МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА С ДИСКРЕТНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ НА ГРАНИЦЕ

УДК 519.3

ЛИТВИНЕНКО Елена Ивановна

к.т.н., доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

Научные интересы: математическое моделирование и информационные технологии в естественных и технических науках, методы и модели восстановления функций, принцип барицентрического усреднения.

АСТИОНЕНКО Игорь Александрович

к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

Научные интересы: теоретические основы серендиповых аппроксимаций.

e-mail: astia@ukr.net

ХОМЧЕНКО Анатолий Никифорович

д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной и высшей математики Черноморского государственного университета им. П.Могилы.

Научные интересы: теоретические основы серендиповых аппроксимаций, методы и модели восстановления функций, принцип барицентрического усреднения.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Трехточечная граничная задача Дирихле в треугольнике (симплексе), как известно, имеет точное решение в терминах барицентрических координат (полный многочлен первой степени). Ниже рассматривается треугольный комплекс в случае, когда для определения полного многочлена уже недостаточно узлов на границе и требуется внутренний узел, который в граничной задаче неуместен. При исключении внутреннего узла важно сохранить не только полноту многочлена, но и обеспечить физическую адекватность поля и точность аппроксимации. Известная схема Сьярле-Равьяра исключения внутреннего узла в треугольнике (конденсация) приводит к нарушению физической адекватности спектра узловых нагрузок (эффект гравитационного «отталкивания»). Интересно исследовать чувствительность температурного поля треугольника относительно схемы конденсации соответствующего правила усреднения граничных температур.

АНАЛИЗ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ПУБЛИКАЦИЙ

Симплексные модели [1, 2], связанные с использованием линейных интерполяционных функций в конечном элементе, одним из первых стали применяться в работах Тэрнера, Клафа, Мартина и Топпа (1956), Синга (1957), Галлагера, Пэдлога и Бейларда (1962).

Комплексные модели на основе интерполяционных многочленов высших порядков [1] использовали Вёбеке (1965), Аргирис (1965), Фелиппа (1966), Зенкевич и Ченг (1967) и другие.

Здесь рассматривается треугольник с 10-ю узлами (9 на границе и 1 в центре тяжести). Это элемент третьего порядка [3]. Внутренний узел в принципе можно исключить по схеме Сьярле-Равьяра [2] так, чтобы температура в произвольной точке треугольника выражалась через 9 граничных значений температуры. В статье предложены альтернативные схемы конденсации.

Цель статьи – сформулировать и решить задачу аппроксимации температурного поля в треугольной области с дискретными условиями Дирихле на границе. Исследовать чувствительность поля относительно вариации внутренней моды.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Чтобы изложить ключевые идеи метода барицентрического усреднения (МБУ) граничных потенциалов, начнем с простого треугольника (симплекса). На рис. 1 показан треугольник $P_1P_2P_3$ с координатами вершин соответственно (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

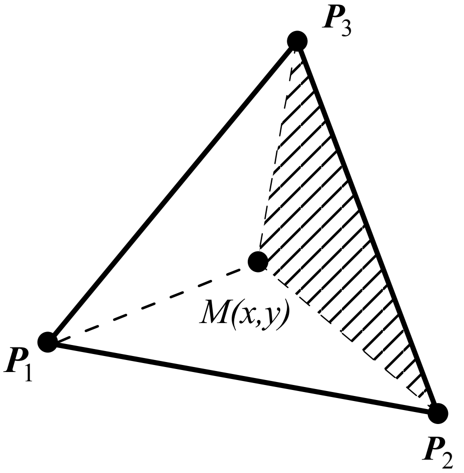

Рисунок 1 – Двумерный симплекс

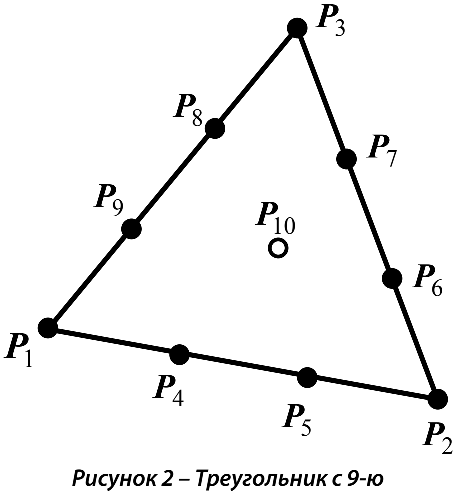

Рисунок 2 – Треугольник с 9-ю термоэлементами на границе

Предполагается, что в вершинах P_1, P_2, P_3 помещены термоэлементы, поддерживающие постоянные температуры T_i $(i = 1,2,3)$. Температура в любой точке $M(x, y)$ треугольника определяется через граничные температуры T_i с помощью интерполяционного полинома

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \sum_{i=1}^{3} L_i(x, y) T_i, \qquad (1)$$

где T_i – известные значения температуры в вершинах; $L_i(x, y)$- локальные координаты площади (барицентрические координаты симплекса).

Барицентрическая координата $L_i(x, y)$ – это относительная площадь треугольника, противолежащего узлу i. Например (рис. 1),

$$L_1(x, y) = \frac{S_{\Delta M P_2 P_3}}{S_{\Delta P_1 P_2 P_3}}, \qquad (2)$$

где $S_{\Delta M P_2 P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$, $S_{\Delta P_1 P_2 P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$.

Нетрудно установить, что $0 \le L_i(x, y) \le 1$, $L_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \ne k; \end{cases}$, $1 \le i, k \le 3$, $\sum_{i=1}^{3} L_i(x, y) = 1$.

Как видим, барицентрические координаты обладают всеми свойствами вероятностей. А решение 3-точечной граничной задачи (1) строится как среднее значение (математическое ожидание).

Решение (1) в барицентрических координатах в точности удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям Дирихле. Привлекательное свойство треугольника в том, что с увеличением количества узлов на треугольнике все базисные функции выражаются через барицентрические координаты $L_i(x, y)$.

Теперь рассмотрим случай, когда на границе треугольника регулярно расположены 9 термоэлементов: в вершинах P_1, P_2, P_3 и в точках трисекции сторон $P_1, \ldots, P_9$ (рис. 2). Задача состоит в построении полинома типа (1), выражающего температуру в любой точке треугольника через 9 граничных значений температуры. Для построения полного многочлена третьей степени требуется 10-й узел, который удобно выбрать в центре тяжести треугольника. Исходная система базисных функций такова [4]:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2} L_1 (3L_1 - 1)(3L_2 - 2),$$

$$N_4(x, y) = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1).$$

Из $N_1(x,y)$ легко получить $N_2(x,y)$ и $N_3(x,y)$, а из $N_4(x,y)$ получаются остальные функции в промежуточных узлах на границе. Наконец, $N_{10}(x,y) = 27L_1L_2L_3$. Теперь $N_{10}(x,y)$ необходимо распределить между граничными узлами. Так осуществляется преобразование (редукция) треугольника лагранжева типа в треугольник серендипова типа. Исключить внутренний параметр можно по формуле [2]:

$$\overline{N}_i(x,y) = N_i(x,y) + \alpha_i N_{10}(x,y),\ (i=\overline{1,9}). \tag{3}$$

В 1972 г. [2] Сьярле и Равьяр предложили следующий «рецепт» редукции:

$$\alpha_i = \begin{cases} -1/6, & (i=1,2,3); \\ 1/4, & (i=4,\dots,9). \end{cases} \tag{4}$$

При этом нарушается физическая адекватность спектра узловых нагрузок. Есть опасения, что правило (4) способно исказить и температурное поле треугольника. Поэтому поиски других «рецептов» продолжаются. Например, физическую адекватность спектра узловых нагрузок обеспечивает равномерное распределение $N_{10}(x,y)$, т.е. при

$$\alpha_i = \frac{1}{9}\ (i=\overline{1,9}). \tag{5}$$

Еще один подходящий «рецепт»

$$\alpha_i = \begin{cases} -1/18, & (i=1,2,3); \\ 5/36, & (i=4,\dots,9). \end{cases} \tag{6}$$

Окончательно решение граничной задачи принимает вид:

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{9} \overline{N_i}(x,y)\, T_i. \tag{7}$$

Чтобы протестировать правила (4), (5) и (6), конкретизируем граничные температуры T_i. Пусть, к примеру, $T_i = (10i)^\circ$, где i – номер узла на границе ($i=\overline{1,9}$). В качестве контрольной точки возьмем центр тяжести треугольника. Сразу напрашивается простое решение – арифметическое среднее: $T_c = 50^\circ$. Этот результат ассоциируется с правилом (5). Анализируя форму области, можно предположить, что эта температура занижена, хотя для итерационной процедуры это хорошее нулевое приближение. Правило Сьярле-Равьяра существенно завышает температуру: $T_c = 87{,}5^\circ$. Лучший результат дает правило (6): $T_c = 57{,}5^\circ$.

Тестирование показывает, что схема Сьярле-Равьяра не может участвовать в «споре моделей» (по меткому выражению Е.С. Вентцель). Что же касается моделей (5) и (6), необходимы компьютерные эксперименты с блуждающими частицами на границе. Информация из «первых рук» помогает сделать правильный выбор.

Результаты компьютерного моделирования таковы. Из 2400 частиц, стартовавших из центра треугольника, в среднем 136 частиц закончили блуждания в вершине треугольника, промежуточный узел в среднем поглощает 332 частицы.

При этом расчетная формула обретает вид:

$$T_c^\circ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{9} n_i\ T_i^\circ,\ \text{где}\ n = 2400,$$

$$n_i = \begin{cases} 136, & (i=1,2,3); \\ 332, & (i=4,\dots,9). \end{cases}$$

Эмпирическая температура в центре треугольника $T_c = 57{,}5^\circ$. Теоретическая температура в любой внутренней точке треугольника определяется по формуле (7) с коэффициентами редукции (6).

ВЫВОДЫ

Как и следовало ожидать, температурное поле треугольника третьего порядка оказалось весьма чувствительным относительно вариации внутренней моды. Если модифицированные функции $\overline{N}_i(x,y)$ подобрать правильно, то формула (7) реализует несеточную одношаговую 9-маршрутную схему случайных блужданий на треугольнике. Интересно получить подобные результаты на треугольнике 4-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Oden Dzh. Konechnye jelementy v nelinejnoj mehanike sploshnyh sred /Dzh. Oden. – M.: Mir, 1976. – 464 s.
2. Mitchell Je. Metod konechnyh jelementov dlja uravnenij s chastnymi proizvodnymi /Je. Mitchell, R. Ujejt. – M.: Mir, 1981. – 216 s.
3. Homchenko A.N. Geometricheskoe modelirovanie na diskretnyh jelementah /A.N. Homchenko, G.Ja. Tuluchenko. – Herson: OLDI-pljus, 2007. – 270 s.
4. Konnor Dzh. Metod konechnyh jelementov v mehanike zhidkosti /Dzh. Konnor, K. Brebbia. – L.: Sudostroenie, 1979. – 264 s.

Рецензент: *д.т.н., проф. Крючковский В.В., Херсонский национальный технический университет, Херсон.*