h(i)\right],\ \mu = 0; \\ m_h^{(\mu,l-1)}(i) + \left[x_l(\mu) - m_l^{(\mu,l-1)}(\mu)\right]\varphi_{h\mu}^{(l)}(i),\ l \neq 1,\ \mu = \overline{1,k},\ i = \overline{k+1,I}; \\ m_h^{(\mu,H)}(i) + \left[x_1(\mu) - m_1^{(\mu-1,H)}(\mu)\right]\varphi_{h\mu}^{(1)}(i),\ l = 1,\ \mu = \overline{1,k},\ i = \overline{k+1,I}. \end{cases} \qquad (15)$$

где $m_h^{(\mu,l)}(i) = M\left[X_h(i) / x_\lambda(\nu), \lambda = \overline{1,H}, \nu = \overline{1,\mu-1}; x_j(\mu), j = 1,l\right],\ h = \overline{1,H},\ i = \overline{k,I}$ – оптимальная по критерию минимума среднего квадрата погрешности прогноза оценка будущих значений исследуемой последовательности при условии, что известны значения $x_\lambda(\nu),\ \lambda = \overline{1,H},\ \nu = \overline{1,\mu-1};\ x_j(\mu),\ j = \overline{1,l}$.

Первое выражение алгоритма (15) отвечает случаю, когда апостериорная информация отсутствует, во втором соотношении последовательно рекуррентным образом учитываются известные значения составляющих векторной случайной последовательности для фиксированного момента времени и в третьем выражении осуществляется переход к следующему моменту времени для дальнейшего накопления информации, которая используется для прогноза.

Средний квадрат погрешности экстраполяции алгоритмом (15) определяется выражением

$$E_h^{(\mu,l)}(i) = D_{X_h}(i) - \sum_{\nu=1}^{\mu}\sum_{\lambda=1}^{H} D_\lambda(\nu)\left\{\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)\right\}^2,\ i = \overline{k+1,I}. \qquad (16)$$

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе получен алгоритм прогнозирования (15) векторной случайной последовательности $\{\overline{X}\}$, который, так же как и каноническое разложение (6), положенное в его основу, полностью учитывает для каждой составляющей $\{X_h\}$ всю известную информацию об исследуемой последовательности $\{\overline{X}\}$, что обеспечивает абсолютный минимум среднего квадрата погрешности линейного прогноза для произвольной составляющей $\{X_h\},\ h = \overline{1,H}$. Также получено выражение для среднего квадрата погрешности экстраполяции, которое позволяет оценить качество решения задачи прогноза для произвольного количества измерений и числа составляющих исследуемой векторной случайной последовательности.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Oppengejm Je. /Primenenie cifrovoj obrabotki signalov. – M.: Mir, 1980. – 550 s.
2. Kolmogorov A.N. Interpolirovanie i jekstrapolirovanie stacionarnyh sluchajnyh posledovatel'nostej //Izvestija AN SSSR. Ser. Mat. – 1941. – №5 – S.3-14.
3. Wiener N. The interpolation, extrapolation and smoothing of stationary time series. – N.Y.: J. Wiley, 1949. – 169 p.
4. Kalman R.E. and Busi R.S. A new results in leaner filtering and prediction theory //Trans. ASME, J.Basic End., 1961. – P.95-108.
5. Ivahneko A.G. Nachala induktivnoj teorii nechetnogo raspoznavanija i prognozirovanija sluchajnyh processov i sobytij. – K.: In-t kiberne6tiki AN Ukrainy, 1991. – 48 s.
6. Ivahneko A.G. Dolgosrochnoe prognozirovanie i upravlenie slozhnymi sistemami. – K.: Tehnika, 1975. – 312 s.
7. Boks Dzh., Dzhenkins G. Analiz vremennyh rjadov, prognoz i upravlenie. Vyp. 1:Per.s ang. /Pod red. V.F. Pisarenko. – M.: Mir, 1974. – 406 s.
8. Kudrickij V.D. Fil'tracija, jekstrapoljacija i raspoznavanie realizacij sluchajnyh funkcij. – K.: FADA, LTD, 2001. – 176 s.
9. Atamanjuk I.P. Algoritm opredelenija optimal'nyh parametrov polinomial'nogo fil'tra-jekstrapoljatora Vinera dlja nestacionarnyh sluchajnyh processov, nabljudaemyh s pogreshnostjami. //Kibernetika i sistemnyj analiz. – 2011. – №2. – S.154-159.
10. Atamanjuk I.P. Algoritm optimal'noj nelinejnoj jekstrapoljacii realizacii sluchajnogo processa s fil'traciej pogreshnostej izmerenij /I.P. Atamanjuk, Ju.P. Kondratenko //Jelektronnoe modelirovanie. – 2012. – T.34, №4 – C.23-40.

Рецензент: *д.т.н., проф. Дубовенко К.В., Николаевский национальный аграрный университет, Николаев.*