2019, Vol. 11, No. 1. ISSN 2029-1922

MATEMATINIŲ SĄRYŠIŲ PAŽINIMO RAIŠKA III–IV KLASĖS MOKINIŲ SAMPROTAVIME APIE DAUGYBĄ

Vaiva Grabauskienė
Vilniaus universitetas, Lietuva

Oksana Mockaitytė-Rastenienė
Vytauto Didžiojo universitetas, Lietuva

Santrauka

Matematikos supratimas neatsiejamas nuo matematinių sąryšių pažinimo. Daugyba yra sudėtingais matematiniais sąryšiais pasižyminti operacija. Su ja mokiniai supažindinami anksti. Todėl pradinėse klasėse neišplėtotas daugybos sąryšių pažinimas gali tapti matematikos mokymosi sunkumų priežastimi.
Sąvokos funkcionalumas priklauso nuo požiūrio į daugybą. Mokslinės literatūros analizė rodo, kad apie daugybą gali būti samprotaujama adityviai arba multiplikatyviai.
Daugybos mokymasis pasižymi adityvaus ir multiplikatyvaus aiškinimo modelių įvairove*. Dėl vaizdavimo specifikos, skirtingi modeliai nevienodai tinka vaikų supažindinimui su vienomis ar kitomis daugybos savybėmis. Moksliniai tyrimai rodo, kad matematikos pamokose vaikai supažindinami tik su kai kuriais iš šių modelių.*
Tyrime dalyvavo po dvi klases iš keturių Vilniaus mokyklų III–IV klasių, viso 157 respondentai. Duomenys buvo surinkti atliekant apklausą raštu. Apklausos lape buvo pateikta lentelė, kurią reikėjo užpildyti, bent vienu būdu nupiešiant ir užrašant 5 x 12 veiksmą.
Atlikta duomenų turinio kokybinė analizė parodė, kad III–IV klasėje vyrauja adityvus samprotavimas apie daugybą. Multiplikatyvus samprotavimas apie daugybą pasitaiko retai. Vaizduodami daugybą, masyvo modelį mokiniai dažnai taiko nepilnavertiškai. Kiti daugybos multiplikatyvaus aiškinimo modeliai mokiniams yra nežinomi. Apibendrinus tyrimo rezultatus matyti, kad III–IV klasės mokiniai daugybos matematinius sąryšius pažįsta nepakankamai. Mokytojai turėtų skirti daugiau dėmesio įvairiapusiškam mokinių supažindinimui su vizualiais daugybos vaizdavimo būdais.
Pagrindiniai žodžiai: *adityvus samprotavimas, daugybos mokymasis, multiplikatyvus samprotavimas, pradinis matematinis ugdymas.*

Įvadas

Daugybos veiksmas yra daugelio sunkesnių aritmetikos, algebros, matavimų, statistikos temų supratimo pagrindas (Brickwedde, 2011, Huang, 2013). Nepaisant skirtingų pasiūlymų, kaip supažindinti pradinių klasių mokinius su daugyba, šis veiksmas daugeliui vaikų yra sunkus (Zhang, Ding, Lee, & Chen, 2017). Kitaip net negali būti, nes jis apima daugybę skirtingų požiūrių į dauginimo procesą ir tų požiūrių raišką daugybos taikymo kontekstuose.

Pradedantys mokytis dauginti pradinių klasių mokiniai šį veiksmą supranta kaip sudėties operacijos racionalizavimą (Brickwedde, 2011; Day & Hurell, 2015; Milton, Flore, Moore, Taylor, & Burton, 2019; Young-Loveridge, 2006). Kitos, tik per ilgesnį matematikos mokymosi laiką galinčios atsiverti daugybos prasmės kai kuriems iš jų taip ir lieka nepasiekiamos. Taip pat prarandama galimybė pamėgti ir išmokti matematiką.

Tyrimai rodo (Day & Hurell, 2015; Harvey-Swanston, 2017), kad daugybos lentelės mokymasis pradinėse klasėse yra ritualinis įvykis, liekantis emocingu prisiminimu daugeliui suaugusiųjų. Vis dar praktikuojamas daugybos lentelės mintinas mokymasis neskatina konceptualaus supratimo, gal todėl daug vaikų ir suaugusiųjų daugindami klysta (Huang, 2013). Daugybos nesupratimas reiškia ir neįsigilinimą į visas jos taikymo situacijas, todėl žymi dalis kitų matematikos temų taip pat lieka nesuprastos. Viena vertus, gali atrodyti, kad šiais išmaniųjų technologijų laikais be mokėjimo mintinai sudauginti skaičius galima apsieiti. Kita vertus, daugybos supratimas neapsiriboja dauginimo rezultato gavimu.

Suteikiant prasmę dauginimo procedūrai, užuot rutiniškai įsiminę procedūrą ir rezultatą, mokiniai turėtų mokytis įvairiausiais būdais samprotauti apie daugybą (Day & Hurell, 2015). Tai leistų atrasti skirtingų daugybos vaizdavimo būdų privalumus, iliustruojančius daugybos savybes. Jie turėtų taikyti juos mėgindami kiekvieną kartą tinkamiausiu būdu supaprastinti dauginimą, taip pat siekdami išvengti mechaninio daugybos lentelės įsiminimo.

Matematinis samprotavimas yra būdas išsiaiškinti matematinių objektų ir santykių savybes. Samprotaujant siekiama matematinius teiginius gauti iš kitų matematinių teiginių (Jeannote & Kieran, 2017). Gebėjimas tikslingai naudotis schemomis matematiniam samprotavimui ir jo mokymuisi yra esminis (Young-Loveridge, 2006). Skirtingi daugybos vaizdavimo pavidalai vienas kitą papildo, suteikdami medžiagos apmąstymams. Kuo turtingesnis konceptualus kontekstas, kuriame iškyla naujas faktas, tuo giliau gali būti suprastas faktas (Barmby, Harries, Higgins, & Suggate, 2009).

Vienas iš sunkumų yra vadovėlių pertvarkymas, daugybos mokymąsi papildant samprotavimu apie daugybos vaizdavimo būdus (McMillan, 2018). Tam pirmiausia būtina suprasti, kokios pasirinktos daugybos mokymosi formos yra veiksmingos, o kokios ne. Tyrėjų teigimu (Barmby et al., 2009), vadovėliuose daugybos vaizdavimo tarsi ir mokoma, bet jis naudojamas daugiau daugybai iliustruoti, negu skaičiavimams supaprastinti. Vaizdavimas skirtingais būdais yra naudingas ugdant matematinių sąvokų supratimą, tačiau kol kas mažai žinoma, kas būdinga vaikų vizualinei daugybos supratimo raiškai (Huang, 2013), kokius daugybos supratimo ypatumus gali atskleisti simbolinio ir grafinio daugybos vaizdavimo sugretinimas.

Tyrimo problema: neištirtas daugybos vaizdavimo mokymosi pradinėse klasėse poveikis daugybos matematinių sąryšių pažinimui.

Tyrimo objektas: III–IV klasės mokinių samprotavimas apie daugybą.

Tyrimo tikslas: nustatyti, kokius matematinius sąryšius ir kaip, samprotaudami apie daugybą, taiko III–IV klasės mokiniai.

Samprotavimu apie matematinį turinį čia vadinsime faktų (matematinių objektų savybių, matematinių santykių tarp objektų) aiškinimosi, konceptualaus pagrindimo, susiejimo procedūrą ir rezultatą. Mokykloje ši procedūra / rezultatas apima nuomonės apie samprotavimo objektą išsakymą remiantis įžvelgtomis duomenų prasmėmis, pasirenkant turimą matematinę patirtį atitinkantį argumentavimo ir išvados formulavimo būdą.

Daugybos supratimo dimensijos

Daugybos sąvoka yra daugialypė (Huang, 2013), apimanti adityvų ir multiplikatyvų požiūrius ir nuo tų požiūrių priklausomą funkcionalumą.

Daugybai būdingas grupavimas ir kartojimas (Harries & Barmby, 2008) neretai siejamas su kartotine sudėtimi, tačiau dauginant yra svarbus grupių vienodumas ir elementų kiekis grupėje (McMillan, 2018). Atliekant dauginimo veiksmą, paprastai reikia rasti bendrą elementų kiekį visose grupėse. Kai nežinomas elementų kiekis grupėje, bendrą elementų kiekį tenka dalinti į lygias grupes. Kai nežinomas grupių kiekis, ieškoma talpos dalybos rezultato.

Du dalybos tipai (dalyba į lygias dalis ir talpos dalyba), lemia dvi samprotavimo apie daugybą formas. Pirmoji forma artima kartotinei sudėčiai (Brickwedde, 2011). Antroji forma nukreipia dėmesį į daugybos veiksmo elementų sąsajas. Svarbu, kiek yra lygių dalių ir kokią struktūrą tos dalys sudaro dauginant.

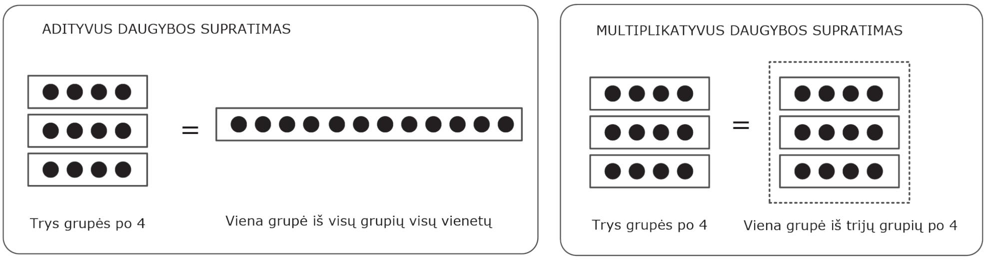
Daugybos veiksmo reikalingumą lemia poreikis racionalizuoti kartojimais pasižyminčių reiškinių skaičiavimą. Paprasčiausias būdas tai atlikti yra įvairaus kiekio objektų grupavimas ir grupių sudėtis (Brickwedde, 2011). Pradinėse klasėse, vaikai pradeda mokytis dauginti būtent taip (adityviai) sujungdami kiekius.

Nors tokiu būdu gautas dauginimo rezultatas atitinka bendrą grupių elementų kiekį, kartotinė sudėtis neapima daugelio situacijų, kuriose daugyba gali būti naudinga (Day & Hurell, 2015). Adityviai suprantant daugybą, elementariai randamas dauginimo rezultatą atitinkantis kiekis.

Multiplikatyvus supratimas nuo adityvaus skiriasi aiškiai išreikštu santykio tarp daugybos veiksmo narių (kiek kartų, po kiek) pastebėjimu (Young-Loveridge, 2006). Jis siejamas su grupavimo idėjos supratimu ir įvairiapusiu jos taikymu. Multiplikatyvus mąstymas yra aibė idėjų, palaikančių mokyklinį matematinį ugdymą. Jis pasižymi lanksčiu požiūriu į didelius ir labai mažus skaičius. Apima tikslingą skaičių skaidymą ir santykius tarp bendrą struktūrą sudarančių kiekių, tiesioginį ir atvirkštinį samprotavimą, matavimus ir daugybę kitų situacijų, kuriose reikia daugybos ir dalybos (Hurst & Hurell, 2018; McMillan, 2018).

Adityvaus ir multiplikatyvaus samprotavimų skirtumai geriausiai matyti analizuojant sandaugos kilmę (1 pav.). Adityviai samprotaujant, kiekvienas skaičius gaunamas prijungiant kitus skaičius. Prijungiant galima skaičiuoti nuo vieneto iš eilės, kol bus pasiektas reikiamas skaičius, arba jungti pasikartojančias grupes. Kiekviena grupė taip pat sudaryta iš vienetų. Todėl gali būti skaičiuojama „peršokant“ pastovaus dydžio atkarpas (Tzur et al., 2013). Adityviai suprantama daugyba yra unarinė operacija, kurios pradinius duomenis atitinka tos pačios prigimties rezultatas.

Multiplikatyviai suprantama daugyba jau yra binarinė operacija su dviejų tipų duomenimis. Vienas duomuo yra grupės dydis, o kitas yra šios grupės kartojimų skaičius (Barmby et al., 2009). Taigi kiekvienas duomuo turi griežtą paskirtį, nusakančią dauginimo procesą, o rezultatas pasižymi tų duomenų sąlygotu bendro kiekio supratimu (1 pav.).



1 pav. Adityvaus ir multiplikatyvaus daugybos supratimo skirtumai.

Multiplikatyvus samprotavimas yra susijęs su gebėjimu atskiruose daugybos veiksmo elementuose įžvelgti visumos kompozicinius vienetus (Watson, 2016). Multiplikatyviai samprotaujantys vaikai daugindami sukuria struktūrą, atitinkančią du fiksuotus dydžius ir santykius tarp jų (Huang, 2013). Tam reikia gebėti išsaugoti grupės struktūrą kompozicijoje ir paeiliui mąstyti apie kompozicijos komponentus (Huang, 2013). Rezultato sandara iš vienetų gaunama grupę kartojant tam tikrą daugikliu nusakytą kartų skaičių (Tzur et al., 2013).

Abi daugybos supratimo dimensijos aktualios jau pradinėse klasėse. Pradėjęs suprasti daugybą mokinys ima naudoti jam žinomus dauginimo faktus naujiems dauginimo rezultatams gauti. Tuomet pakanka prisiminti žymiai mažesnį esminių faktų apie dauginimą kiekį (McMillan, 2018).

Adityvumo dimensija padeda paprastai pagrįsti daugybos reikalingumą. Dėl rėmimosi kartotine sudėtimi, ji dažnai yra vienintelė išeitis tiems vaikams, kurie niekaip neprisimena daugybos lentelės (McLeay, 2008). Multiplikatyvumo dimensija skatina įsivaizduoti įvairios prigimties sąsajas, atspindinčias daugybos prasmes. Todėl įvairiapusiškai suprastos daugybos struktūros gali būti naudingesnės daugybos lentelei išmokti, palyginus su kartotine sudėtimi. Jos nebereikia nei mokytis mintinai, nei atkurti atliekant ilgai trunkančią kartotinę sudėtį. Ji gali būti tiesiog matoma skaičių sandarą atitinkančiose struktūrose. Multiplikatyvumo dimensijai būdingas matematinių sąvokų siejimas kartu su sąryšių aptarimu skatina vaikus konstruoti savo supratimą (Brickwedde, 2011). Tyrėjų (Hurst, & Hurell, 2018; McMillan, 2018) teigimu, būtent multiplikatyvus daugybos supratimas daro ryškų poveikį mokinio matematikos mokymosi sėkmei.

Daugybos vizualaus aiškinimo modeliai

Vaizdavimo būdai gali padėti išsiaiškinti skirtingus daugybos aspektus. Dalinis sąvokos vaizdinys gali būti praplėstas naudojant įvairų vaizdavimą ir nuosekliai keliaujant nuo vieno aspekto prie kito (Harries & Barmby, 2008).

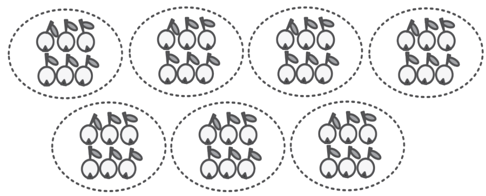
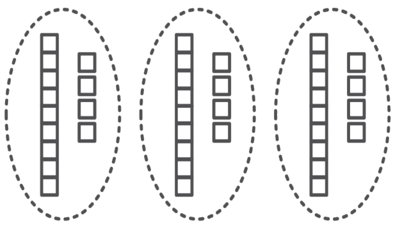
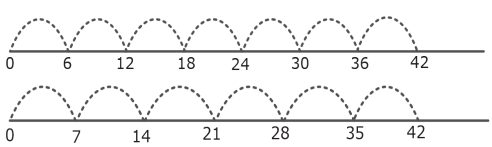
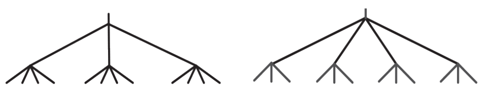
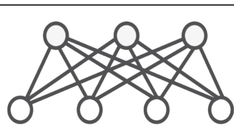
Įvairių šalių mokslinėje ir metodinėje literatūroje aprašyti gana įvairūs adityvų ir multiplikatyvų požiūrį į daugybą atstovaujantys daugybos vizualaus aiškinimo modeliai (1 ir 2 lent.). Kai kurie iš tų modelių literatūroje aptariami dažnai (lygių grupių modelis, lygių atstumų modelis, masyvo modelis, ploto modelis). Kiti minimi retai (variantų modelis, lentelės modelis, mastelio modelis, funkcijos modelis). Kiekvienas šių modelių pasižymi savo privalumais ir trūkumais, kurių supratimas gali būti naudingas tobulinant daugybos mokymąsi.

Adityvų požiūrį į daugybą atstovaujantiems vizualaus aiškinimo modeliams (1 lent.) būdinga rėmimasis kartotine sudėtimi.

Lygių grupių modelis (Atkins, 2016; Harries & Barmby, 2008; Radatz & Schipper, 2007) atitinka kiekinį dauginimo rezultato supratimą (kiek kokio dydžio grupių sudaro visumą). Jis apima skaičiavimo po vieną ir skaičiavimo „peršokant“ grupes požiūrius. Daugybos rezultatą atitinkantis kiekis yra lygių kiekių jungimo rezultatas, jis gaunamas prie pradinio kiekio pridedant kitus tokius pačius kiekius. Siekiant patogiai sudėti kiekius dešimtainėje skaičiavimo sistemoje, grupių elementai gali būti suskaidyti į dešimtis ir vienetus. Šį modelį suprasti ir taikyti paprasta, nes jis remiasi paprastu sudėties veiksmo taikymu. Modelio grafiniame pavidale (1 lent.) matyti to paties elementų rinkinio kartojimas. Rinkinių išdėstymo tvarka nėra svarbi, nes visi rinkiniai yra vienodi. Dėl šios priežasties, lygių grupių modelis neišryškina daugybai būdingų komutatyvumo ir distributyvumo savybių.

Lygių atstumų modelis (Atkins, 2016; Harries & Barmby, 2008; Radatz & Schipper, 2007) atitinka kelintinį dauginimo rezultato supratimą (dauginimo rezultatą nurodančio taško vieta skaičių spindulyje nustatyta nuosekliai sujungus vienodo ilgio atkarpas). Jis taip pat apima skaičiavimo po vieną ir skaičiavimo „peršokant“ grupes požiūrius. Grupavimas į lygias grupes grafiniame modelyje atitinka besikartojančius vienodus atstumus skaičių spindulyje. Taip pavaizduotos kartotinės sudėties dėmenys (vienodo ilgio atkarpos) ir rezultatas (kartojamų atkarpų ilgių sumą atitinkanti atkarpa) yra tos pačios prigimties. Lygių atstumų modelis neišryškina distributyvumo savybės. Komutatyvumo savybė gali būti pastebėta tik tuomet, kai specialiai parenkamos šios savybės aiškinimuisi tinkamos vizualaus daugybos vaizdavimo užduotys (1 pav.).

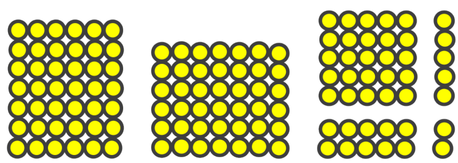
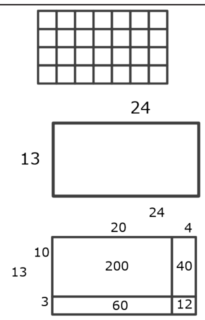
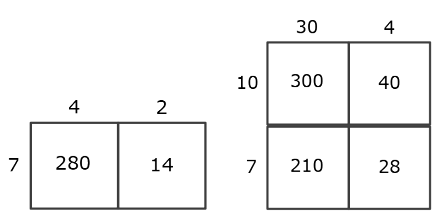
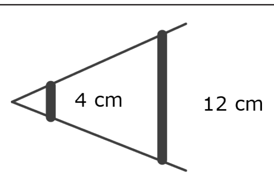
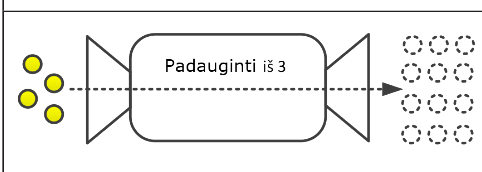
1 lentelė. Adityvaus daugybos aiškinimo modeliai.

Grafinis pavidalas	Simbolinis pavidalas (kartotinė sudėtis)	Modelio pavadinimas
	6+6+6+6+6+6+6	**Lygių grupių modelis** (angl. *equal grouping model, repeated addition*)
	(10+4) + (10+4) +(10+4)	
	6+6+6+6+6+6+6 7+7+7+7+7+7	**Lygių atstumų modelis** *(*angl. *equal quantities as equal distances; equal jumps on a number line)*
	4 + 4 + 4 3 + 3 + 3 + 3	**Variantų modelis** (vokiškai *Baumdiagramm, Kombinationen, Paare aus zwei Mengen*)
		

Variantų modelis (Huang, 2013; Radatz & Schipper, 2007) atitinka vienu metu ir kelintinį, ir kiekinį dauginimo rezultato supratimą. Tik kelintinis ir kiekinis aspektas grafiniuose modelio pavidaluose išreikštas netiesiogiai. Medžio pavidalo struktūroje šakos išdėstytos nuosekliai ir gali būti suskaičiuotos. Kiekviena šaka turi vienodą šakelių kiekį, o dauginimo rezultatas gali būti sužinotas sudedant kiekvienai šakai priklausančių šakelių kiekius. Šis modelio pavidalas leidžia pastebėti komutatyvumo savybę tik tuomet, kai specialiai parenkamos šią savybę išryškinančio vizualaus daugybos vaizdavimo užduotys (1 pav.). Porų iš dviejų aibių struktūroje visos poros perrenkamos paeiliui pirmos aibės elementams priskiriant antros aibės elementus. Taip gaunama tvarkingai atrodanti struktūra, kurioje dviejų aibių elementus jungiančių atkarpų išdėstymas ne itin patogus tiek pačių atkarpų, tiek porų elementų sąsajų kiekiu nusakomų grupių dydžiui bendrai suskaičiuoti. Tiek distributyvumo, tiek komutatyvumo savybių ieškoti šioje struktūroje yra nepatogu (1 pav.). Tikriausiai būtent sudėtingesnis pavidalas riboja variantų modelio paplitimą.

Multiplikatyvų požiūrį į daugybą atstovaujantiems vizualaus aiškinimo modeliams (2 lent.) būdinga daugiklio ir dauginamojo poveikių rezultato struktūrai vaizdumas.

2 lentelė. Multiplikatyvaus daugybos aiškinimo modeliai.

Grafinis pavidalas	Simbolinis pavidalas	Modelio pavadinimas
	6 x 7 7 x 6 (5+2) x (5+1)	**Masyvo modelis** (angl. *array model*)
	7 x 4 24 x 13 (20+4) x(10+3)	**Ploto modelis** (angl. *rectangular array; area; region;* vokiškai *Rechteckfeld*)
	7 x (40 + 2) (10 + 7) x (30 + 4)	**Lentelės modelis** (angl. *grid model*)
	1 x 3	**Mastelio modelis** (angl. *scaling*; vokiškai *vergrößern*)
	1 x 3 4 x 3	**Funkcijos modelis** (angl. *function machine*, vokiškai *Maschinen*)

Masyvo modelyje (Atkins, 2016; Harries & Barmby, 2008; Radatz &Schipper, 2007) lengvai pastebimas grupavimas į lygias grupes. Grupių kartojimo idėja realizuota grupes išdėstant vieną po kitos. Pats masyvas yra dvimatis objektas, todėl juo lengvai užkoduojama binarinė multiplikatyviai suprantamos daugybos prigimtis. Dėl šios priežasties, masyvo pavidale aiškiai išreikštos daugybos komutatyvumo ir distributyvumo savybės. Masyvo elementus patogu grupuoti, išryškinant daugybos veiksmo atlikimą paprastinančias struktūras (2 lent.).

Ploto modelis (Atkins, 2016; Day & Hurell, 2015; McIntosh & Ramagge, 2011; McLeay, 2008; Ormond, 2012; Radatz & Schipper, 2007) pratęsia ir papildo daugybos vaizdavimo masyvu idėją. Viso paviršiaus neužpildantys masyvo elementai tarsi suspaudžiami, kad tarp jų neliktų tarpų. Taip gaunama stačiakampė struktūra, sudaryta iš langelių. Supratus taip pavaizduoto daugybos rezultato struktūrą, gali būti žengtas dar vienas žingsnis abstraktumo link. Langeliams pranykus, išlieka tik stačiakampis su elementų kiekį eilutėje ir stulpelyje vaizduojančiais kraštinių ilgiais (2 pav.). Nors šio modelio eilučių-stulpelių struktūra išreikšta netiesiogiai, stačiakampio plotą patogu skaidyti, todėl daugybos komutatyvumo ir distributyvumo savybės lengvai iliustruojamos.

Lentelės modelis (Atkins, 2016; Barmby, Harries, & Higgins, 2010; Day, & Hurrell, 2015; Hazekamp, 2011) yra tolesnis žingsnis dauginimo idėjos abstrahavimo link. Šiame modelyje atsiribojama nuo daugybos veiksmo detalaus geometrinio vaizdavimo idėjų. Ploto modelyje vizualiai pastebimos daugybos elementų struktūrinių dalių proporcijos lentelės modelyje keičiamos vienodais langeliais. Taip visas dėmesys nukreipiamas į daugybos paprastinimą vizualizuojantį suskaidymą. Skaidymo metu atsirandančių dešimčių ir vienetų struktūrų dydis vaizduojamas tik simboliu, todėl lentelės modelio grafinis pavidalas panašėja į daugybos stulpeliu pavidalą. Jos komutatyvumo ir distributyvumo savybės vis dar lieka aiškiai išreikštos.

Kiti du mokslinėje ir metodinėje literatūroje minimi daugybos aiškinimo modeliai (mastelio, funkcijos) pasižymi originalia išvaizda, nukreipiančia dėmesį į dauginamojo ir daugybos rezultato sąsajas, aprašančias proporcingą padidinimą. Daugybos veiksmo nulemtas grupę sudarančių vienetų pokytis sandaugoje yra kartojimosi ir transformacijos tyrinėjimo objektas. Daugybos komutatyvumo ir distributyvumo savybės mastelio ir funkcijos modelyje gali būti tyrinėjamos specialiai parenkant užduotis.

Mastelio modelyje (Radatz & Schipper, 2007) dėl daugybos veiksmo atsirandantis atkarpos ilgio pokytis matyti brėžinyje. Viena vertus, atkarpomis vaizduojama dauginimo situacija yra panaši, kaip lygių atstumų modelyje. Kita vertus, mastelio modelyje pačiam mechaniniam atstumų kartojimui dėmesio tiesiogiai neskirta. Svarbiau tokio kartojimo rezultatas, atspindintis proporcingo padidinimo idėją.

Funkcijos modelyje (Radatz & Schipper, 2007), kartojimų kiekį nusakantis daugybos veiksmo narys užkoduotas dauginamojo transformavimo taisykle. Funkcijos duomuo yra transformuojamas, o dauginimo rezultatas gali būti suprastas dvejopai: kaip vienetų kiekio padidėjimas ir kaip grupių kiekio padidėjimas (2 pav.). Toks dvilypis požiūris į dauginimo veiksmą naudingas proporcingo didinimo mokymuisi.

Tyrėjų nuomone, visi aukščiau aptarti daugybos vizualaus aiškinimo modeliai gali būti savaip naudingi mokantis dauginti pradinėse klasėse.

Tyrimo metodologija

Bendra tyrimo charakteristika

Daugybos mokymosi pradinėse klasėse mokslinių tyrimų studija atskleidžia didelį dėmesį daugybos modelių įvairovei, gerokai mažesnį dėmesį tų modelių hierarchijai ir stoką tyrimų, skirtų konkrečiai tokio amžiaus vaikų daugybos supratimui charakterizuoti. Daugybos išmokimo tyrimai dažniausiai yra nukreipti į teisingą dauginimo rezultatą, ne į mokinių galvose atsirandančias sąsajas tarp žinių (McMillan, 2018). Nors teisingas dauginimo rezultatas gali būti gautas daugybą suprantant skirtingais būdais, teisingą atsakymą užrašiusių mokinių žinios nebūtinai yra pakankamos. Per mažai žinoma, kaip vaikai supranta daugybą, todėl tikslinga atlikti pradinių klasių mokinių samprotavimo apie daugybą tyrimą.

Daugelio tyrėjų (Atkins, 2016; Hazekamp, 2011; Harries & Barmby, 2008; Huang, 2013; Young-Loveridge, 2006) teigimu, daugybos vaizdavimo būdų įvairovė sukuria sąlygas įvairiapusiam daugybos supratimui. Tiek užsienio, tiek Lietuvos matematikos vadovėliuose daugybą mokiniams įprasta pristatyti pirmiausia ją tapatinant su kartotine sudėtimi (adityvus daugybos apibrėžimas). Labiau struktūruoti daugybos vaizdavimo būdai (multiplikatyvus daugybos apibrėžimas) vadovėliuose plėtojami skirtingu gyliu. Tačiau būtent nuo multiplikatyvaus požiūrio įvaldymo priklauso mokinių pasirengimas toliau mokytis matematikos (Brickwedde, 2011).

Čia pristatomo tyrimo sumanymas grindžiamas požiūrio į daugybą tipologijos (adityvu, multiplikatyvu) ir daugybos vizualaus aiškinimo modelių hierarchijos (1 ir 2 lent.) taikymu III–IV klasės mokinių samprotavimui apie daugybą vertinti. Laikytasi nuostatos, kad mokinių samprotavimo apie daugybą rezultatas, t. y. konkretaus daugybos veiksmo supratimo grafinė ir simbolinė raiška atspindi mokinio prioritetus, samprotavimo tipą ir su juo susijusį daugybos matematinių sąryšių pažinimą.

Tyrimo imtis

Kokybinio tyrimo respondentai turi būti parinkti siekiant tiriamą problemą reprezentuojančių duomenų įvairovės. Svarbiausia sudaryti sąlygas, kurioms esant gali būti išskirta optimali duomenų kategorijų aibė. Kokybinio tyrimo imties dydis turi būti parinktas atsižvelgiant į svarbiausių tyrimo klausimų pobūdį, renkamų duomenų pavidalą, numatomų rezultatų taikymą (Sin, 2010).

Siekiant duomenų reprezentatyvumo, buvo pasirinkta imtis, atitinkanti tris kriterijus:

1. mokiniai turi būti ne mažiau kaip metus mokęsi daugybos,
2. tyrime turi dalyvauti ne vieno mokytojo ir ne vienos mokyklos mokiniai,
3. imties dydis turi garantuoti mokinių samprotavimo apie daugybą įvairovę.

Lietuvoje su daugyba pradinių klasių mokiniai pirmą kartą supažindinami antrųjų mokslo metų viduryje. Todėl apklausoje dalyvavo III ir IV klasių mokiniai.

Norėta atskleisti nuo pavienio mokytojo pasirinkto daugybos aiškinimo mažiau priklausomą mokinių samprotavimo apie daugybą įvairovę. Todėl šiam kokybiniam tyrimui buvo pasirinkti aštuonių mokytojų mokiniai, po dvi klases iš keturių Vilniaus miesto mokyklų (iš viso penkių klasių mokiniai, besimokantys III klasėje ir trijų klasių mokiniai, besimokantys IV klasėje).

Tyrimo atlikimui, buvo gautas raštiškas mokinių tėvų sutikimas. Apklausą kiekvienoje klasėje atliko tos klasės mokytojas. Iš viso buvo apklausti 157 respondentai.

Tyrimo instrumentas

Duomenys buvo surinkti atliekant apklausą raštu. Mokiniai turėjo atsakyti tik į klausimą apie daugybą. Apklausos lape buvo pateikta dviejų stulpelių ir dviejų eilučių tuščia lentelė, kurią reikėjo užpildyti, bent vienu būdu nupiešiant ir užrašant 5 x 12 veiksmą. Būtent ši vienaženklio ir dviženklio skaičiaus sandauga mokinių samprotavimui apie daugybą tirti buvo pasirinkta dėl galimybių įvairiais būdais skaidyti antrą dauginamąjį ir piešiniu vaizduojamą sandaugą patogiai sutalpinti lentelės skiltyje.

Kelių vaizdavimo būdų naudojimas turi potencialą atkreipti mokinio dėmesį į esmines daugybos savybes (Harries & Barmby, 2008), todėl tikėtasi, kad reikalavimas keliais būdais užpildyti lentelės stulpelius paskatins mokinio samprotavimą apie daugybą.

Tyrimo instrumento pakankamą validumą garantuoja mokiniams skirtos užduoties atitikimas mokymo turiniui bei didaktiniams tikslams ir to paties daugybos veiksmo vienalaikio simbolinio ir grafinio vaizdavimo reikalavimas tyrimo instrumente.

Tyrimo instrumento patikimumą didina pagal kriterijus parinktos imties tinkamumas pakankamai didelei mokinių atsakymų įvairovei gauti ir mokslinėje literatūroje pripažįstamos tipologijos taikymas III–IV klasės mokinių samprotavimui apie daugybą vertinti.

Duomenų analizė

Atlikta mokinių nupieštų schemų, užrašyto teksto ir pasirinktų sandaugos simbolinių išraiškų turinio analizė.

Mokinių atsakymai į klausimus pirmiausia buvo sugrupuoti pagal adityviam ir multiplikatyviam samprotavimui būdingus bruožus, į atskirą grupę sudedant daugybos prasmės neatskleidžiančius (riboto daugybos supratimo) atvejus. Analizuojant mokinių samprotavimą, remtasi 1 ir 2 lentelėse išvardytais daugybos vizualaus aiškinimo modeliais ir tuos modelius atitinkančia simboline raiška.

To paties mokinio daugybos grafinio ir simbolinio vaizdavimo rezultatų sugretinimas leido tiksliau nustatyti jam būdingą samprotavimo apie daugybą būdą. Kiekvieno tipo atsakymai (kategorijos) toliau buvo analizuojami atskirai, išskiriant kiekvienam atsakymų tipui būdingus atsakymų pogrupius (subkategorijas). Visa mokinių atsakymų įvairovė tekste pristatyta trijų paskirčių (ribotą supratimą; adityvų samprotavimą; multiplikatyvų samprotavimą iliustruojančiomis) lentelėmis. Kadangi tyrimo imtis buvo labai didelė, lentelėse pateikta gana didelė išskirtas subkategorijas iliustruojančių mokinių atsakymų įvairovė. Tyrimo rezultatai interpretuojami paeiliui analizuojant kiekvienos subkategorijos charakteringų pavyzdžių savybes.

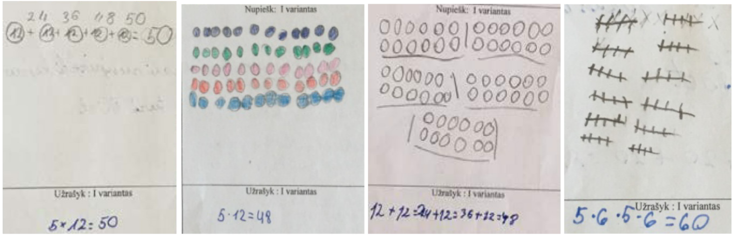
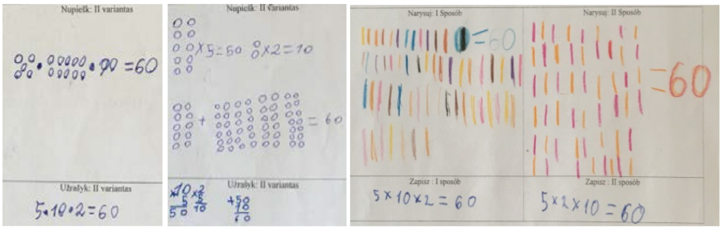
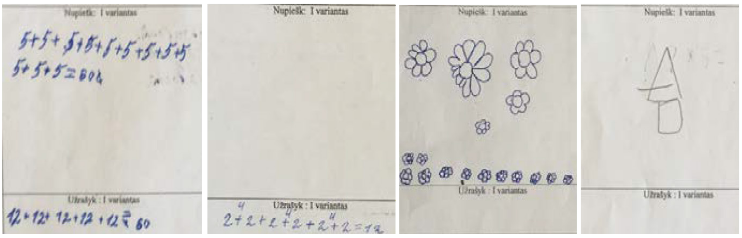
Tyrimo rezultatai

III–IV klasės mokinių samprotavimo apie daugybą klaidos

Atlikta duomenų analizė rodo, kad samprotaudami apie daugybą mokiniai klysta dėl neatidumo (4 lent.) ir dėl nesupratimo (5 lent.).

Simbolinės raiškos klaidos (4 lent., pirma subkategorija) atsiranda padarius skaičiavimo klaidą arba neleistinu būdu užrašius įsivaizduojamą vieno daugiklio suskaidymą (pavartotas netinkamas veiksmo ženklas). Ši klaida gali rodyti, kad vaikai neturi ryškaus skaičiaus skaidymo dauginant vaizdinio.

4 lentelė. Kategorija: daugybos riboto supratimo raiška mokinių samprotavimuose (neatidumas).

Subkategorija	Charakteringi 5 x 12 vaizdavimo pavyzdžiai
Simbolinės raiškos klaidos	
Grafinės raiškos klaidos	
Simbolinės ir grafinės raiškos nesiderinimas	
Grafinės arba simbolinės raiškos nebuvimas	

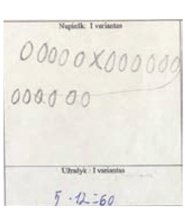
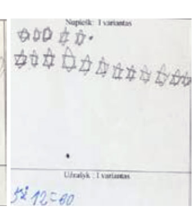
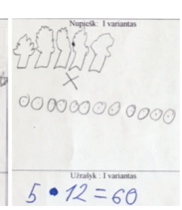
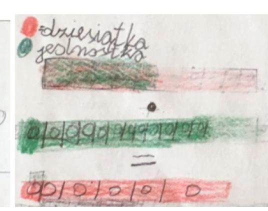
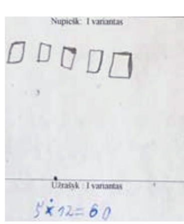
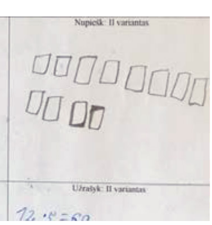
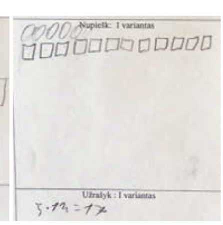
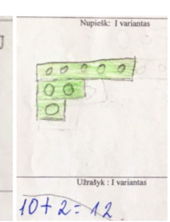
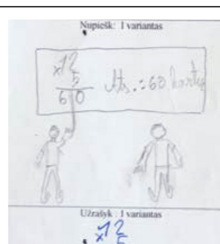
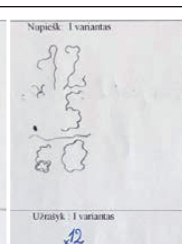
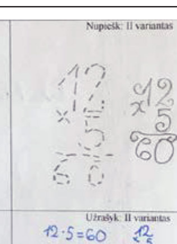
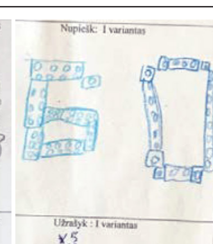
Grafinės raiškos klaidos (4 lent., antra subkategorija) gali atsirasti mechaniškai perkėlus į piešinį skaičiavimuose ar skaičiavimų vaizdavime padarytą klaidą, taip pat neatidžiai ir ypač nestruktūruotai dėliojant vienetus vaizduojančius ženklus.

Dalis mokinių, vaizduodami daugybą grafiniu ir simboliniu būdu, nesuderino vieno būdo turinio su kitu. 4 lentelės trečią subkategoriją iliustruojantys pavyzdžiai rodo, kad nesuderinimas gali kilti iš adityviai suprantamos daugybos natūralios raiškos alternatyvų: paeiliui po vieną arba paeiliui prijungtos grupės. Nesuderinimą gali lemti komutatyvumo savybės iliustravimas simboliniu ir grafiniu pavidalu vienu metu. O kartais skaidymas skirtingo kiekio grupėmis atrodo tarsi atsitiktinis: multiplikatyviai suprantant daugybą, nevienodas grupavimas taip pat atsiranda pritrūkus vietos piešiniui.

Pavieniai mokiniai apsiribojo tik vieno tipo (simboliniu arba grafiniu) daugybos vaizdavimu. 4 lentelės ketvirtą subkategoriją iliustruojantys pavyzdžiai rodo, kad vien simboliniu pavidalu daugybą pavaizdavę mokiniai daugybą supranta adityviai. Grafinį pavidalą pasirinkę mokiniai nupiešė tik daugiklių sandarą iš vienetų arba netgi nieko bendra su daugyba neturintį piešinį. Taigi apsiribojimas vien grafiniu vaizdavimo pavidalu gali reikšti net ir daugybos prasmės nesupratimą.

Kitos daugybos prasmės nesupratimo iliustracijos pristatytos 5 lentelėje.

5 lentelė. Kategorija: daugybos riboto supratimo raiška mokinių samprotavimuose (nesupratimas).

Subkategorija	Charakteringi 5 x 12 vaizdavimo pavyzdžiai
Reiškinio vaizdavimas atkartojant veiksmo užrašymą	   
Vieno arba kelių daugiklių sandaros vaizdavimas	   
Dekoratyvinis vaizdavimas	   

Vaizduodami grafiškai, dalis vaikų tiesiog atkartoja piešiniu daugybos reiškinio užrašą. Kartais jie sureikšmina patį veiksmo užrašą, ignoruodami daugybos rezultatą. 5 lentelės pirmą subkategoriją iliustruojančiuose pavyzdžiuose matyti, kad taip vaizduodami mokiniai ne visuomet išryškina multiplikatyviam supratimui aktualų skirtingą dauginamųjų vaidmenį. Turintys nedidelę matematikos mokymosi su „Lego" patirtį mokiniai daugybos reiškinio užrašą grafiniu pavidalu „iššifruoja" kiekvieną dauginamąjį ir dauginimo rezultatą pavaizduodami pagal skaičių užrašymo dešimtaine skaičiavimo sistema taisykles. Tačiau ir čia dėmesys tėra sutelkiamas skaičių vaizdavimo vienetais ar dešimtimis išoriniam pavidalui. Šis pavidalas neatspindi dauginimo struktūros, todėl taip pat negali būti laikomas daugybos supratimo išraiška.

Kiti vaikai, vaizduoja tik pirmojo daugiklio sandarą iš vienetų arba tarp piešiniu vaizduojamų daugiklių neįrašo veiksmo ženklo (5 lent., antra subkategorija). Nedidelę matematinio ugdymo su „Lego" patirtį turintys vaikai, panašiai piešia pirmojo ir antrojo daugiklio sandarą iš vienetų ir dešimčių atitinkančias konstruktoriaus detales, padėtas šalia.

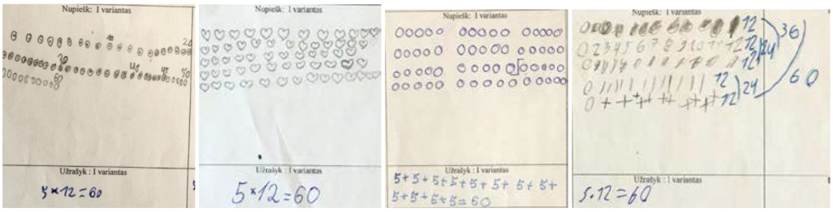
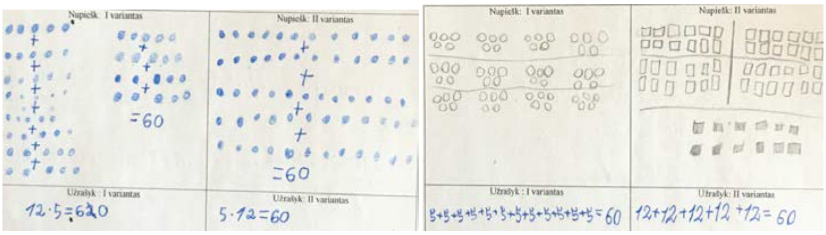
5 lentelės trečiąją subkategoriją iliustruojančiuose pavieniuose pavyzdžiuose matyti išskirtinis dėmesys išoriniam piešinio apipavidalinimui. Tai labiausiai nutolę nuo daugybos aiškinimo pavyzdžiai. Tokie mokinių atsakymai pasitaikė retai. Mokiniai nupiešė gyvenimišką daugybos pamoką, dauginimo stulpeliu menišką užrašą, iš „Lego" konstruktoriaus sudėliotą dauginimo rezultatą vaizduojantį skaičių. Visi šie požiūriai į dauginimą yra paviršutiniai.

III–IV klasės mokinių adityvaus ir multiplikatyvaus samprotavimo apie daugybą įvairovė

Tyrimo duomenų analizė atskleidė, kad nesuprantant daugybos, dauginimo vaizdavimas piešiniu gali būti labai įvairus. Suprantant ir sąmoningai taikant daugybos apibrėžimą, mokinių samprotavimo apie daugybą subkategorijų yra mažiau.

Paprasčiausiu (adityviu) požiūriu į daugybą grindžiamas supratimas remiasi vaikams mokykloje pirmiausia siūlomu daugybos, kaip kartotinės sudėties, apibrėžimu. 6 lentelės pirmą subkategoriją iliustruojantys pavyzdžiai kaip tik ir atspindi tokį požiūrį į daugybą.

6 lentelė. Kategorija: grafinės ir simbolinės raiškos dermė adityviame mokinių samprotavime apie daugybą.

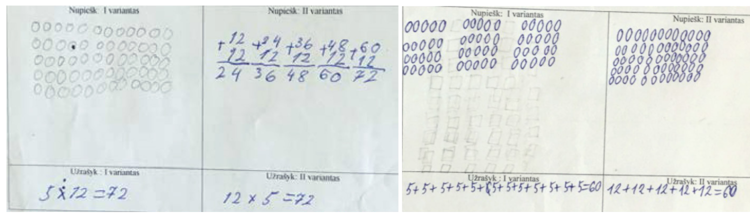
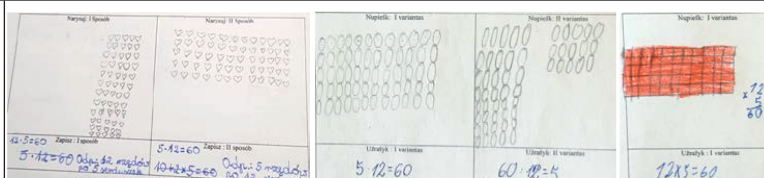
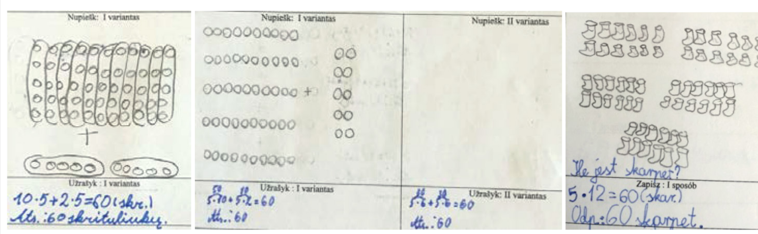
Subkategorija	Charakteringi 5 x 12 vaizdavimo pavyzdžiai
Daugybos adityvaus apibrėžimo taikymas	
Komutatyvumo savybės raiška adityviose struktūrose	

Kartais mokiniai iš eilės sudėlioja reikiamą kiekį sandaugą sudarančių vienetų ir vaizduodami skaičiuoja juos po vieną iš eilės. Pirmieji du 6 lentelės pirmą subkategoriją iliustruojantys pavyzdžiai kaip tik tai ir parodo. Adityvumo grafinei raiškai būdinga nevienodo ilgio eilutėmis pasižymintis, dažnai ne itin tvarkingai atrodantis vaizdas. Tolesniuose šią subkategoriją iliustruojančiuose pavyzdžiuose matyti grupavimo taikymas. Kartais grupavimas tvarkingumu primena multiplikatyviam samprotavimui apie daugybą būdingą masyvą. Taip pat grupavimas gali būti išryškintas vaizduojant laipsnišką vienodo kiekio prijungimą siekiant gauti dauginimo rezultatą atitinkantį vienetų kiekį.

Ne mažiau svarbi yra komutatyvumo savybės raiška mokiniams samprotaujant adityviai (6 lent., antroji subkategorija). Šios savybės supratimą vaikai demonstruoja sąmoningai sukeisdami vietomis grupės dydį ir grupių kiekį nusakančius skaičius. Taip gautos grupės to paties vaiko atsakyme gali būti pavaizduotos pasikartojančiais vienodais taškų rinkiniais, sujungtais sudėties ženklu. Arba adityvus daugybos supratimas gali būti išreikštas, naudojant užrašymą simboliais. Tuomet kartojamų vienetų rinkinių piešinyje išdėstymo tvarkingumas gali rodyti mokinio brandą pereiti prie multiplikatyvaus samprotavimo apie daugybą.

Nors retai, tačiau mokinių atsakymuose gali būti įžvelgtas net du požiūrius į daugybą vienu metu atspindintis samprotavimas (7 lent., pirma subkategorija). Viena vertus, mokinys daugybos rezultatui vaizduoti renkasi tvarkingu išdėstymu pasižyminčią vientiso arba suskaidyto masyvo struktūrą. Kita vertus, tą vaizdavimą papildo užrašydamas vienodų grupių sudėtį vaizduojančiu reiškiniu. Daugybos rezultatas gaunamas nuosekliai užrašant tarpinius skaičiavimus arba kartotinę sudėtį. Tuo pačiu matyti ir komutatyvumo savybės supratimas.

7 lentelė. Kategorija: grafinės ir simbolinės raiškos dermė multiplikatyviame samprotavime apie daugybą.

Subkategorija	Charakteringi 5 x 12 vaizdavimo pavyzdžiai
Vienalaikė adityvumo ir multiplikatyvumo raiška to paties mokinio samprotavime	
Komutatyvumo savybės raiška masyvo / ploto struktūrose	
Masyvo suskaidymas dauginant	

Multiplikatyviam samprotavimui būdinga komutatyvumo savybė dažniausiai piešiama gretinant vertikalų ir horizontalų stačiakampį masyvą (7 lent., antra subkategorija). Vertikalusis masyvas, tikriausiai dėl vietos stokos, neretai vaizduojamas suskaidytas. Masyvą sudarantiems vienetams vaizduoti pasirenkamos įvairiausios formos – širdelės, trikampiai, skrituliai, kryželiai, brūkšneliai ir net batukai (7 lent.). Dar gilesnį daugybos supratimą atitinkanti stačiakampė struktūra iš langelių (ploto modelis) pasitaikė tik vieno vaiko piešinyje. Taip pat ir nepriekaištingai tvarkingos, stulpelių ir eilučių lygiavimu pasižyminčios masyvo struktūros vaikų piešiniuose randamos ne itin dažnai. Žymiai dažniau mokiniai piešia beveik tvarkingas struktūras. Tai gali reikšti, kad dauguma jų tik kopijuoja matematikos vadovėliuose pasitaikančius daugybos aiškinimo modelius, bet aiškaus multiplikatyvaus daugybos supratimo dar ir nėra įgiję.

7 lentelės trečią subkategoriją iliustruojantys masyvo suskaidymai dauginant geriausiai parodo grafinės ir simbolinės raiškos dermę multiplikatyviame samprotavime. III–IV klasės mokiniai yra linkę suskaidyti daugybą remiantis dešimtaine skaičiaus sandara, nors pasitaiko ir kitokie suskaidymai (pvz. skaidymas į dvi lygias dalis). Kartais vaizduojant grafiškai, išskirta didesnė grupė piešiama dviejų eilučių masyvu. Toks vaizdavimo būdas padeda geriau aprėpti didesnius vienetų rinkinius ir skaičiuojant poromis pagreitina atsakymo radimą. Žvelgiant iš daugybos supratimo dimensijų pozicijos, pastarasis skaidymas gali

būti priskirtas tiek adityviam, tiek multiplikatyviam supratimui. Nes penki nedideli masyvai (7 lent., trečia subkategorija) nėra atkartoti tame pačiame stulpelyje simboliais užrašant daugybą. Todėl daugybos rezultatas gali būti suprantamas tiek kartotine sudėtimi sujungiant masyvus, tiek įsivaizduojant vieningą struktūrą iš penkių grupių po dvylika arba penkių grupių iš dviejų grupių po šešis, kaip yra įprasta samprotaujant multiplikatyviai.

Diskusija

Atlikta mokinių samprotavimo apie daugybą grafinės ir simbolinės raiškos analizė parodė, kad to paties amžiaus vaikų gebėjimai piešiniu ir simboliais pavaizduoti daugybą yra labai skirtingi. Palyginus maža tyrime dalyvavusių mokinių dalis daugybos nesupranta. Vaizduodami daugybą, jie klysta arba vietoje daugybos vaizduoja struktūrų fragmentus, realistinius piešinius ar daugybos užrašymo simbolių menines variacijas. III–IV klasėje vyrauja adityvus daugybos supratimas ir perėjimo iš adityvaus į multiplikatyvų supratimą būsena (vaizduojami dėl tvarkingumo stokos nepatogiai suskaičiuojami vienetų rinkiniai, pasitaikančiu masyvo modeliu skaičiavimuose naudojamasi nepilnavertiškai). Multiplikatyviai apie daugybą samprotaujančių mokinių nedaug. Tokie vaikai laisvai skaido ir transformuoja daugybai vaizduoti pasirinktą masyvą, pastebi ne tik daugybos komutatyvumo, bet ir distributyvumo savybes, kartais savo samprotavimą apie daugybą papildo žodžiais. Itin retai, daugybai vaizduoti pasirenka ploto modelį.

Kitų tyrėjų (Zhang et al., 2017) teigimu, net ir panašių matematinių gebėjimų mokiniai atlikdami užduotis gali remtis ne tais pačiais daugybos aiškinimo modeliais. Pastarasis faktas gali būti susijęs su skirtinga daugybos mokymosi patirtimi. Vadovėliuose nebūtinai nuosekliai yra pristatyti tik kai kurie daugybos aiškinimo modeliai. Mokytojas kartu su vaikais gilinasi, ieško sąsajų arba tik parodo mokiniams vadovėlyje sutinkamus daugybos vaizdavimo būdus.

Tradiciniais daugybos algoritmais patogu naudotis, bet jie patys savaime nėra vaizdūs ir aiškūs (Hurst & Hurell, 2018). Turint tikslą rasti sandaugą, gali pakakti ir vieno daugybos aiškinimosi būdo. Bet siekiant gilaus daugybos supratimo, tenka remtis didesne vaizdavimo būdų įvairove (Harries & Barmby, 2008). Tyrėjų teigimu, būtent vizualus vaizdavimas keliais būdais yra svarbus mokantis matematinių sąvokų, todėl mokykloje būtina mokyti naudotis daugybos aiškinimo modelių privalumais (Barmby et al., 2009; Harries & Barmby, 2008; Ormond, 2012; Young-Loveridge, 2006). Jei galutinis tikslas yra padėti išmokti lanksčiai spręsti problemas, tuomet būtina vaikams parodyti daugybę galimų tos pačios problemos vaizdavimo būdų (Young-Loveridge, 2006) ir juos įvairiapusiškai aptarti diskusijose. Mokinio gebėjimas išreikšti mintis kalba paspartina multiplikatyvaus mąstymo subrendimą (Brickwedde, 2011).

Čia pristatytame tyrime buvo nustatyta, kad dalis mokinių daugybą vaizduoja klaidingai. III–IV klasės mokiniai klysta užrašydami sandaugą ir tas klaidas mechaniškai perkelia į daugybos piešinį. Viena vertus, tai gali būti neatidumo pasekmė. Kita vertus, šios klaidos rodo nepakankamą įsigilinimą ir patogesnių daugybos aiškinimo modelių neįvaldymą.

Atlikdami daugybos taikymo užduotis, vaikai neretai plėtoja savo sprendimo strategijas, pasirinkdami klaidingas arba neracionalias operacijas. Jie neturi konceptualaus supratimo, todėl gali būti įsitikinę, kad 3 x 4 yra lygu 34 arba 7, o norėdami rasti 3 x 4, jie piešia daiktus, išdėstytus trijose grupėse po keturis, bet po to suskaičiuoja viską po vieną iš eilės arba naudoja kartotinę sudėtį (Zhang et al. 2017). Spręsdami uždavinius, mokiniai laipsniškai ugdosi gebėjimą skaidyti dauginamąjį į smulkesnes vienetų grupes, siekdami pasinaudoti jiems žinomais faktais (McMillan, 2018). Čia pristatytos apklausos metu gauti dalies mokinių atsakymai taip pat pasižymi daugiklių skaidymo į smulkesnius daugiklius užrašymo klaidomis. Tai gali reikšti, kad mokiniai intuityviai supranta galimybę supaprastinti daugybos skaičiavimą. Tačiau skaičiavimų paprastinimo patirtis yra nepakankama.

Atliktas tyrimas atskleidė ir kitus daliai mokinių būdingus daugybos vaizdavimo netikslumus. Vietoje daugybos aiškinimo dalis mokinių atkartoja veiksmo užrašymą arba vaizduoja vieno ar kelių daugiklių sandarą. Neretai ignoruojami daugiklių vaidmenys ir rezultato struktūra, kartais nukrypstama į dešimtainės skaičiavimo sistemos savybių išryškinimą vaizduojant pavienį daugiklį arba netgi vietoje daugybos aiškinimo išskirtinis dėmesys skiriamas meniniam daugybos fragmento piešinio apipavidalinimui.

Dauguma tyrime dalyvavusių mokinių net ir mokydamiesi III–IV klasėje daugybą vis dar supranta adityviai. Vaizduodami jie tebesiremia antroje klasėje jiems pasiūlytu daugybos, kaip kartotinės sudėties, apibrėžimu. Vaizduodami daugybos rezultato vienetus, vaikai piešia ne itin prisilaikydami tvarkos, kartais juos sunumeruoja, užrašo kartotinės sudėties apskaičiavimo tarpinius rezultatus. Visi šie būdai taip pat atspindi su adityviu daugybos supratimu susijusį skaičiavimų neracionalumą ir nepakankamą daugybos įvairiapusiško tyrinėjimo patirtį.

Kadangi svarbu išugdyti ir skaičiavimu, ir grupavimu grindžiamą skaičiaus supratimą, vaikus būtina supažinti ir su adityvaus, ir su multiplikatyvaus daugybos aiškinimo modeliais (Young-Loveridge, 2006). Vaikams būtina sudaryti sąlygas tyrinėti masyvo modelio savybes, atrasti taisykles ir kurti savo strategijas. Mokiniai turi įsitikinti, kad tai daryti yra lengviau ir įdomiau negu mokytis faktus mintinai (Harvey- Swanston, 2017).

Kartotinė sudėtis yra primityvesnė strategija už multiplikatyviame samprotavime dažnai naudojamą masyvo modelį (Young-Loveridge, 2006). Kaip sudėčiai ir atimčiai vaizduoti pagrindinė priemonė yra skaičių tiesė, taip daugybai vaizduoti labiausiai tinka masyvas (Harries, & Barmby, 2008). Šis modelis, ne tik palaiko kartotinės sudėties strategiją, bet ir skatina kitokį daugybos supratimą (Day & Hurell, 2015). Multiplikatyvios struktūros išauga iš grupių adityvaus kartojimo, bet taip pat pasižymi savitu sutvarkymu, kuris yra kitoks negu sudėties struktūrose (Huang, 2013). Jame daugiklis ir dauginamasis aiškiai įvardinti, o tai padeda geriau įsivaizduoti daugybos narių paskirtį, struktūrą ir sąsajas. Lyginant su kitais vaizdavimo būdais, masyvas aiškiau parodo komutatyvumo ir distributyvumo savybes (Milton et al., 2019).

Čia pristatytas didelės apimties kokybinis tyrimas parodė, kad III–IV klasėje vaizduojant daugybą masyvo struktūros piešiamos gana dažnai. Viena vertus, šioms vaikų nupieštoms struktūroms būdinga masyvo elementų formos įvairovė (skrituliai, trikampiai, pagaliukai, širdelės, batukai) gali reikšti, kad mokiniams masyvo modelis yra gerai pažįstamas. Kita vertus, mokiniai tesinaudoja viena daugybos pavaizdavimo masyvu galimybe, ir tai ne visuomet išlaikydami masyvo elementų išdėstymo ritmą. Iš kitų autorių atliktų tyrimų taip pat matyti, kad masyvo naudojimas daugybai vaizduoti vaikams ne visuomet aiškus (Harries & Barmby, 2008). Tyrimai, įskaitant čia pristatomo tyrimo duomenis, rodo, kad dauguma III–IV klasės mokinių vis tik nesupranta masyvo struktūros. Žymi dalis IV klasės mokinių negeba pavaizduoti daugybos skaičiavimo dviejų matmenų masyvu. Nors daugybos binarinė prigimtis labai svarbi, tie mokiniai daugindami ją ignoruoja (Barmby et al., 2009).

Kadangi ieškodami kito daugybos vaizdavimo būdo mokiniai retai ir ne visuomet korektiškai suskaido masyvo struktūrą, gali būti, kad jie net nėra to mokomi. Kitų mokslinėje ir metodinėje literatūroje aptariamų daugybos aiškinimo būdų tyrime dalyvavę mokiniai nenaudoja iš viso, nors kai kurie iš tų modelių yra tinkami papildomiems daugybos aspektams tyrinėti. Tai kelia klausimą, ar realiai vykstantis daugybos pristatymas mokiniams mokykloje yra gerai apgalvotas.

Tyrimo duomenys taip pat parodė, kad lyginant to paties mokinio pateiktus kelis daugybos vaizdavimo būdus, matyti tendencija įžvelgti komutatyvumo savybę net ir adityviose daugybos struktūrose. Tai atskleidžia įvairių daugybos aiškinimo modelių tinkamumą kai kurioms daugybos savybėms tyrinėti, taip pat gali rodyti mokinių pasirengimą pereiti prie į multiplikatyvų daugybos supratimą stipriau orientuotų aiškinimo modelių.

Besimokantiems daugybos vaikams visų pirma būtina suprasti tvermės dėsnį (savybės, charakteristikos išlieka tokios pačios, net jei išvaizda pasikeičia). Tvermės supratimas yra svarbus visumai iš lygių grupių suprasti. Bendra išdalintų į grupes vienetų visuma vis tiek išlieka ta pati, kuri buvo iki tol (Huang, 2013).

Teigiamą poveikį mokiniams pereiti iš adityvaus į multiplikatyvų mąstymą turi mokinių dėmesio tiesioginis nukreipimas į daugybos veiksmo narių vaidmenis ir sandaugos struktūrą (Brickwedde, 2011). Mokantis skirtingų tos pačios sandaugos raiškos būdų, gali būti naudingos materialios ir virtualios vaizdinės priemonės, nes jų naudojimas padeda praktiškai mokytis modeliuoti daugybos masyvo skaidymą į dauginamuosius. Taip atsiranda galimybė vizualiai palyginti dviejų sandaugų rezultatus net neatlikus daugybos veiksmų (Whitin, 2008). Tzur ir kiti (2013), taip pat McLeay (2008) siūlo nuosekliai prieiti nuo konkrečių priemonių prie schematinio vaizdavimo ir daugybos užrašo, parodant, kaip atsiranda masyvo modelis.

Multiplikatyvumo lauką įsivaizduojant kaip žemėlapį, vaikų kelias jame yra panašus į tinklą ir jo išplėtojimui reikia laiko. Kaip ir bet kuriai kitai sistemai, mokinių supažindinimas tik su kuria nors viena sistemos dalimi nėra veiksmingas (Brickwedde 2011). Kadangi tyrimo rezultatai parodė, kad daugumos tyrime dalyvavusių III–IV klasės mokinių daugybos supratimas nėra pakankamas sėkmingam matematikos mokymuisi vyresnėse klasėse, daugybos temos atskleidimo pradinėse klasėse kryptingumą ir detalumą verta pamėginti keisti.

Išvados

Tyrimu nustatyta, kad III–IV klasėje vyrauja adityvus daugybos supratimas ir perėjimo iš adityvaus į multiplikatyvų supratimą būsena. Sandaugą mokiniai įsivaizduoja, kaip kartotinės sudėties rezultatą. Taip suprantant daugybą, sąryšiai tarp daugybos veiksmo narių prisimenami tik pradedant ieškoti sandaugos. Mokiniai neskiria dėmesio tų sąryšių perkėlimui į sandaugą. Dėl to mažėja įvairovė užduočių, kuriose mokiniai geba pritaikyti daugybą.

Tiek adityviai, tiek multiplikatyviai samprotaujantys mokiniai pastebi ir taiko daugybos komutatyvumo savybę. Taigi ši savybė gali būti suprasta dviem būdais: keičiant daugiklių vaidmenis ir taip atrandant tą pačią sandaugą. Arba tyrinėjant sandaugos struktūroje atsispindintį daugybos narių pokyčio poveikį sandaugai.

Multiplikatyviam supratimui būdingą daugybos aiškinimo modelį mokiniai vaizduodami naudoja gana dažnai, bet nepilnavertiškai. Multiplikatyviai apie daugybą samprotauja mažai mokinių, bet ir tie apsiriboja masyvo modelio taikymu. Kiti daugybos aiškinimo modeliai mokiniams yra nežinomi, todėl ir jų suteikiamos daugybos aiškinimosi galimybės bei sąryšiai vaikams lieka neatskleisti.

Taigi panašu, kad dauguma III–IV klasės mokinių, samprotaudami apie daugybą, tik intuityviai taiko pastebėtus daugybos sąryšius. Jie dažnai ignoruoja daugybos veiksmo narių sąryšius su sandaugos struktūra ir retai naudojasi galimybe patogiai skaičiuoti tikslingai skaidydami daugiklius.

Remiantis tyrimo rezultatais, išryškėja trys mokinių supažindinimo su daugyba pradinėse klasėse tobulinimo kryptys: supažindinimo su vaizdavimo būdais nuoseklumo didinimas; tiesioginis vaizdavimo būdų pritaikymo skaičiavimams demonstravimas; papildomas supažindinimas su ploto ir lentelės modeliais.

Literatūra

Atkins, S. L. (2016). *Creating a language rich math class. Strategies and activities for building conceptual understanding.* New York: Routledge.

Barmby, P., Harries, A. V., & Higgins, S. E. (2010). Teaching for understanding/understanding for teaching. In *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*, 45–57. Retrieved from http://dro.dur.ac.uk/7939/1/7939.pdf?DDD29+ded4ss

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 217–241. doi: 10.1007/s10649-008-9145-1.

Brickwedde, J. (2011). *Transitioning from additive to multiplicative thinking: A design and teaching experiment with third through* fifth *Graders*. (Doctoral dissertation, University of Minnesota). Retrieved from ProQuest Dissertations & Theses. (UMI 3474726).

Day, L., & Hurell D. (2015). An explanation for the use of arrays to promote the understanding of mental strategies for multiplication. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *20*(1), 20–23.

Hazekamp, J. (2011). *Why before how. Singapore Math Computation Strategies*. USA: Crystal Springs Books.

Harries, T., & Barmby, P. (2008). Representing multiplication. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath, 206*, 37–41.

Harvey-Swanston, R. (2017). "I was good at my times-tables when I was nine, now I can't remember them": Learning multiplication facts with conceptual understanding. *Mathematics Teaching, 12*, 20–22.

Huang, A. (2013). *Developing multiplicative thinking with rectangular array tasks in a computer environment*. (Doctoral dissertation, University of California). Retrieved from ProQuest Dissertations & Theses. (UMI 3596891).

Hurst, Ch., & Hurrel, D. (2018). Algorithms are useful. Understanding them is even better! *Australian Primary Mathematics Classroom, 23*(3), 17–21.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1–16. doi: 10.1007/s10649-017-9761-8.

Mcintosh, J., & Rammage, J. (2011). *Multiplication and division (number and algebra: module 3). A guide for teachers - years F–4.* Retrieved from http://www.amsi.org.au/teacher_modules/pdfs/multiplication_and_division.pdf.

McLeay (2008). A model for multiplication. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath, 206*, 32–33.

McMillan, B. (2018). *Connecting the multiplicative field with student mathematical thinking*. (Doctoral dissertation, University Of California, Los Angeles). Retrieved from ProQuest Dissertations & Theses. (10977885).

Milton, J. H., Flores, M. M., Moore, A. J., Taylor, J. J., & Burton, M. E (2019). Using the concrete–representational–abstract sequence to teach conceptual understanding of basic multiplication and division. *Learning Disability Quarterly*, *42*(1), 32–45.

Ormond, Ch. (2012). Developing algebraic thinking: Two key ways to establish some early algebraic ideas in primary classrooms. *Australian Primary Mathematics Classroom, 17*(4), 13–21.

Radatz, H., & Schiper, W. (2007). *Handbuch f*ür *den Mathematik-Unterricht an Grundschulen* [Handbook for mathematics education at primary schools]. Hannover: Schroedel.

Sin, S. (2010). Considerations of quality in phenomenographic research. *International Journal of Qualitative Methods, 9*(4), 305–319.

Tzur, R., Johnson, H. L., McClintock, E., Kenney, R. H., Xin, Y.P., Si, L., Woordward, J., Hord, C., & Jin, X. (2013). Distinguishing schemes and tasks in children's development of multiplicative reasoning. *PNA, 7*(3), 85–101.

Young-Loveridge, J. (2006). Fostering multiplicative thinking using array-based materials. *Australian Mathematics Teacher, 61*(3), 34–40.

Watson, K. (2016). Laying the foundation for multiplicative thinking in year 2. *Australian Primary Mathematics Classroom, 21*(3), 16–20.

Whitin, Ph. (2008). Exploring a "Wonder" about multiplication. *Connect Magazine, 5*, 1–3.

Zhang, D., Ding, Y., Lee, S., & Chen, J. (2017). Strategic development of multiplication problem solving: Patterns of students' strategy choices. *The Journal of Educational Research*, *110*(2), 159–170.

Summary

AN EXPRESSION OF MATHEMATICAL CONNECTIONS IN MULTIPLICATION-RELATED THINKING IN THIRD AND FOURTH GRADES OF PRIMARY SCHOOL

Vaiva Grabauskienė
Vilnius University, Lithuania

Oksana Mockaitytė-Rastenienė
Vytautas Magnus University, Lithuania

Mathematical comprehension is closely related to a cognition of mathematical connections. A multiplication is a mathematical operation characterized by complex mathematical connections. Students are early introduced with the multiplication. Therefore, in primary school, not so developed cognition of mathematical connections may become a reason for difficulties in Maths.

A functionality of concept is based on a view to a multiplication. The analysis scientific literature revealed that a thinking of multiplication can be either additive or multiplicative.

Additionally, the multiplication learning has a variety of additive and multiplicative explanations. Because they use different specificity of visualization, the models are not equally suitable for teaching children about different properties of multiplication. Based on research, in Math classes, students are only introduced with few of the models, not covering a whole variety of them.

In the research, a paper and pencil type of survey consisted of 157 participants from 3rd and 4th Grades, eight different classes from four different schools. The students had to fill the table explaining multiplication of 5 x 12 in a form of writing and drawing.

The quantitative analysis of results has showed that in Grades 3 to 4, the additive view to multiplication is much more prevalent, in comparison to the multiplicative reasoning. The array model is used often but not in an extensive way. The students do not know other types of multiplicative type models. In conclusion, the results showed that students of Grades 3rd and 4th knew not enough about the mathematical connections. Therefore, teachers should pay more attention to teaching students various ways of visualizing, for children, to obtain a comprehensive understanding of the multiplication process.

Acknowledgement. This work was supported by a grant (No. 09.2.1-ESFA-K-728-01-0040) from the ESFA.

Keywords: additive reasoning, multiplication learning, multiplicative reasoning, primary mathematics education.

Received 15 April 2019; accepted 14 June 2019

Vaiva Grabauskienė
PhD., Associate Professor, Institute of Educational Sciences, Vilnius University, 9 Universiteto Street, LT-01131 Vilnius, Lithuania.
E-mail: vaiva.grabauskiene@fsf.vu.lt

Oksana Mockaitytė-Rastenienė
PhD Student, Education Academy, Vytautas Magnus University, Lithuania.
E-mail: oksanamockaityte@gmail.com