



**FUERZA
PUNTUAL
A LA ALTURA
ARBITRARIA**

**1. Formulación del problema y
solución formal**

Utilizaremos la notación de [1], [2], [3]. En [3] hemos considerado el caso de una carga puntual horizontal de magnitud F en el tope $x=H$. En el presente trabajo generalizados al caso donde la fuerza F actúa a una altura arbitraria $x_0, 0 < x_0 < H$. Nuestro problema es ahora la resolución de la ecuación diferencial de Murashev-Sigalov-Bayrov

$$\left. \begin{aligned} u^{(4)}(\xi) - \lambda^2 u''(\xi) &= g(\xi); 0 \leq \xi \leq 1 \\ g(\xi) &= H^3 F \delta(\xi - \xi_0) + \frac{\lambda^2 H^2 \mu}{1 + \mu} \tilde{M}(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Donde

$$\tilde{M}(\xi) = \begin{cases} HF(\xi - \xi_0); 0 \leq \xi < \xi_0, & \xi_0 = \frac{x_0}{H} \\ 0; \xi_0 < \xi \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

con las condiciones de borde

$$u(0) = u'(0) = 0, u''(1) = 0, u'''(0) = -H^3 F \quad (3)$$

En (1), $\delta(\xi - \xi_0)$ es la distribución delta de Dirac centrada en $\xi = \xi_0$ ([4]).

La solución general de la ecuación homogénea $\mu^{(4)}(\xi) - \lambda^2 \mu''(\xi) = 0$ es de la forma

$$u_h(\xi) = \alpha e^{\lambda \xi} + \beta e^{-\lambda \xi} + \gamma \xi + \delta \quad (4)$$

donde α , β , γ , y δ son constantes arbitrarias. Una solución particular de la ecuación diferencial en (1) está dada por el producto de convolución ([1])

$$u_p(\xi) = \frac{1}{\lambda^3} h(\xi) [\operatorname{senh}(\lambda\xi) - \lambda\xi] * g(\xi)$$

donde $h()$ es la función de Heaviside. Con (1), (2) obtenemos

$$u_p(\xi) = \begin{cases} u_<(\xi); & 0 \leq \xi < \xi_0 \\ u_>(\xi); & \xi_0 < \xi \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \mu_<(\xi) &= -\frac{H^3 F \mu}{\lambda^3(1+\mu)} [\operatorname{senh}(\lambda\xi) - \lambda\xi] - \frac{H^3 F \mu}{1+\mu} \left(\frac{1}{6} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi_0 \xi^2 \right) \\ &- \frac{\xi_0 H^3 F \mu}{\lambda^2(1+\mu)} [\cosh(\lambda\xi) - 1] \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_>(\xi) &= \frac{H^3 F}{\lambda^3} \{ \operatorname{senh}[\lambda(\xi - \xi_0)] - \lambda(\xi - \xi_0) \} - \frac{H^3 F \mu}{1+\mu} \left(\frac{1}{6} \xi_0^3 - \frac{1}{2} \xi_0^2 \xi \right) \\ &- \frac{H^3 F \mu}{\lambda^2(1+\mu)} \left\{ \xi_0 \cosh(\lambda\xi) + \frac{1}{\lambda} (\operatorname{senh}[\lambda(\xi - \xi_0)] - \operatorname{senh}(\lambda\xi_0)) \right\} \end{aligned} \right\} (7)$$

Con (4)-(7) tenemos la solución general de la ecuación diferencial (1) en la forma $u(\xi) = u_h(\xi) + u_p(\xi)$. Aplicando ahora (3) obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} \left(\delta + \frac{H^3 F}{\lambda^3} \right), \beta = \frac{1}{2} \left(-\delta + \frac{H^3 F}{\lambda^3} \right), \gamma = \frac{H^3 F}{\lambda^2}, \\ \delta &= \frac{H^3 F}{\lambda^2(1+\mu)} \left\{ -\frac{\tanh \lambda}{\lambda} - \mu \xi_0 + \frac{\operatorname{senh}[\lambda(1-\xi_0)]}{\lambda \cosh \lambda} \right\} \end{aligned} \right\} (8)$$

De (4), (8) se sigue que la parte de la solución que viene de la ecuación diferencial homogénea está dada por

$$\mu_h(\xi) = \delta [1 - \cosh(\lambda\xi)] - \frac{H^3 F}{\lambda^3} [\operatorname{senh}(\lambda\xi) - \lambda\xi] \quad (9)$$

2. La solución para $0 < \xi < \xi_0$

De 1.(6), 1.(8), 1.(9) tenemos

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) &= -\frac{H^3 F}{\lambda^3(1+\mu)} [\operatorname{senh}(\lambda\xi) - \lambda\xi] - \frac{H^3 F \mu}{1+\mu} \left(\frac{1}{6} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi_0 \xi^2 \right) \\ &+ \frac{H^3 F}{\lambda^3(1+\mu)} \tanh \lambda \left(1 - \frac{\operatorname{senh}[\lambda(1-\xi_0)]}{\operatorname{senh} \lambda} \right) [\cosh(\lambda\xi) - 1]; 0 \leq \xi < \xi_0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Para encontrar una expresión para $\mu(\xi)$ apta para su evaluación numérica para valores pequeños de

$\lambda(\lambda \rightarrow 0)$, introducimos (como en [3]) las funciones

$$L_m(\xi) = -\frac{\xi^{m+2}}{(m+1)(m+2)}; m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$S_m(\xi) = m! \xi^{m+2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda\xi)^{2k}}{(m+2k+2)!}; m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Entonces

$$L'_m(\xi) = mL_{m-1}(\xi), S'_m(\xi) = mS_{m-1}(\xi); m \geq 1 \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} S'_0(\xi) &= \lambda^2 [-L_1(\xi) + S_1(\xi)], S_0''(\xi) = \lambda^2 [-L_0(\xi) + S_0(\xi)], \\ S_0'''(\xi) &= \lambda^2 \xi + \lambda^4 [-L_1(\xi) + S_1(\xi)] \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\operatorname{senh}(\lambda\xi) - \lambda\xi}{\lambda^3} &= -L_1(\xi) + S_1(\xi) \\ \frac{\operatorname{senh}(\lambda\xi)}{\lambda} &= \xi + \lambda^2 [-L_1(\xi) + S_1(\xi)] \\ \frac{\cosh(\lambda\xi) - 1}{\lambda^2} &= -L_0(\xi) + S_0(\xi) \end{aligned} \right\} (6)$$

La función $S_m(\xi)$ es implementada en MATHEMATICA en términos de la función gamma y la función hipergeométrica generalizada. De (1)-(6) tenemos

$$\left. \begin{aligned} \mu(\xi) &= -\frac{H^3 F}{1+\mu} [-L_1(\xi) + S_1(\xi)] - \frac{H^3 F \mu}{1+\mu} \left(\frac{1}{6} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi_0 \xi^2 \right) \\ &+ \frac{H^3 F}{(1+\mu) \cosh \lambda} \left\{ \xi_0 + \lambda^2 (-L_1(1) + S_1(1) + L_1(1-\xi_0) - S_1(1-\xi_0)) \right\} [-L_0(\xi) + S_0(\xi)] \end{aligned} \right\} (7)$$

Usando (4),(5) se obtienen de (7) inmediatamente las expresiones para las primeras tres derivadas de $\mu(\xi)$ (las cuales no reproducimos aquí por razones de espacio).

Para obtener expresiones numéricamente adecuadas para X grande ($\lambda \rightarrow \infty$) escribimos (1) en la forma

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) &= -\frac{H^3 F}{\lambda^3(1+\mu)} \tanh \lambda \left\{ 1 - \frac{\operatorname{senh}[\lambda(1-\xi)]}{\operatorname{senh} \lambda} \right\} + \frac{H^3 F}{\lambda^2(1+\mu)} \xi \\ &- \frac{H^3 F \mu}{1+\mu} \left(\frac{1}{6} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi_0 \xi^2 \right) - \frac{H^3 F}{\lambda^3(1+\mu)} \frac{\operatorname{senh}[\lambda(1-\xi_0)]}{\cosh \lambda} [\cosh(\lambda\xi) - 1]; 0 \leq \xi < \xi_0 \end{aligned} \right\} (8)$$

apta para evaluar $u(\xi)$ para valores de λ ya que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tanh \lambda = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sinh[\lambda(1-\eta)]}{\cosh \lambda} = \begin{cases} 0; 0 < \eta \leq 1 \\ 1; \eta = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \cosh(\lambda \eta) \frac{\sinh[\lambda(1-t)]}{\cosh \lambda} = 0 \text{ si } \eta < t$$

De (8) se obtienen inmediatamente las expresiones para las primeras tres derivadas de $\mu(\xi)$ (las cuales no reproducimos aquí por razones de espacio).

De (1),(6) tenemos para $\mu_0(\xi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mu(\xi)$ que

$$\mu_0(\xi) = H^3 F \left(\frac{1}{2} \xi_0 \xi^2 - \frac{1}{6} \xi^3 \right); 0 \leq \xi < \xi_0 \quad (10)$$

Los casos límites $\lim_{\lambda \rightarrow 0} u^{(k)}(\xi) (k=1,2,3)$ se obtienen como las derivadas correspondientes de $\mu_0(\xi)$

De (8),(9) obtenemos para $u_\infty(\xi) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} u(\xi)$ que

$$u_\infty(\xi) = \frac{\mu}{1+\mu} u_0(\xi); 0 \leq \xi < \xi_0 \quad (11)$$

y $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u^{(k)}(\xi) = u_\infty^{(k)}(\xi) (k=1,2,3)$. La relación (11) también es válida para las derivadas.

3. La solución para $\xi_0 < \xi \leq 1$

De 1.(7)-1.(9) tenemos

$$u(\xi) = \frac{H^3 F}{\lambda^3(1+\mu)} \left\{ \sinh[\lambda(\xi - \xi_0)] - \sinh(\lambda \xi) + \lambda \xi_0 \right\} + \frac{H^3 F}{\lambda^3(1+\mu)} \tanh \lambda \left(1 - \frac{\sinh[\lambda(1-\xi_0)]}{\sinh \lambda} \right) \left[\cosh(\lambda \xi) - 1 \right] - \frac{H^3 F \mu}{1+\mu} \left(\frac{1}{6} \xi_0^3 - \frac{1}{2} \xi_0^2 \xi \right) \quad (1)$$

$;\xi_0 < \xi \leq 1$

De 2.(6),(1) obtenemos

$$u(\xi) = \frac{H^3 F}{1+\mu} \left\{ -L_1(\xi - \xi_0) + S_1(\xi - \xi_0) + L_1(\xi) - S_1(\xi) \right\} - \frac{H^3 F \mu}{1+\mu} \left(\frac{1}{6} \xi_0^3 - \frac{1}{2} \xi_0^2 \xi \right) + \frac{H^3 F}{(1+\mu) \cosh \lambda} \left\{ \xi_0 + \lambda^2 \left[-L_1(1) + S_1(1) + L_1(1-\xi_0) - S_1(1-\xi_0) \right] \right\} \left[-L_0(\xi) + S_0(\xi) \right] \quad (2)$$

$;\xi_0 < \xi \leq 1$

apta para valores pequeños de $\lambda (\lambda \rightarrow 0)$. Usando 2.(4),2.(5) se obtienen de (2) directamente las expresiones para la primera tres derivadas de $u(\xi)$ (las cuales no reproducimos aquí por razones de espacio).

Podemos escribir (1) en la forma

$$u(\xi) = -\frac{H^3 F}{\lambda^3(1+\mu)} \tanh \lambda \left\{ 1 - \frac{\sinh[\lambda(1-\xi_0)]}{\sinh \lambda} \right\} + \frac{H^3 F}{\lambda^2(1+\mu)} \xi_0 - \frac{H^3 F}{\lambda^3(1+\mu)} \left[\cosh(\lambda \xi_0) - 1 \right] \frac{\sinh[\lambda(1-\xi)]}{\cosh \lambda} - \frac{H^3 F \mu}{1+\mu} \left(\frac{1}{6} \xi_0^3 - \frac{1}{2} \xi_0^2 \xi \right) \quad (3)$$

$;\xi_0 < \xi \leq 1$

apta (en vista de 2.(9)) para valores grandes de

$\lambda (\lambda \rightarrow \infty)$. De (3) se obtienen directamente las expresiones para las primeras tres derivadas de $u(\xi)$ (las cuales no reproducimos aquí por razones de tiempo)

De (1), 2.(6) entonces que

$$u_0(\xi) = H^3 F \left(\frac{1}{2} \xi_0^2 \xi - \frac{1}{6} \xi_0^3 \right); \xi_0 < \xi \leq 1 \quad (4)$$

Los casos límites $\lim_{\lambda \rightarrow 0} u^{(k)}(\xi) (k=1,2,3)$ se obtienen como las derivadas correspondientes de $\mu_0(\xi)$. De (3), 2.(9) obtenemos

$$u_\infty(\xi) = \frac{\mu}{1+\mu} u_0(\xi); \xi_0 < \xi \leq 1 \quad (5)$$

y $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u^{(k)}(\xi) = u_\infty^{(k)}(\xi) (k=1,2,3)$. La relación de (5) también es válida para las derivadas.

Nuestro programa en MATHEMATICA contiene funciones gráficas similares a las de [1], [2], [3]. Algunas de las gráficas obtenidas se presentan al final.

4. Fuerzas puntuales múltiples

La generalización al caso de n fuerzas puntuales F_1, \dots, F_n actuando a alturas X_1, \dots, X_n es ahora fácil.

Supongamos que $0 < X_1 < \dots < X_n < H$. Pasando a la variable $\xi = \frac{x}{H}$, nuestro problema es ahora la resolución de la ecuación diferencial de Murashev-Sigalov-Bayrov

$$u^4(\xi) - \lambda^2 u''(\xi) = g(\xi); 0 \leq \xi \leq 1$$

$$g(\xi) = H^3 \sum_{i=1}^n F_i \delta(\xi - \xi_i) + \frac{\lambda^2 H^2 \mu}{1+\mu} \sum_{i=1}^n \tilde{M}_i(\xi) \quad (1)$$

Donde

$$\tilde{M}_i(\xi) = \begin{cases} HF_i(\xi - \xi_i); & 0 \leq \xi - \xi_i \\ 0; & \xi_i < \xi \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

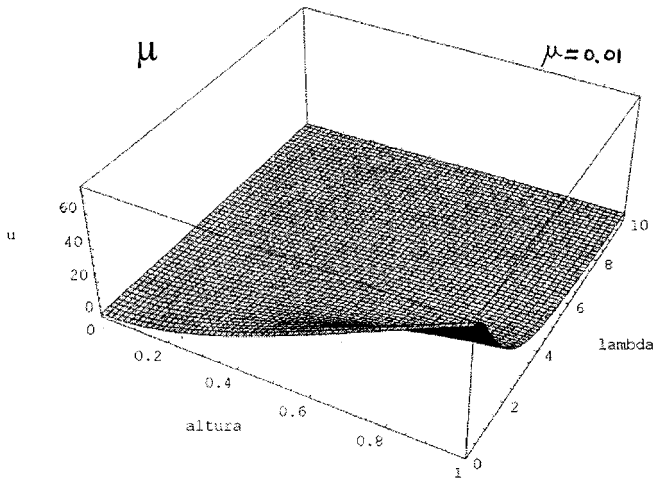
con las condiciones de borde

$$u(0) = u'(0) = 0, u''(1) = 0, u'''(0) = -H^3 \sum_{i=1}^{\eta} F_i \quad (3)$$

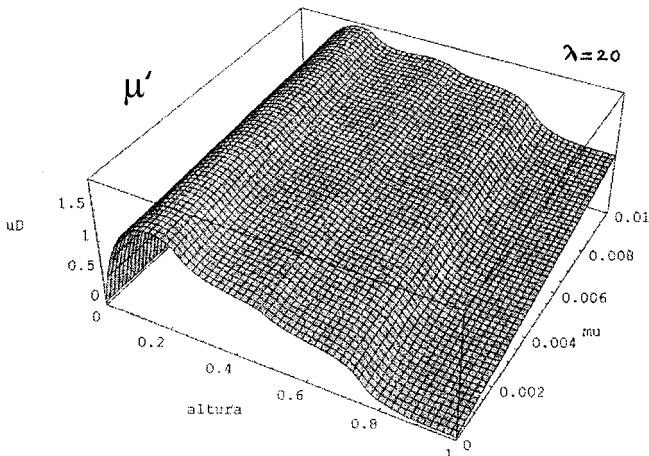
la solución del problema de frontera (1),(3) evidentemente está dada por

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{\eta} u_i(\xi); 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4)$$

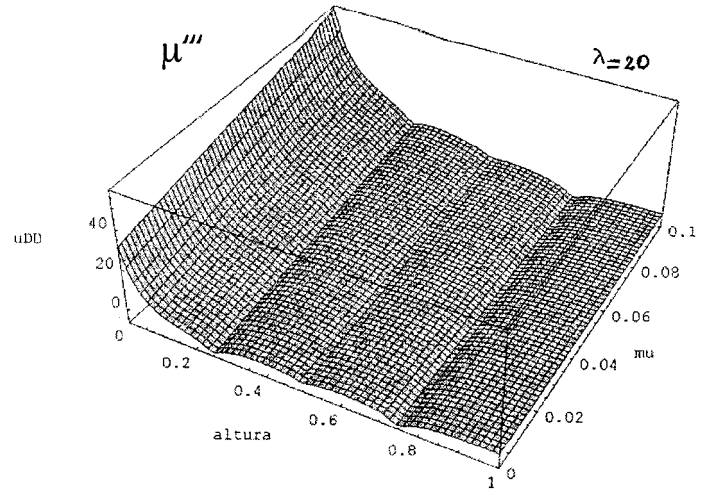
donde $u_i(\xi)$ es la solución que corresponde a una sola fuerza puntual F_i a la altura $\xi = \xi_i$. Esta solución fue determinada en las secciones anteriores. Algunas gráficas correspondientes a fuerzas múltiples se presentan al final.



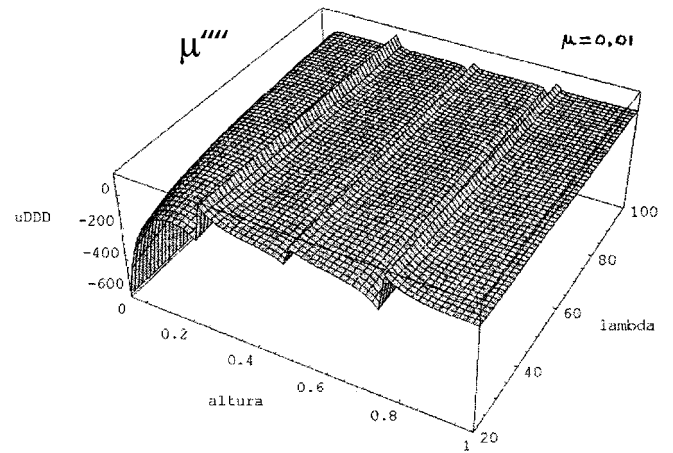
In [644]:= fLD3DMu [20, 0, 1, 0, 0.01]



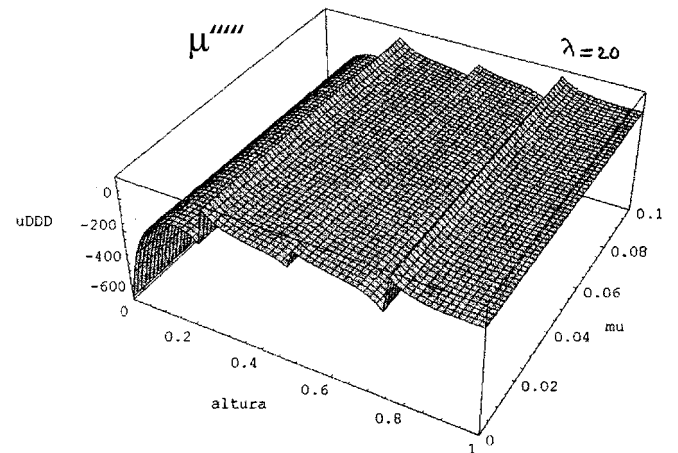
In [649]:= fLDseg3DMu [20, 0, 1, 0, 0.01]



In [662]:= fLDter3DLam [0.01, 0, 1, 20, 100]



In [663]:= fLDter3DMu [20, 0, 1, 0, 0.01]



In [666]:= a
 Out [666]:={1/4, 1/2, 3/4}
 In [667]:= force
 Out [667]:={0.002, 0.001, 0.002}
 In [668]:= ampl
 Out [668]:={250., 125., 250.}

Referencias

1. P.F. Hummelgen, M Paparoni. "soluciones del medio continuo aplicables a perfiles de carga generalizadas, a partir de la ecuación diferencial de Murashev, Sigalov, Baykov, Parte 1", Tekhne N°5-2001.
2. V.I. Murashev, E.V. Sigalov, J. Baykov: "Design and Reinforced Concrete Structures", Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1971.
3. N.N. Lebedev, "Special Functions and their Applications", Dover Publications Inc., New York, 1971.
4. J.P. Schoutren "Operatorenrechnung mit Anwendungen auf Technische Probleme", Springer Verlag, 1961.
5. H.S. Carslaw , J. C Jaeger. "Operational Methods in Applied Mathematics", Dover Publications Inc., New York, 1963.