

УДК 330.356.7:658.6

**Олександр Григорович ЯНКОВИЙ**

доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економіки підприємства та організації підприємницької діяльності, Одеський національний економічний університет, Україна, e-mail: yankovoy\_a@ukr.net, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2413-855X>

**Володимир Олександрович ЯНКОВИЙ**

кандидат економічних наук, доцент кафедри економіки, права та управління бізнесом, Одеський національний економічний університет, Україна, e-mail: vladimir\_ya@ukr.net, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7005-5291>

**ПРОЦЕДУРА ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ФОНДООЗБРОЄНОСТІ НА ОСНОВІ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ**

Янковий, О. Г., Янковий, В. О. Процедура визначення оптимальної фондоозброєності на основі виробничих функцій // Вісник соціально-економічних досліджень : зб. наук. праць (ISSN 2313-4569); за ред. : М. І. Зверякова (голов. ред.) та ін. Одеса : Одеський національний економічний університет. 2018. № 4 (68). С. 77–87.

**Анотація.** У статті розглянуто теоретичні та прикладні аспекти процедури визначення оптимальної фондоозброєності підприємств за допомогою двофакторних виробничих функцій. Постійне нехтування питаннями управління фондоозброєністю, визначення її оптимальної величини на виробництві неухильно призводить до нераціонального використання основних виробничих фондів і робочої сили. А це неминуче проявляється у зниженні конкурентоспроможності окремих вітчизняних підприємств і галузей, в погіршенні їхнього фінансового стану, що зрештою призводить до банкрутства. У процесі проведеного математичного аналізу було здійснено пошук екстремумів найбільш популярних в економічних дослідженнях двофакторних виробничих функцій – Кобба-Дугласа, CES-функції, лінійної функції, функції Аллена за величиною фондоозброєності. На основі мікроекономічної теорії, зокрема, еквімаржинального принципу, перевірено гіпотезу одиначної граничної норми заміщення ресурсів в умовах оптимальної фондоозброєності. Обґрунтовано процедуру визначення оптимальної фондоозброєності в рамках будь-яких двофакторних виробничих функцій за допомогою граничної норми заміщення. Запропонована процедура полягає у визначенні граничної норми заміщення як відношення граничних продуктів виробничих факторів і прирівнювання його до одиниці, або до співвідношення середніх цін на ресурси. Отриманий взаємозв'язок дозволяє досить просто вивести формулу оптимальної фондоозброєності за умови, що показники варіації реалізованої продукції, основних фондів і оплати праці на підприємстві адекватно описуються відповідною виробничою функцією з ненульовим заміщенням. Визначено траєкторію росту випуску продукції на підприємстві в довгостроковому періоді, яка представляє собою ізокліну, що проходить через точки оптимальної фондоозброєності для зростаючих витрат ресурсів виробництва.

**Ключові слова:** оптимальна фондоозброєність; виробнича функція; еквімаржинальний принцип; гранична норма заміщення факторів.

**Александр Григорьевич ЯНКОВОЙ**

доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой экономики предприятия и организации предпринимательской деятельности, Одесский национальный экономический университет, Украина, e-mail: yankovoy\_a@ukr.net, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2413-855X>

**Владимир Александрович ЯНКОВОЙ**

кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики, права и управления бизнесом, Одесский национальный экономический университет, Украина, e-mail: vladimir\_ya@ukr.net, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7005-5291>

**ПРОЦЕДУРА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОНДОВООРУЖЕННОСТИ НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ**

Янковой, А. Г., Янковой, В. А. Процедура определения оптимальной фондовооруженности на основе производственных функций // Вестник социально-экономических исследований : сб. науч. трудов (ISSN 2313-4569); под ред. : М. И. Зверякова (глав. ред.) и др. Одесса : Одесский национальный экономический университет. 2018. № 4 (68). С. 77–87.

**Аннотация.** В статье рассмотрены теоретические и прикладные аспекты процедуры определения оптимальной фондовооруженности предприятий с помощью двухфакторных производственных функций.

Постоянное пренебрежение вопросами управления фондовооруженностью, определения ее оптимальной величины на производстве неуклонно приводит к нерациональному использованию основных производственных фондов и рабочей силы. А это неизбежно проявляется в снижении конкурентоспособности отдельных отечественных предприятий и отраслей, в ухудшении их финансового состояния, и в итоге приводит к банкротству. В процессе проведенного математического анализа был осуществлен поиск экстремумов наиболее популярных в экономических исследованиях двухфакторных производственных функций – Кобба-Дугласа, CES-функции, линейной функции, функции Аллена по величине фондовооруженности. На основе микроэкономической теории, в частности, эквимаржинального принципа, проверена гипотеза единичной предельной нормы замещения ресурсов в условиях оптимальной фондовооруженности. Обоснована процедура определения оптимальной фондовооруженности в рамках любых двухфакторных производственных функций с помощью предельной нормы замещения. Предложенная процедура заключается в определении предельной нормы замещения как отношения предельных продуктов факторов производства и приравнивание его к единице, или к соотношению средних цен на ресурсы. Полученная взаимосвязь позволяет достаточно просто вывести формулу оптимальной фондовооруженности при условии, что показатели вариации реализованной продукции, основных фондов и оплаты труда на предприятии адекватно описываются соответствующей производственной функцией с ненулевым замещением. Определена траектория роста выпуска продукции на предприятии в долгосрочном периоде, которая представляет собой изоклину, проходящую через точки оптимальной фондовооруженности для растущих затрат ресурсов производства.

**Ключевые слова:** оптимальная фондовооруженность; производственная функция; эквимаржинальный принцип; предельная норма замещения факторов.

### Oleksandr YANKOVYI

Doctor of Economics, Professor, Head of Enterprise Economics and Business Organization Department,  
Odessa National Economic University, Ukraine, e-mail: yankovoy\_a@ukr.net,  
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2413-855X>

### Volodymyr YANKOVYI

PhD in Economics, Assistant Professor of Department of Economics, Law and Business Management,  
Odessa National Economic University, Ukraine, e-mail: vladimir\_ya@ukr.net,  
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7005-5291>

## PROCEDURE FOR DETERMINING THE OPTIMAL CAPITAL-LABOR RATIO ON THE BASIS OF PRODUCTION FUNCTIONS

Yankovyi, O., Yankovyi, V. (2018). Procedure for determining the optimal capital-labor ratio on the basis of production functions. Ed.: M. Zveryakov (ed.-in-ch.) and others [Protsedura vyznachennia optymalnoi fondoozbroienosti na osnivi vyrobnychkykh funktsii; za red.: M. I. Zvieriakova (gol. red.) ta in.], Socio-economic research bulletin; Visnik social'no-ekonomichnih doslidzen' (ISSN 2313-4569), Odessa National Economic University, Odessa, No. 4 (68), pp. 77–87.

**Abstract.** The article discusses the theoretical and applied aspects of the procedure for enterprises optimal capital-labor ratio determining with using a two-factor production functions. The constant neglect of the capital-labor ratio managing issues, determining its optimal value at the production, steadily leads to the irrational use of basic production assets and labor. And this inevitably manifests itself in the competitiveness reducing of separate domestic enterprises and industries, in the deterioration of their financial condition, and ultimately leads to bankruptcy. As a result of the conducted mathematical analysis, the extremes were searched for the most popular in economic researches a two-factor production functions – Cobb-Douglas, CES-functions, linear functions, Allen functions by the value of the capital-labor ratio. On the basis of microeconomic theory, in particular, the equimarginal principle, the hypothesis of a single marginal rate of resources substitution in conditions of optimal capital-labor ratio was tested. The procedure for the optimal capital-labor ratio determining in the framework of any two-factor production functions with using the marginal rate of substitution is substantiated. The proposed procedure consists in determining the marginal rate of substitution as the ratio of the marginal products of production factors and equating it to a unit, or to the ratio of average prices for resources. The obtained interrelation allows us to simply derive the formula of optimal capital-labor ratio, provided that the variation indicators of sold products, fixed assets and wages at the enterprise are adequately described by the corresponding production function with a non-zero substitution. The trajectory of production growth at the enterprise in the long-term period, which is an isocline, passing through the points of optimal capital-labor ratio for the growing costs of production resources, is determined.

**Keywords:** optimal capital-labor ratio; production function; equimarginal principle; marginal rate of factors substitution.

**JEL classification:** D240; C610

**Постановка проблеми у загальному вигляді.** В процесі управління ринково-виробничою системою (галуззю, підприємством, регіоном) перед топ-менеджерами постійно постає завдання щодо підтримки найліпшої пропорції при розподілі капіталу на витрати, пов'язані з основними виробничими фондами ( $K$ ) і оплатою праці ( $L$ ). Співвідношення  $K/L$  відомо в економіці як фондоозброєність – показник, що характеризує ступінь оснащення праці, величину основних виробничих фондів, які використовує один працівник або робітник.

Вважається, що зростання фондоозброєності праці – один із важливіших чинників підвищення ефективності суспільного виробництва. На основі впровадження інноваційно-інвестиційних заходів, зокрема, автоматизації виробничих процесів, технічного переоснащення підприємств фондоозброєність праці в народному господарстві будь-якої держави неухильно зростає. У цьому запорука високої якості й конкурентоспроможності продукції (робіт, послуг), відповідність європейським і світовим стандартам. З цих позицій фондоозброєність українських підприємств внаслідок високої зношеності основних засобів виробництва дуже далека від необхідної, наприклад, світової.

Наведені положення значною мірою відображають сутність економічної політики в умовах жорсткого централізованого управління виробництвом з високою часткою ручної і слабо механізованої праці, коли заходи з впровадження новітньої техніки й технології супроводжувалися автоматичним зростанням попиту на додатковий випуск продукції. Якщо ж досліджується перехідна ринкова економіка, на кшталт, української, то взаємозв'язок між фондоозброєністю й обсягом реалізації проявляється не так чітко і функціонально. У цій ситуації ріст співвідношення  $K/L$  може не корелювати зі змінами попиту на додаткову продукцію, оскільки обсяг чистого доходу від реалізації залежить переважно від платоспроможності споживачів цієї продукції. При цьому важливим фактором попиту на додаткову продукцію виступає зростання реальної оплати праці в країні.

Тому зміну фондоозброєності ринково-виробничої системи варто розглядати й аналізувати в тісній ув'язці з динамікою її об'єму випуску продукції ( $Y$ ). Справа в тім, що надмірне зростання співвідношення  $K/L$  зазвичай призводить до погіршення використання основних виробничих фондів і, як наслідок, зниження фондовіддачі  $Y/K$ . Протилежна ситуація виникає у випадку необґрунтованого падіння фондоозброєності, що неминуче викликає зниження продуктивності праці  $Y/L$ .

Вважаємо, що краще казати про оптимальну фондоозброєність у сенсі максимізації об'єму випуску продукції при заданих загальних витратах капіталу (або мінімізації загальних витрат капіталу на заданий об'єм випуску продукції). Ця позиція ґрунтується на фундаментальному положенні мікроекономіки, згідно з яким оптимум товаровиробника досягається в точці, де зважені за цінами граничні продукти факторів виробництва співпадають. Реалізуючи цю умову, підприємство як товаровиробник досягає стану внутрішньої рівноваги, тобто найліпшого поєднання ресурсів  $K, L$ .

Як відомо, граничні категорії знайшли своє повноцінне втілення в теорії маржиналізму і, зокрема, в економіко-математичній гільці даного напрямку економічної науки – теорії виробничих функцій (ВФ).

**Аналіз досліджень і публікацій останніх років.** У вітчизняній літературі [1; 2; 3; 4] показнику фондоозброєності в рамках теорії ВФ приділялося недостатньо уваги. Зазвичай, автори обмежувалися розглядом співвідношення  $K/L$  як деякої похідної величини, котру можна розрахувати в рамках аналізованої ВФ. Дійсно, шляхом простих перетворень вихідна ВФ приводилася до вигляду, коли фондоозброєність виступала в якості нового чинника. Наприклад, якщо вихідна ВФ мала вигляд  $Y = f(K, L)$ , то поділив її ліву і праву частину на  $L$ , отримували  $Y/L = f(K, L, K/L)$ , тобто функцію, що відображає залежність продуктивності праці від трьох факторів, серед яких була й фондоозброєність.

Аналіз зарубіжних джерел останніх років показав, що підхід до вивчення показника  $K/L$ , який потенційно можна і треба оптимізувати на основі ВФ, теж повністю відсутній. Так, в роботах [5; 6] розглядаються питання визначення сутності і умови максимізації

неокласичних ВФ, але оцінка впливу рівня фондоозброєності на випуск продукції не наводиться. Проблеми дослідження еластичності заміщення капіталу, вкладеного в основні виробничі фонди і робочу силу, були обговорені авторами роботи [7], які аналізували CES-функцію (від англ. аббревіатури *Constant Elasticity of Substitution*). Вони обґрунтували, що більш висока еластичність заміщення може привести до більш високого рівня фондоозброєності з максимізацією випуску продукції, що має вирішальне значення для економічного зростання.

У роботі [8] розглянуто двофакторну ВФ з відомою еластичністю заміщення праці капіталом для оцінки зміни фондоозброєності при зміні граничної норми заміщення. Публікація [9] присвячена дослідженню переваг і недоліків CES-функції і ВФ Кобба-Дугласа в процесі їхнього використання при прогнозуванні виробництва.

В роботах [10; 11] розглядаються методичні питання застосування ВФ Кобба-Дугласа в задачах прогнозування довгострокового рівноважного рівня виробництва в залежності від двох факторів: праці і капіталу. Дослідження [12] висвітлює найбільш домінуючу проблему при оцінці параметрів CES-функції, яка пов'язана з локальними мінімумами цільової функції. Авторами запропоновано напрями подолання проблем побудови CES-функції, оскільки вона менш обмежувальна щодо взаємодії факторів  $K$  і  $L$  порівнянні з ВФ Кобба-Дугласа.

Певний прорив у дослідженні показника фондоозброєності на основі двофакторних ВФ спостерігався на початку XXI ст. в Одеському національному економічному університеті з появою наукових напрацювань у цьому напрямку [13, с.388–390; 14; 15], в котрих уперше визначено оптимум товаровиробника у випадку застосування ВФ Кобба-Дугласа в її класичному і динамізованому (з урахуванням фактору часу) варіантах.

**Виділення невіршених раніше частин загальної проблеми.** Вважаємо, що проблема пошуку оптимальної фондоозброєності за критерієм максимуму випуску продукції при заданих загальних витратах капіталу є досить актуальною й мало вивченою. Зокрема, певний теоретичний та практичний інтерес представляє визначення найліпшого співвідношення  $K/L$  для таких двофакторних ВФ, як CES-функція, функція Кобба-Дугласа, лінійна функція, функція Аллена та ін.

**Постановка завдання.** Метою проведеного дослідження була розробка процедури визначення оптимальної фондоозброєності в рамках двофакторних ВФ, а також аналіз умов її реалізації на практиці. Для досягнення висунутої цілі були поставлені такі завдання: 1) здійснити пошук екстремумів найбільш популярних ВФ за величиною  $K/L$  на базі математичного аналізу; 2) перевірити гіпотезу одиночної граничної норми заміщення субституційних ВФ в умовах оптимальної фондоозброєності; 3) обґрунтувати процедуру визначення оптимального співвідношення  $K_1 / L_1$  в рамках різних двофакторних ВФ за допомогою граничної норми заміщення; 4) на основі розробленої процедури визначення оптимальної фондоозброєності в рамках різних двофакторних ВФ побудувати траєкторію росту, що відображає дію ефекту масштабу виробництва.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Визначення екстремумів найбільш популярних ВФ за величиною фондоозброєності  $K/L$  на основі математичного аналізу почнемо з функції Кобба-Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad (1)$$

де  $A$  – коефіцієнт масштабу ( $0 < A$ );  $\alpha, \beta$  – невідомі параметри, що характеризують еластичність випуску продукції за виробничими факторами ( $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ ).

Надалі вважається, що всі змінні моделей  $Y, K, L$  представлені у вартісному вимірі.

Як показано в роботах [14; 15; 16], при заданих витратах капіталу  $C = K + L$  ВФ (1) досягає свого максимуму

$$Y_{MAX} = A \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\alpha} L_1^{\alpha+\beta} = A \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\beta} K_1^{\alpha+\beta} \quad (2)$$

при

$$K_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} C_1; \quad L = \frac{\beta}{\alpha + \beta} C_1. \quad (3)$$

Звідки оптимальна фондоозброєність дорівнює:

$$K_1 / L_1 = \alpha / \beta. \quad (4)$$

Отже, вкладаючи капітал в основні виробничі фонди і оплату праці в пропорції (4) за умови, що залежність між випуском продукції і двома агрегованими виробничими факторами адекватно описується ВФ Кобба-Дугласа, товаровиробник отримує найбільший випуск продукції (2), або забезпечить мінімальні загальні витрати капіталу:

$$C_{MIN} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} K_1 = \frac{\alpha + \beta}{\beta} L_1. \quad (5)$$

Розглянемо CES-функцію – другу за популярністю ВФ:

$$Y = A_0 [A_1 K^{-p} + (1 - A_1) L^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}}, \quad (6)$$

де  $A_0$  – коефіцієнт шкали ( $0 < A_0$ );  $A_1$  – ваговий коефіцієнт виробничого фактору ( $0 < A_1 < 1$ );  $p$  – коефіцієнт заміщення ( $-1 < p$ );  $\gamma$  – показник ступеня однорідності ( $0 < \gamma$ ).

Пошук екстремумів і виведення формули оптимальної фондоозброєності для ВФ (6) наведено в роботі [17]:

$$Y_{MAX} = A_0 L_1^\gamma [(1 - A_1)(K_1 / L_1 + 1)]^{-\frac{\gamma}{p}} = A_0 K_1^\gamma [A_1(1 + L_1 / K_1)]^{-\frac{\gamma}{p}} \quad (7)$$

при

$$K_1 = \frac{\left(\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}}{1 + \left(\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}} C_1; \quad L_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}} C_1. \quad (8)$$

Із формул (8) оптимальна фондоозброєність дорівнює:

$$K_1 / L_1 = \left(\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}. \quad (9)$$

Таким чином, застосовуючи пропорцію (9) за умови, що залежність між випуском продукції і агрегованими виробничими факторами адекватно описується CES-функцією, товаровиробник максимізує випуск продукції (7), або забезпечує мінімальні загальні витрати капіталу

$$C_{MIN} = \frac{\left[1 + \left(\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}\right]}{\left[\left(\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}\right]} K_1 = \left[1 + \left(\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}\right] L_1. \quad (10)$$

Нехай діяльність ринково-виробничої системи досить точно апроксимується лінійною функцією

$$Y = A_2K + A_3L, \quad (11)$$

де  $A_2$   $A_3$  – коефіцієнти при виробничих факторах, що характеризують їх граничні продукти.

Запишемо умову максимізації випуску продукції при заданих загальних витратах капіталу  $C = K + L$ :

$$Y = A_2K + A_3(C - K) \rightarrow \max. \quad (12)$$

Знайдемо першу частинну похідну вираження (12) за змінною  $K$  і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = A_2 - A_3 = 0. \quad (13)$$

Вираження (13) показує, що максимум випуску продукції для лінійної ВФ не залежить від обраних значень  $K$ ,  $L$ , але повинна виконуватись умова  $A_2 = A_3 = a$ . Якщо вона виконується, то будь-яка точка на прямій  $Y = a(K + L)$  буде задовольняти умову (12) і поставлена задача визначення оптимальної фондоозброєності має нескінченну множину рішень. При цьому максимум продукції товаровиробника дорівнює  $Y_{MAX} = aC_1$ , а мінімальні загальні витрати капіталу складають  $C_{MIN} = Y/a$ .

Нехай діяльність ринково-виробничої системи досить точно апроксимується ВФ Аллена [18]:

$$Y = A_4KL - A_5K^2 - A_6L^2, \quad (14)$$

де  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_6$  – невідомі коефіцієнти ( $0 < A_4, A_5, A_6$ ).

Запишемо умову максимізації випуску продукції при заданих загальних витратах капіталу  $C = K + L$ :

$$Y = A_4K(C - K) - A_5K^2 - A_6(C - K)^2 = -K^2(A_4 + A_5 + A_6) + CK(A_4 + 2A_6) - A_6C^2 \rightarrow \max. \quad (15)$$

Знайдемо першу частинну похідну вираження (15) за змінною  $K$  і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = -2(A_4 + A_5 + A_6)K + C(A_4 + 2A_6) = 0. \quad (16)$$

Звідси отримаємо критичні точки

$$K_1 = \frac{A_4 + 2A_6}{2(A_4 + A_5 + A_6)} C_1; \quad L_1 = \frac{A_4 + 2A_5}{2(A_4 + A_5 + A_6)} C_1 \quad (17)$$

і оптимальну фондоозброєність

$$K_1 / L_1 = \frac{A_4 + 2A_6}{A_4 + 2A_5}. \quad (18)$$

Підставляючи значення  $K_1$ ,  $L_1$  із формули (17) у ВФ Аллена, визначимо максимум випуску продукції в умовах оптимальної фондоозброєності:

$$\begin{aligned} Y_{MAX} &= A_4K_1C_1 \frac{A_4 + 2A_5}{2(A_4 + A_5 + A_6)} - A_5K_1^2 - A_6C_1^2 \left[ \frac{A_4 + 2A_5}{2(A_4 + A_5 + A_6)} \right]^2 = \\ &= A_4L_1C_1 \frac{A_4 + 2A_6}{2(A_4 + A_5 + A_6)} - A_6L_1^2 - A_5C_1^2 \left[ \frac{A_4 + 2A_6}{2(A_4 + A_5 + A_6)} \right]^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким чином, вкладаючи капітал в основні виробничі фонди і оплату праці в пропорції (18) за умови, що залежність між випуском продукції і двома агрегованими

виробничими факторами адекватно описується ВФ Аллена, товаровиробник отримує найбільший випуск продукції (19), або забезпечить мінімальні загальні витрати капіталу

$$C_{MN} = \frac{2(A_4 + A_5 + A_6)}{A_4 + 2A_6} K_1 = \frac{2(A_4 + A_5 + A_6)}{A_4 + 2A_5} L_1. \quad (20)$$

Здійснимо тепер перевірку гіпотези одиночної граничної норми технологічного заміщення  $MRTS$  (від англ. абрєвіатури *Marginal Rate of Technical Substitution*) в умовах оптимальної фондоозброєності товаровиробника. Для цього будемо послідовно підставляти вираження  $K_1 / L_1$  в формули  $MRTS_{LK}$  для розглянутих вище ВФ:

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{f'_L(K, L)}{f'_K(K, L)}, \quad (21)$$

де  $f'_K(K, L)$ ,  $f'_L(K, L)$  – перші частинні похідні відповідної ВФ за змінними  $K$ ,  $L$ , вираженими в грошових одиницях.

Для ВФ Кобба-Дугласа

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{f'_L(K, L)}{f'_K(K, L)} = \frac{A\beta K^\beta L^{\beta-1}}{A\alpha K^{\alpha-1} L^\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{K}{L}. \quad (22)$$

Підставляючи в (22) вираження (4), отримаємо

$$MRTS_{LK} = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{K_1}{L_1} = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta} = 1 \quad (23)$$

і гіпотеза, що перевіряється, підтверджується.

Аналогічно, для CES-функції

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{f'_L(K, L)}{f'_K(K, L)} = \frac{\gamma(1-A_1)Y^{1+\frac{p}{\gamma}}}{L^{1+p}A_0^\gamma} : \frac{\gamma A_1 Y^{1+\frac{p}{\gamma}}}{K^{1+p}A_0^\gamma} = \frac{1-A_1}{A_1} \left(\frac{K}{L}\right)^{1+p}. \quad (24)$$

Підставляючи в (24) вираження (9), отримаємо

$$MRTS_{LK} = \frac{1-A_1}{A_1} \left(\frac{K_1}{L_1}\right)^{1+p} = \frac{1-A_1}{A_1} \left[\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}\right]^{1+p} = 1. \quad (25)$$

Знову підтверджується висунута гіпотеза.

Для лінійної функції

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{f'_L(K, L)}{f'_K(K, L)} = \frac{A_3}{A_2}. \quad (26)$$

Як було показано вище (див. формулу (13)), умовою отримання максимального випуску продукції є рівність  $A_2 = A_3$ . Тому, очевидно, що при оптимальній фондоозброєності товаровиробника вираження (26) дорівнює одиниці і гіпотеза, що перевіряється, справедлива.

Для ВФ Аллена

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{f'_L(K, L)}{f'_K(K, L)} = \frac{A_4 - 2A_5 \left(\frac{K}{L}\right)}{A_4 \left(\frac{K}{L}\right) - 2A_6}. \quad (27)$$

Підставляючи в (27) вираження (18), отримаємо

$$MRTS_{LK} = \frac{A_4 - 2A_5 \left( \frac{K}{L} \right)}{A_4 \left( \frac{K}{L} \right) - 2A_6} = \frac{A_4 - 2A_5 \frac{A_4 + 2A_6}{A_4 + 2A_5}}{A_4 \frac{A_4 + 2A_6}{A_4 + 2A_5} - 2A_6} = \frac{A_4^2 - 4A_5A_6}{A_4^2 - 4A_5A_6} = 1 \quad (28)$$

і висунута гіпотеза справедлива.

Таким чином, для чотирьох розглянутих субституційних ВФ припущення про одиничну граничну норму технологічного заміщення  $MRTS$  в умовах оптимальної фондоозброєності підтвердилося. Спробуємо узагальнити отримані результати й обґрунтувати процедуру визначення оптимального співвідношення  $K_1/L_1$  в рамках різних субституційних двофакторних ВФ за допомогою граничної норми технологічного заміщення. З цією метою скористаємось відомими положеннями мікроекономіки про вимоги щодо оптимуму товаровиробника, які забезпечують внутрішню рівновагу ринково-виробничій системі [19; 20].

Вимога 1. Співвідношення граничних продуктів виробничих факторів  $MP_K$ ,  $MP_L$  повинно дорівнювати співвідношенню їхніх середніх цін  $p_K$ ,  $p_L$ :

$$\frac{MP_K}{MP_L} = \frac{p_K}{p_L}. \quad (29)$$

Вимога 2. Граничні продукти виробничих факторів, що припадають на 1 грошову одиницю, мають бути однакові:

$$\frac{MP_K}{p_K} = \frac{MP_L}{p_L}. \quad (30)$$

Другу умову часто називають еквімаржинальним принципом – зважені за цінами граничні продукти факторів виробництва мають бути вирівняні. Реалізуючи ці вимоги, ринково-виробнича система досягає стану внутрішньої рівноваги, тобто найліпшого поєднання ресурсів  $K$ ,  $L$ , а значить – оптимальної фондоозброєності.

Очевидно, що у випадку вимірювання всіх змінних  $Y$ ,  $K$ ,  $L$  у грошових одиницях граничні продукти факторів виробництва теж знаходяться у вартісному вираженні. Тому формулу (30) можна представити так:

$$MP_K^* = MP_L^*, \quad (31)$$

де  $MP_K^*$ ,  $MP_L^*$  – граничні продукти факторів виробництва, виражені через їх кількості в натуральному вимірі.

Із формули (31) випливає, що в точці оптимальної фондоозброєності гранична норма технологічного заміщення виробничих факторів набуває вигляд:

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L^*}{MP_K^*} = 1. \quad (32)$$

Легко довести справедливість і зворотного твердження: якщо для граничної норми заміщення виробничих факторів виконується умова (32), то товаровиробник знаходиться в точці оптимальної фондоозброєності.

Отже, приходимо до наступного висновку: з метою визначення координат оптимальної фондоозброєності на основі двофакторної ВФ достатньо знайти вираження її граничної норми технологічного заміщення і прирівняти до одиниці. У цьому випадку передбачається, що граничні продукти факторів виробництва виражені в натуральних одиницях. Інакше кажучи, визначення оптимальної фондоозброєності в рамках двофакторної ВФ полягає у виразі співвідношення  $K_1/L_1$  за умови



$$MRTR_{LK} = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{f'_L(K,L)}{f'_K(K,L)} = 1. \quad (33)$$

Очевидно, що в довгостроковому періоді може відбуватися одночасна зміна використовуваних виробничих факторів  $K$ ,  $L$  при збільшенні обсягу випуску продукції  $Y$ . Цей процес графічно відображається зростанням ізокошти при відповідному пересуванні ізокванти з належними точками рівноваги товаровиробника, які з'єднуються кривою – траєкторією росту (рис. 1).

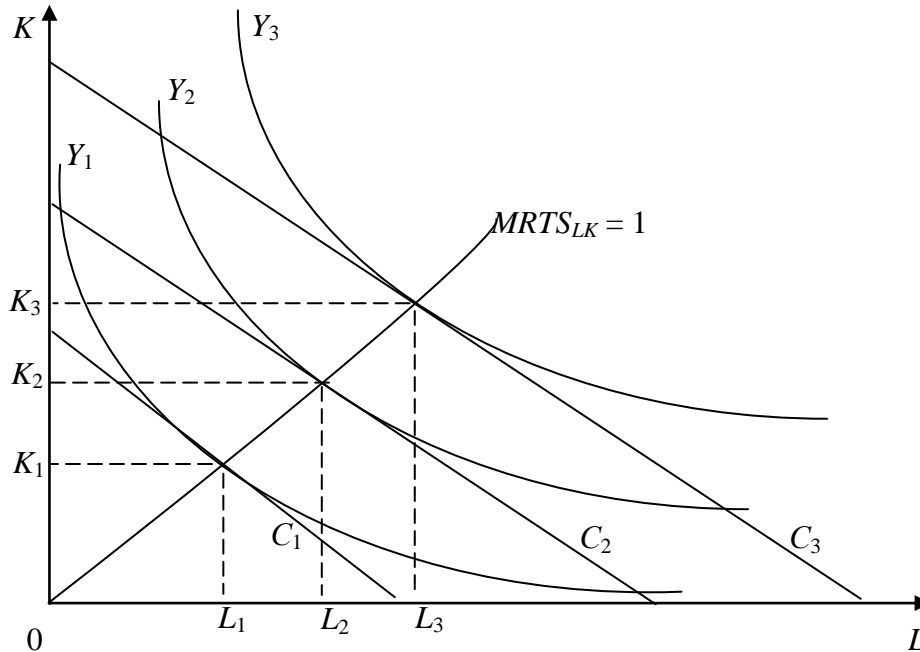


Рис. 1. Траєкторія росту на карті ізоквант та ізокошт виробничої функції, що відображає дію ефекту масштабу виробництва ( $Y_3 > Y_2 > Y_1$ ;  $C_3 > C_2 > C_1$ ) (побудовано авторами на основі [19; 20])

Траєкторія росту представляє собою ізокліну, для якої виконується вимога (33). Вона поєднує точки рівноваги товаровиробника відповідно до збільшення сукупних витрат капіталу  $C = K + L$  при рості обсягів виробництва  $Y$ . Її форма залежить від ефективності нарощування обсягів випуску продукції і відображає дію ефекту масштабу виробництва.

У випадку, коли підприємства випускають однорідну, або умовно-однорідну продукцію, наприклад, вугільні шахти, цементні заводи тощо, деякі змінні ВФ, наприклад,  $Y$ ,  $L$  можуть вимірюватися в натуральних одиницях.

Тоді із формули (29) випливає, що вираження (33) приймає наступний вигляд:

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\partial Y}{\partial K} : \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{f'_K(K,L)}{f'_L(K,L)} = \frac{p_K}{p_L}. \quad (34)$$

У даній ситуації траєкторія росту на рис. 1 буде визначатися ізокліною, для якої виконується вимога (34).

Із формул (33), (34) оптимальна фондоозброєність  $K_1/L_1$  знаходиться досить просто.

**Висновки і перспективи подальших розробок.** Перевагою проведеного дослідження вважаємо той факт, що проблема управління фондоозброєністю, необхідність пошуку її оптимальної величини на виробництві поставлена перед широким загальним вітчизняним та зарубіжним вченим-економістам і практикам. Обґрунтовано її актуальність і значущість для економіки будь-якої держави, в тому числі й України. Вперше запропоновано процедуру визначення оптимальної фондоозброєності на основі субституційних виробничих функцій, теоретичним фундаментом якої є еквімаржинальний принцип із мікроекономіки.

В якості перспектив розвитку даного напрямку варто указати на необхідність дослідження оптимальної фондоозброєності в рамках інших ВФ, наприклад, функції Солоу, функції Леонтьєва тощо.

### Література

1. Вітлінський В. В. *Моделювання економіки* : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2003. 408 с.
2. Грабовецький Б. Є. *Виробничі функції : теорія, побудова, використання в управлінні виробництвом* : монографія. Вінниця : УНІВЕРСУМ, 2006. 137 с.
3. Кулик А. Б. *Моделювання виробничих функцій* // Вчені записки. 2010. № 12. С. 283–288.
4. Мороз О. В., Грабовецький Б. Є., Міронова Ю. В. *Виробничі функції в економічних дослідженнях на мікрорівні* // Економічний простір. 2010. № 35. С. 112–119.
5. Pavelescu F. *Some aspects of the translog production function estimation* // Romanian Journal of Economics. 2011. Vol. 32. Issue 1 (41). Pp. 131–150.
6. Turner K., Lange I., Lecca P., Jung Ha S. *Econometric estimation of nested production functions and testing in a computable general equilibrium analysis of economy-wide rebound effects* // Stirling Economics Discussion Paper 2012-08, Stirling Management School, University of Stirling. 2012.
7. Daniels Gerald, Kakar Venoo. *Economic growth and the CES production function with human capital economics* // Bulletin. 2017. Vol. 37. Issue 2. Pp. 930–951. URL: <https://ssrn.com/abstract=2878578> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2878578>.
8. Alvarez-Cuadrado F., Van Long N., Poschke M. *Capital-labor substitution, structural change, and growth* // Theoretical Economics. 2017. Vol. 12. Issue 3. Pp. 1229–1266. DOI: 10.3982/te2106
9. Miller E. *An assessment of CES and Cobb-Douglas production functions*. Washington, D.C: Congressional Budget Office. 2008.
10. Goonatilake R. *Impacts of labor and capital on manufacturing production function* // British Journal of Economics, Management & Trade. 2014. Vol. 4. Issue 2. Pp. 158–172. DOI: 10.9734/bjemt/2014/5619.
11. Xianbai Li. *The Cobb-Douglas production function, costs, factor quantity employed and parametric estimation: a firm level perspective* // Journal of Beijing Institute of Technology. 2008. Vol. 10. Issue 6. Pp. 70–76.
12. Henningsen A., Henningsen G. *On estimation of the CES production function – revisited* // Economics Letters. 2012. Vol. 115. Pp. 67–69. DOI: 10.1016/j.econlet.2011.12.007.
13. *Економетрія* : навч. посіб. / За ред. А. Ф. Кабака, О. В. Проценка. Одеса : НМЦО-ОДЕУ, 2003. 562 с.
14. Янковий В. О. *Прогнозування зони беззбитковості інвестицій у хлібопекарську промисловість за допомогою виробничої функції* // Вісник соціально-економічних досліджень. Одеса : ОДЕУ. 2006. № 22. С. 410–414.
15. Черевко Є. В. *Оптимальна фондоозброєність та початковий капітал* // Вісник соціально-економічних досліджень. Одеса : ОДЕУ. 2007. № 26. С. 359–365.
16. Янковой В. А. *Математический анализ неоклассических производственных функций* // Економіка : реалії часу. 2016. № 2. С. 78–83. URL: <http://economics.opu.ua/files/archive/2016/No2/78.pdf>.
17. Янковий В. О. *Фондоозброєність у машинобудуванні України : реальність і оптимальність* // Економіка України. 2018. № 8. С. 16–29.
18. Koval V., Slobodianiuk O, Yankovyi V. *Production forecasting and evaluation of investments using Allen two-factor production function* // Baltic Journal of Economic Studies. 2018. Vol. 4, No. 1. Pp. 219–226. DOI: <https://doi.org/10.30525/2256-0742/2018-4-1-219-226>.
19. Гальперин В. М. *Микроэкономика*. Институт «Экономическая школа». Санкт-Петербург, 2004. 482 с.
20. Perloff J. M. (2014). *Microeconomics*. Chapter 7 : Costs. URL: [http://wps.aw.com/bp\\_perloff\\_microecon\\_7/242/61990/15869495.cw/content/index.html](http://wps.aw.com/bp_perloff_microecon_7/242/61990/15869495.cw/content/index.html).

### References

1. Vitlinskyi, V. V. (2003). Economy modeling [Modeliuvannia ekonomiky], KNEU, Kyiv, 408 s. [in Ukrainian]
2. Grabovetskyi, B. Ye. (2006). *Production functions: theory, construction, using in production management*: monograph [Vyrobnychi funktsii: teoriia, pobudova, vykorystannia v upravlinni vyrobnytstvom: monohrafiia], UNIVERSUM, Vinnytsia, 137 s. [in Ukrainian]
3. Kulyk, A. B. (2010). *Modeling of production functions* [Modeliuvannia vyrobnychych funktsii], Vcheni zapysky, No. 12, s. 283–288 [in Ukrainian]

4. Moroz, O. V., Grabovetskyi, B. Ye., & Mironova, Yu. V. (2010). *Production functions in economic research at the microlevel* [Vyrobnychi funktsii v ekonomichnykh doslidzhenniakh na mikrorivni], Ekonomichnyi prostir, No. 35, s. 112–119 [in Ukrainian]
5. Pavelescu, F. (2011). *Some aspects of the translog production function estimation*, Romanian Journal of Economics, Vol. 32, Issue 1 (41), pp. 131–150.
6. Turner, K., Lange, I., Lecca, P., Jung, Ha S. (2012). *Econometric estimation of nested production functions and testing in a computable general equilibrium analysis of economy-wide rebound effects*, Stirling Economics Discussion Paper 2012-08, Stirling Management School, University of Stirling.
7. Daniels, Gerald and Kakar, Venoo (2017). *Economic growth and the CES production function with human capital economics*, Bulletin, Vol. 37, Issue 2, pp. 930–951, available at: <https://ssrn.com/abstract=2878578> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2878578>.
8. Alvarez-Cuadrado, F., Van Long, N., & Poschke, M. (2017). *Capital-labor substitution, structural change, and growth*, Theoretical Economics, Vol. 12, Issue 3, pp. 1229–1266. DOI: 10.3982/te2106.
9. Miller, E. (2008). *An assessment of CES and Cobb-Douglas production functions*, D.C: Congressional Budget Office, Washington.
10. Goonatilake, R. (2014). *Impacts of labor and capital on manufacturing production function*. British Journal of Economics, Management & Trade, Vol. 4, Issue 2, pp. 158–172. DOI: 10.9734/bjemt/2014/5619.
11. Xianbai, Li. (2008). *The Cobb-Douglas production function, costs, factor quantity employed and parametric estimation: a firm level perspective*, Journal of Beijing Institute of Technology, Vol. 10. Issue 6, pp. 70–76.
12. Henningsen, A., & Henningsen, G. (2012). *On estimation of the CES production function – revisited*, Economics Letters, Vol. 115, pp.67–69. DOI: 10.1016/j.econlet.2011.12.007.
13. *Econometrics* (2003). Ed. by A. F. Kabak, O. V. Protsenko [Ekonometriia; za red. A. F. Kabaka, O. V. Protsenko], NMTSO-ODEU, Odesa, 562 s. [in Ukrainian]
14. Yankovyi, V. O. (2006). *Forecasting the break-even area of investment in the baking industry through the production function* [Prohnozuvannia zony bezzbytkovosti investytsii u khlibopekarsku promyslovist za dopomohoiu vyrobnycioi funktsii], Visnik social'no-ekonomichnih doslidzen', No. 22, s. 410–414 [in Ukrainian]
15. Cherevko, Ye. V. (2007). *The optimal capital-labor ratio and initial capital* [Optymalna fondoozbroienist ta pochatkovyi kapital], Visnik social'no-ekonomichnih doslidzen', No. 26, s. 359–365 [in Ukrainian]
16. Yankovyi, V. O. (2016). *Mathematical analysis of neoclassical production functions* [Matematicheskiy analiz neoklassicheskikh proizvodstvennykh funktsiy], Ekonomika: realii chasu, No. 2 (24), s. 78–83, available at: <http://economics.opu.ua/files/archive/2016/No2/78.pdf> [in Russian]
17. Yankovyi, V. O. (2018). *Capital-labor ratio in machine building of Ukraine: reality and optimality* [Fondoozbroienist u mashynobuduvanni Ukrainy: realnist i optimalnist], Ekonomika Ukrainy, No. 8, s. 16–29 [in Ukrainian]
18. Koval, V., Slobodianiuk, O., Yankovyi, V. (2018). *Production forecasting and evaluation of investments using Allen two-factor production function*, Baltic Journal of Economic Studies, Vol. 4, No. 1, pp. 219–226. DOI: <https://doi.org/10.30525/2256-0742/2018-4-1-219-226>.
19. Galperin, V. M. (2004). *Microeconomics* [Mikroekonomika], Institut «Ekonomicheskaya shkola», Sankt-Peterburg, 482 s. [in Russian]
20. Perloff, J. M. (2014). *Microeconomics. Chapter 7: Costs*, available at: [http://wps.aw.com/bp\\_perloff\\_microecon\\_7/242/61990/15869495.cw/content/index.html](http://wps.aw.com/bp_perloff_microecon_7/242/61990/15869495.cw/content/index.html).