

# БАГАТОПАРАМЕТРИЧНІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ПОЛІНОМИ СЕРЕНДИПОВОГО ЕЛЕМЕНТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

УДК 514.18

**АСТІОНЕНКО Ігор Олександрович**

к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики й математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

**Наукові інтереси:** теоретичні основи серендипових апроксимацій.

**e-mail:** [astia@ukr.net](mailto:astia@ukr.net)

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В більшості систем комп'ютерного моделювання, які реалізують метод скінченних елементів (МСЕ), для отримання бажаної точності розв'язків пропонується збільшувати кількість елементів, на які розбивається досліджувана область. Це призводить до значного зростання розмірів задачі та об'єму обчислень. Альтернативою такого підходу є використання скінченних елементів (СЕ) високих порядків. В МСЕ уже більше 40 років використовуються елементи серендипової сім'ї. Їхня популярність викликана значною перевагою над лагранжевими СЕ – відсутність вузлів всередині елемента, які збільшують об'єм обчислень і є зайвими при ансамблюванні скінченних елементів. Однак із збільшенням порядку серендипового скінченного елемента (ССЕ) виникають достатньо складні проблеми при побудові функцій форми стандартними методами, особливо в ССЕ четвертого порядку (ССЕ-16). До того ж, починаючи з елементів другого порядку, стандартні базиси мають недоліки, яких, за думкою О. Зенкевича [1], неможливо позбутися. Це наявність від'ємних значень у повузловому розподілі рівномірної масової сили, а також кратні нулі у вузлах елементів. Усунення цих недоліків є загальною проблемою.

## АНАЛІЗ ОСНОВНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

В класичних монографіях по методу скінченних елементів [1, 2] елемент четвертого порядку тільки

ледь згадується, або ж взагалі не згадується. Мабуть тому, що достатньо складно отримати функції форми для ССЕ-16 традиційними матричними методами. У 80-х роках минулого століття був запропонований метод ймовірнісно-геометричного моделювання [3, 4], який дозволив отримати серію альтернативних базисів на ССЕ-16 [5]. Однак більшість цих базисів мали названий вище стандартний недолік – від'ємні значення в повузловому розподілі рівномірної масової сили. Запропонований у 2007 році комбінований алгебро-геометричний метод [6] дозволив побудувати базис для ССЕ-16 з природним повузловим розподілом [7].

## ЦІЛІ СТАТТІ

Мета статті – на прикладі серендипового елемента четвертого порядку за допомогою алгебро-геометричного методу побудувати багатопараметричні інтерполяційні поліноми з регульованою кількістю параметрів, що дозволяє керувати інтерполяційними якістьми та обчислювальними властивостями моделей.

## ОСНОВНА ЧАСТИНА

Серендипів скінченний елемент четвертого порядку в локальній системі координат – це квадрат розміром  $2 \times 2$  ( $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$ ), на границі якого регулярно розташовані 16 вузлів (рис. 1) та система відповідних функцій форми. Стандартний 16-параметричний інтерполяційний поліном цього елемента має вигляд:

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) = & \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \\ & + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \\ & + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^4 + \alpha_{12}\xi^3\eta + \\ & + \alpha_{13}\xi\eta^3 + \alpha_{14}\eta^4 + \alpha_{15}\xi^4\eta + \alpha_{16}\xi\eta^4. \end{aligned} \quad (1)$$

В альтернативних поліномах кількість параметрів збільшується порівняно зі стандартним за рахунок так званих "позавузлових" (або "прихованих") параметрів. Це забезпечується появою доданків більш високих степенів і дозволяє суттєво змінювати властивості інтерполяційного полінома. Назвемо такі інтерполяційні поліноми "багатопараметричними".

В загальному випадку апроксимуючий поліном CSE-16 має вигляд:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{16} N_i U_i \quad (1)$$

де  $N_i$  – функція форми, що відповідає вузлу  $i$  на СЕ ( $i = \overline{1, 16}$ ),  $U_i$  – вузлове значення шуканої функції у вузлі  $i$ .

Шукані функції форми  $N_i$  повинні мати наступні властивості (умови типу Лагранжа):

$$N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}, \quad (2)$$

де  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера,  $i$  – номер функції,  $k$  – номер вузла;

а також повинна виконуватись умова вагового балансу:

$$\sum_{i=1}^{16} N_i(\xi, \eta) = 1$$

Крім того, функції форми  $N_i(\xi, \eta)$  забезпечують неперервність на границі: якщо вузол  $i$  належить конкретній стороні квадрата, то функція  $N_i(\xi, \eta)$  вздовж цієї сторони змінюється за законом параболи четвертого порядку.

Вузлова доля навантаження при повузловому розподілі рівномірної масової сили визначається подвійним інтегралом по області  $\omega$  скінченного елемента від відповідної функції форми, зваженої з поверхневою щільністю  $\gamma$ :

$$p_i = \iint_{\omega} \gamma N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad i = \overline{1, 16}.$$

Для однорідної пластинки  $\gamma = 0,25$ .

При розв'язуванні оберненої задачі можемо з самого початку визначитись, у якому вигляді будуть задані функції форми  $N_i(\xi, \eta)$ . Для функцій форми різної алгебраїчної структури були отримані інтерполяційні поліноми з 17-19-ма параметрами [8] та з 21-22-ма параметрами [9].

Спробуємо отримати інтерполяційний поліном з 24-ма параметрами. Для цього, використовуючи умову, що вздовж сторони квадрата функції повинні змінюватись за законом параболи четвертого порядку, запишемо  $N_1(\xi, \eta)$ ,  $N_2(\xi, \eta)$  та  $N_3(\xi, \eta)$  у вигляді:

$$N_1(\xi, \eta) = k_1(1-\xi)(1-\eta)(A\xi\eta + B\xi + C\eta + 1) (D\xi\eta + E\xi + F\eta + 1)(F\xi + G\eta + 1); \quad (3)$$

$$N_2(\xi, \eta) = k_2(1-\xi^2)(1-\eta) (L\xi^2 + M\xi^2\eta + V\xi + S\eta + 1); \quad (4)$$

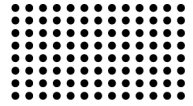
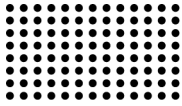
$$N_3(\xi, \eta) = k_3(1-\xi^2)(1-\eta)(W\xi^2 + Q\eta + 1). \quad (5)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів складемо систему алгебраїчних рівнянь, використовуючи гіпотезу Лагранжа (2) та інші властивості базисних функцій ( $k$  – номер вузла):

$$\left\{ \begin{aligned} & N_1(\xi_k, \eta_k) = 1, \quad k = 1; \\ & N_1(\xi_k, \eta_k) = 0, \quad k = 2, 3, 4, 14, 15, 16; \\ & \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_1(\xi_k, \eta_k) d\xi d\eta = p_1; \\ & N_2(\xi_k, \eta_k) = 1, \quad k = 2; \\ & N_2(\xi_k, \eta_k) = 0, \quad k = 3, 4; \\ & \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_2(\xi_k, \eta_k) d\xi d\eta = p_2; \\ & N_3(\xi_k, \eta_k) = 1, \quad k = 3; \\ & N_3(\xi_k, \eta_k) = 0, \quad k = 2, 4; \\ & \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_3(\xi_k, \eta_k) d\xi d\eta = p_3; \\ & 4p_1 + 8p_2 + 4p_3 = 1; \\ & 4k_1 + 8k_2 + 4k_3 = 1 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Приврівнюючи в системі (6) подвійні інтеграли до змінних  $p_i$ , ми отримуємо функції форми у вигляді виразів, які залежать від цих змінних, тобто розв'язуємо обернену задачу з параметром.

Після розв'язання системи (6) отримуємо нескінченну множину базисів з 24-ма параметрами, в яких до



поліному (1) додаються мономи вищих порядків і поліном набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) = & \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \\ & + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \\ & + \alpha_{11}\xi^4 + \alpha_{12}\xi^3\eta + \alpha_{13}\xi\eta^3 + \alpha_{14}\eta^4 + \\ & + \alpha_{15}\xi^4\eta + \alpha_{16}\xi\eta^4 + \alpha_{17}\xi^2\eta^2 + \alpha_{18}\xi^3\eta^2 + \\ & + \alpha_{19}\xi^2\eta^3 + \alpha_{20}\xi^4\eta^2 + \alpha_{21}\xi^3\eta^3 + \\ & + \alpha_{22}\xi^2\eta^4 + \alpha_{23}\xi^4\eta^3 + \alpha_{24}\xi^3\eta^4. \end{aligned} \quad (7)$$

Один з розв'язків системи (6) може бути записаний як функція змінної  $p_1$ :

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{528}(1-\xi)(1-\eta) \quad (8)$$

$$((540p_1 + 55)\xi\eta + (540p_1 + 11)(\xi + \eta) + 540p_1 - 11) \times$$

$$\times (-\xi\eta + 3\xi + 3\eta + 1)(\xi + \eta + 1);$$

$$N_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{1056}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad (9)$$

$$(10(324p_1 - 99)\xi^2 + (3240p_1 + 418)\xi^2\eta + 704\xi + (540p_1 + 121)(\eta + 1));$$

$$N_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)(4\xi^2 - 1). \quad (10)$$

Типові лінії нульового рівня для функції  $N_1(\xi, \eta)$  цього базису зображено на рис. 2-6.

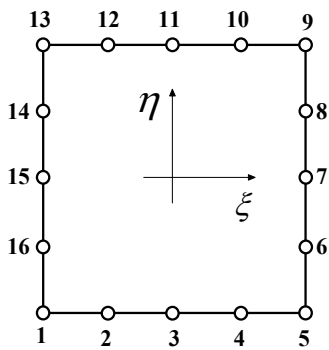


Рисунок 1 – ССЕ-16  
 $|\xi| \leq 1; |\eta| \leq 1.$

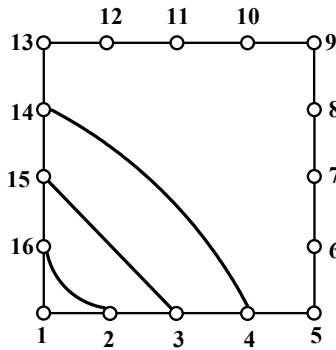


Рисунок 2  
 $p_1 \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{55}{540}\right)$

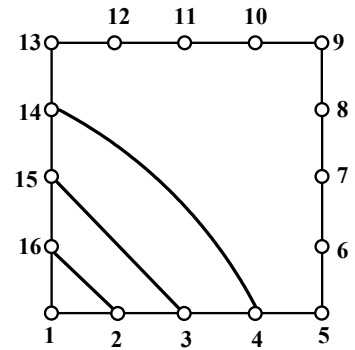


Рисунок 3  
 $p_1 = \frac{55}{540}$

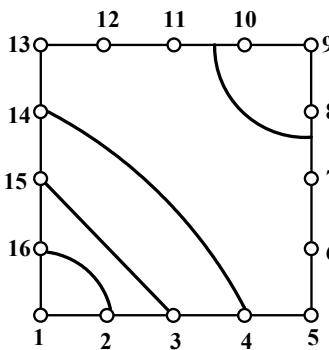


Рисунок 4  
 $p_1 \in \left(-\frac{55}{540}; \frac{11}{180}\right)$

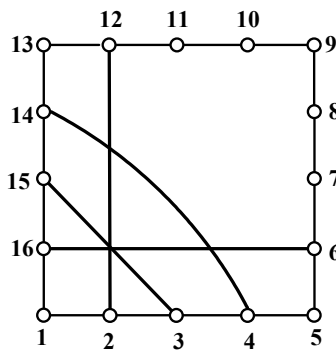


Рисунок 5  
 $p_1 = \frac{11}{180}$

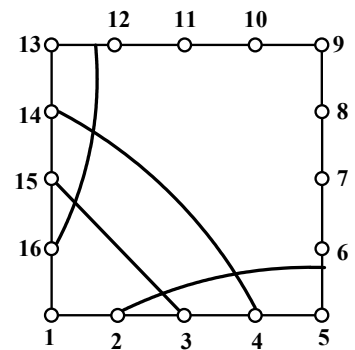


Рисунок 6  
 $p_1 \in \left(\frac{11}{180}; \frac{1}{2}\right)$

Наявність у функціях форми (8)-(9) змінного параметра  $p_1$  дозволяє керувати інтерполяційними якостями та обчислювальними властивостями моделей. В загальному випадку інтерполяційний поліном (7) має 24 параметри. Однак при  $p_1 = -\frac{121}{900}$  зникає доданок  $\alpha_{21}\xi^3\eta^3$  – залишається 23 параметри, при  $p_1 = -\frac{209}{1620}$  зникають  $\alpha_{20}\xi^4\eta^2$  та  $\alpha_{22}\xi^2\eta^4$  – залишається 22 параметри. Доданки найвищого степеня  $\alpha_{23}\xi^4\eta^3$  та  $\alpha_{24}\xi^3\eta^4$  зникають при  $p_1 = -\frac{22}{81}$ , також залишається 22 параметри.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике /О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов /Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
3. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ /А.Н. Хомченко //Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1982. – 5 с. – Деп. в ВИНТИ 21.10.1982, №5264.
4. Камаева Л.И. О моделировании конечных элементов серендипова семейства /Л.И. Камаева, А.Н. Хомченко //Прикл. проблемы прочности и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб. – 1985. – Вып.31. – С.14-17.
5. Манойленко О.С. Геометричне моделювання у методах дискретних елементів: Дис...канд. техн. наук: 05.01.01 /Манойленко Олена Семенівна. – Херсон, 2002. – 175 с.
6. Хомченко А.Н. Обратные задачи об интегральных средних для серендиповых полиномов /А.Н. Хомченко, И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко //Вестник Херсонского национ. техн. университета. 2007. – Вып.2 (28). – С.383-389.
7. Астионенко И.А. Управляемые серендиповы поверхности, сохраняющие межэлементную непрерывность. /И.А. Астионенко, Н.А. Козуб, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко //Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. – 2008. – С.8-11.
8. Хомченко А.Н. Геометрия серендиповых полиномов: обратные задачи. /А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, И.А. Астионенко //Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-техн. збірник. – 2009. – Вип.82. – С.58-63.
9. Астіоненко І.О. Неоднозначність серендипових моделей у задачах наближення функцій двох аргументів /І.О. Астіоненко //Вісник Запорізького нац. ун-ту: 36. наук. статей. Фіз.-мат. науки. – 2010. – №1. – С.25-29.

#### ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Новий підхід до моделювання серендипових апроксимацій на елементі четвертого порядку за допомогою комбінованого алгебро-геометричного метода дозволяє побудувати нескінченну множину базисів з керованою кількістю параметрів інтерполяційного полінома. Саме приховані параметри дозволяють розв'язати задачу оптимізації інтерполяційних якостей серендипових моделей вищих порядків.

Перспективним виглядає дослідження альтернативних функцій форми для просторових елементів.