

CZU: 004.728.5:[519.852:517.9]

SOLUȚIONAREA PROBLEMEI DE TRANSPORT PE REȚEA CA PROBLEMĂ A PROGRAMĂRII NELINIARE

Tatiana PAȘA

Universitatea de Stat din Moldova

În lucrare se face o trecere în revistă a metodelor care pot fi aplicate pentru soluționarea problemei neliniare de transport pe rețea formulată ca problemă a programării neliniare. Sunt formulate noțiunile de bază și proprietățile care trebuie să le satisfacă funcțiile pentru a aplica metodele programării matematice. Sunt descriși algoritmi ce permit soluționarea problemelor cu funcții diferentiabile, cu funcții nediferentiabile și cu funcții separabile.

Cuvinte-cheie: *gradient, antigradient, hessian, funcții diferentiabile, funcții nediferentiabile, funcții separabile.*

SOLVING THE TRANSPORT PROBLEM ON A NETWORK AS NON-LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

In this paper we review the methods that can be applied to solve the non-linear transport problem on a network, formulated as non-linear programming problem. The basic concepts and properties that must be satisfied the functions in order to apply mathematical programming methods are formulated. Algorithms that let us solve problems with differentiable, non-differentiable and separable functions are described.

Keywords: *gradient, antigradient, hessian, differentiable functions, non-differentiable functions, separable functions.*

Introducere

O problemă de transport presupune că este necesară minimizarea (costului, pierderilor) sau maximizarea (profitului) unei funcții, astfel încât să fie satisfăcute un șir de condiții descrise de restricțiile egalități și/sau inegalități. În acest context putem spune că, de fapt, avem de soluționat o problemă de optimizare a programării liniare sau neliniare în dependență de funcția obiectiv și de restricțiile egalități și/sau inegalități care pot fi liniare sau neliniare.

În cazul în care funcția obiectiv și restricțiile sunt liniare vorbim despre o problemă a programării liniare pentru soluționarea căreia există deja o teorie bine dezvoltată, bazele căreia au fost puse odată cu algoritmul simplex [1-4].

Nelinaritatea problemei provine din rigurozitatea descrierii fenomenelor economice, ceea ce duce la apariția unor dificultăți în determinarea soluției optime. Deși nu este formulată o metodă eficientă de soluționare a problemei de programare neliniară sub forma sa generală, se vor pune condiții funcției obiectiv și/sau restricțiilor, astfel soluționându-se cazuri particulare ale problemei neliniare.

Având în vedere că ne propunem studierea metodelor de soluționare a problemei de transport pe rețea, formulată ca o problemă a programării matematice, vom cerceta cazurile când sunt impuse restricții egalități și de nenegativitate, ceea ce ar corespunde condiției de existență a fluxului în rețeaua de transport studiată.

1. Formularea problemei neliniare. Noțiuni de bază

Se consideră problema de transport pe rețea descrisă de graful conex aciclic $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$. Pe mulțimea finită de vârfuri este definită funcția reală de producere și consum $q = V \rightarrow R$. Pe mulțimea de arce sunt definite funcțiile neliniare de cost $\varphi_e(x_e)$. Problema neliniară de transport pe rețea constă în determinarea unui flux x^* ce minimizează funcția $F(x) = \sum_{e \in E} \varphi_e(x_e)$. Se cere soluționarea problemei neliniare de optimizare:

$$F(x^*) = \min_{x \in X} F(x) \quad (1)$$

$$\sum_{e \in E^+(v)} x(e) - \sum_{e \in E^-(v)} x(e) = q(v) \quad (2)$$

$$x(e) \geq 0, \forall e \in E, \quad (3)$$

unde X este mulțimea care satisface sistemul de ecuații (2) și restricțiile de pozitivitate (3), $E^-(v) = \{(v, u) | (v, u) \in E\}$, $E^+(v) = \{(u, v) | (u, v) \in E\}$.

Problema de transport pe rețea este formulată ca fiind o problemă a programării neliniare, deoarece funcția obiectiv este o funcție neliniară. În caz general, restricțiile pot fi:

- funcții liniare, domeniul soluțiilor admisibile este un poliedru convex în \mathbb{R}^m și are un număr finit de vârfuri care pot fi parcurse pe rând pentru determinarea soluției optime;
- cel puțin o funcție neliniară, soluția optimă poate fi în unul dintre vârfurile poliedrului convex, dar și pe una dintre suprafețe sau chiar să fie un punct interior.

Problema de transport pe rețea scrisă în forma standard a problemei neliniare de optimizare cu restricții are forma:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} f(x) & \quad (1^*) \\ h_i(x) = 0, i = \overline{1, n} & \quad (2^*) \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, m}, & \quad (3^*) \end{aligned}$$

unde $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$. Restricțiile (2*) descriu volumul de produs ce „intră” și „iese” din fiecare vârf al rețelei. Restricțiile (3*) sunt condițiile de nenegativitate $x_j \geq 0, j = \overline{1, m}$. Pentru a aduce la forma standard problema, înmulțim cu -1 aceste expresii pentru a-i schimba semnul și facem notația $g_j(x) = -x_j$, în urma căreia obținem inegalitățile $g_j(x) \leq 0, j = \overline{1, m}$.

Observație: După cum se cunoaște, orice restricții egalitate poate fi scrisă ca două restricții inegalități. Deci, (2*) poate fi scris după cum urmează: $h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, 2n}$.

Observație: În particular, când sunt impuse restricții de limitare a fluxului transportat pe arcele rețelei de transport, restricțiile sistemului (3*) se vor înlocui cu restricțiile $u_j \geq x_j$ și $x_j \geq l_j$ pentru orice $x_j \in E$. Notând $g_j(x) = -(u_j - x_j), j = \overline{1, m}$ și $g_j(x) = x_j - l_j, j = \overline{m+1, 2m}$, obținem restricțiile: $g_j(x) \leq 0, j = \overline{1, 2m}$.

Definiție: Mulțimea fezabilă (mulțimea soluțiilor admisibile) a problemei neliniare de transport este $X = \{x \in \mathbb{R}^m | h_i(x) = 0, i = \overline{1, n}, g_j(x) \leq 0, j = \overline{1, m}\}$.

Definiție: Mulțimea de puncte P se numește convexă, dacă pentru orice λ ce aparține intervalului $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda y + (1 - \lambda)z$ aparține lui P după cum y și z aparțin lui P .

Definiție: Punctul $x^* \in \mathbb{R}^m$ este punct de minim (maxim) global, dacă și numai dacă $x^* \in X$ și $f(x^*) \leq f(x)$ [$f(x^*) \geq f(x)$], oricare ar fi $x \in X$, și este punct de minim (maxim) strict global, dacă și numai dacă $x^* \in X$ și $f(x^*) < f(x)$ [$f(x^*) > f(x)$], oricare ar fi $x \in X$.

Definiție: Punctul $x^* \in \mathbb{R}^m$ este punct de minim (maxim) local, dacă și numai dacă $x^* \in X$ și există o vecinătate \mathcal{U} a lui x^* , astfel încât $f(x^*) \leq f(x)$ [$f(x^*) \geq f(x)$], oricare ar fi $x \in X \cap \mathcal{U}$, și este punct de minim (maxim) strict local, dacă și numai dacă $x^* \in X$ și există o vecinătate \mathcal{U} a lui x^* , astfel încât $f(x^*) < f(x)$ [$f(x^*) > f(x)$], oricare ar fi $x \in X \cap \mathcal{U}$.

Punctele de minim și maxim ale funcției se mai numesc și *puncte de extrem*.

Definiție: Gradientul unei funcții $f(x)$ în raport cu o variabilă vectorială $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, notat ∇f sau $grad(f)$, este un câmp vectorial ale cărui componente sunt derivatele parțiale ale funcției, deci:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right).$$

Dificultatea soluționării problemelor neliniare, în comparație cu cazul liniar, constă în faptul că este imposibilă diferențierea dintre extremul local și cel global și este foarte complicată soluționarea unei probleme neliniare, astfel încât să fie obținută o soluție globală. Deseori, este complicată și obținerea unei soluții locale.

Teorema de existență a punctului de minim (Teorema Weierstrass): Dacă mulțimea fezabilă $X \subset \mathbb{R}^m$ este compactă (închisă și mărginită) și $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci există un punct de minim global pentru problema (1*) - (3*).

Remarcă: o problemă de minimizare poate fi ușor transformată în una de maximizare astfel:

$$\min_{x \in X} f(x) = - \max_{x \in X} f(x).$$

Teoremă: [5] (**Condiția de necesitate de ordinul I**) Dacă x^* este minimul local și f este continuu diferențiabilă într-o vecinătate deschisă a lui x^* , atunci $\nabla f(x^*) = 0$, adică $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ pentru $x_j = x_j^*, j = \overline{1, m}$.

Teoremă: [5] (**Condiția de necesitate de ordinul II**) Dacă x^* este minimum local al lui f și $\nabla^2 f$ este continuu diferențiabilă într-o vecinătate deschisă a lui x^* , atunci $\nabla f(x^*) = 0$ și $\nabla^2 f(x^*)$ este pozitiv semidefinită.

Teoremă: [5] (**Condiția de suficiență de ordinul II**) Fie $\nabla^2 f$ este continuu diferențiabilă într-o vecinătate deschisă a lui x^* . Dacă $\nabla f(x^*) = 0$, adică x^* este punct staționar, iar $\nabla^2 f(x^*)$ este pozitiv definită, atunci x^* este minimum strict local al lui f .

Vom considera matricea hessiană formată din derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției $f(x)$ calculate în x^* :

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}$$

Condiția de suficiență de ordinul II poate fi reformulată astfel: Fie $\nabla^2 f$ este continuu diferențiabilă într-o vecinătate deschisă a lui x^* . Dacă $\nabla f(x^*) = 0$, adică x^* este punct staționar, iar $H(x^*)$ este pozitiv definită, atunci x^* este minimum strict local al lui f .

Pentru a verifica dacă o matrice este pozitiv definită, se va utiliza criteriul lui Sylvester, conform căruia o matrice simetrică este pozitiv definită, dacă și numai dacă toți minorii ei principali sunt pozitivi.

2. Algoritmi de soluționare a problemelor cu funcții obiectiv diferențiabile

În caz general, determinarea soluției unei probleme neliniare începe cu o soluție inițială admisibilă. Soluția optimă se obține iterativ, astfel încât la pasul k avem: $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$, $k = 1, 2, \dots$, unde $d_k \in \mathbb{R}^m$ este o direcție de deplasare din punctul x_k , iar λ_k este un scalar care descrie lungimea pasului de deplasare. Metodele de optimizare diferă prin modalitatea de calcul al mărimilor λ_k și d_k , dar se va ține cont și de faptul că la fiecare iterație se va obține o soluție x_k admisibilă, iar valoarea funcției obiectiv se va micșora. Vor fi impuse niște condiții care ne va garanta că x_k este punct de minim al funcției; aceste condiții le vom numi *condiții de optimalitate*. Numărul de pași sunt restricționați de timpul de execuție a algoritmului, de complexitatea calculului sau de capacitățile tehnicii de calcul utilizate.

În cazul în care la fiecare iterație k vectorul d_k indică direcția de descreștere a funcției $f(x)$ în punctul x_k , adică determinăm un punct nou $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$, astfel încât $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, vom vorbi despre o metodă de descreștere a funcției $f(x)$.

Vom considera, în continuare, **metoda gradient** [6], conform căreia vectorul direcției de descreștere d_k se va lua egal cu antigradientul, $d_k = -\nabla f(x_k)$ cu $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, x_0 un punct inițial cunoscut.

Metoda gradient:

Pasul inițial. Se consideră $k = 0$, se alege un punct inițial x_0 și se calculează $\nabla f(x_0)$. Se va alege o constantă $\varepsilon > 0$, care va fi utilizată pentru stoparea procesului de calcul.

Pasul de bază. Dacă $\|\nabla f(x_k)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2} < \varepsilon$, atunci STOP cu x_k soluție optimă. Altfel, se consideră $d_k = -\nabla f(x_k)$, se determină λ_k soluționând problema de minimizare a funcției $f(x_k + \lambda_k d_k)$ pentru $\lambda_k > 0$. Se trece la iterația $k + 1$ considerând $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ și se reia pasul de bază.

O astfel de abordare funcționează eficient la primele iterații ale minimizării, dar în apropierea punctului staționar, din cauza pașilor mici în direcția de descreștere, devine ineficientă.

Definiție: Fie M o matrice simetrică și pozitiv definită. Vectorii $d_0, d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}^m$ se numesc *vectori reciproc conjugați* în raport cu matricea M de ordinul m , dacă toți vectorii sunt diferiți de zero și $(d_j M d_i) = 0$ pentru $i \neq j$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$.

Metoda gradientilor conjugați este foarte potrivită pentru optimizarea funcțiilor, deoarece orice funcție poate fi destul de bine aproximată cu o funcție pătratică în vecinătatea punctului de minim, ceea ce ne garantează obținerea punctului minim într-un număr finit de pași. Deoarece după fiecare set de calcule care constă din n iterații are loc pasul descris de cea mai rapidă descreștere, metoda permite o apropiere foarte bună de minim, fapt ce implică și posibilitatea soluționării problemelor de dimensiuni mari.

Algoritmul metodei gradientilor conjugați:

Pasul inițial. Se consideră $k = 0$, se alege un punct inițial x_0 , se calculează $\nabla f(x_0)$ și se consideră $d_0 = -\nabla f(x_0)$. Se va alege o constantă $\varepsilon > 0$, care va fi utilizată pentru stoparea procesului de calcul.

Pasul de bază. Dacă $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$, atunci STOP cu x_k soluție optimă, altfel se trece la pasul 1.

Pasul 1. Se determină λ_k soluționând problema de minimizare a funcției $f(x_k + \lambda_k d_k)$ pentru $\lambda_k > 0$. Se trece la iterația $k + 1$ considerând $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$. Dacă $k < n$, atunci se trece la pasul 2, altfel la pasul 3.

Pasul 2. Se consideră $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \mu_k d_k$, unde $\mu_k = \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2}$, și se trece la pasul 1 substituind k cu $k + 1$.

Pasul 3. Se consideră $x_0 = x_n$, $d_0 = -\nabla f(x_n)$ și $k = 0$ și se trece la pasul de bază.

Metoda Newton utilizează și calculul derivatelor parțiale de ordinul doi, ceea ce presupune că matricea hessiană $H(x_k)$ este nedegenerată pentru $\forall x_k$. Metoda converge numai dacă punctul inițial este destul de aproape de punctul optim, aceasta fiind neajunsul metodei. Deoarece nu este cunoscut a priori, acest fapt poate duce la situația când $H(x_k)$ este o matrice degenerată, încât nu poate fi determinat x_{k+1} .

Algoritmul metodei Newton:

Pasul inițial. Se consideră $k = 0$, se alege un punct inițial x_0 și se consideră aproximarea funcției bazată pe dezvoltarea Taylor în vecinătatea punctului x_0 .

Pasul de bază. Va fi soluționată problema:

$\min f_k(x)$, cu $f_k(x) = \nabla f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H(x_k)(x - x_k)$. Pentru a determina x_{k+1} , se va verifica condiția necesară de optimalitate, adică dacă derivatele parțiale ale funcției $f_k(x)$ sunt nule, deci $\nabla f(x_k) + H(x_k)(x - x_k) = 0$. Astfel, $x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ este formula recurentă pentru punctele generate. Dacă $\nabla f(x^*) = 0$ și $H(x^*)$ pozitiv definită, atunci x^* este punct de minim local.

Metoda Newton are mai multe modificări care permit soluționarea problemei, indiferent de faptul care este punctul inițial ales x_0 . Printre aceste modificări putem numi **metoda Newton cu pas reglabil** sau **metoda Newton cu aproximația matricei hessiene**.

Deoarece minimumul funcției obiectiv pentru probleme de optimizare cu restricții se poate atinge și pe frontiera mulțimii X , ce descrie mulțimea soluțiilor admisibile ale problemei, pe lângă metodele clasice de soluționare a problemelor de optimizare fără restricții pot fi aplicate și unele metode adaptate la particularitățile descrierii mulțimii de restricții dar și tipul funcției obiectiv care se cere a fi minimizată.

Metoda multiplicatorilor Lagrange permite soluționarea problemelor de optimizare, cu restricții egalități și inegalități, prin transformarea lor în probleme de optimizare fără restricții și aplicarea algoritmilor optimizării fără restricții, care garantează convergența către un punct staționar. Aceste puncte staționare pot fi de minim local sau global, maxim local sau global, dar și puncte de inflexiune.

Deci, definim multiplicatorii Lagrange $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ care corespund fiecărei restricții egalități, iar funcțiile f, h continue și diferențiabile. Funcția Lagrange are forma generală:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i(x) \quad (4^*)$$

Condiția de regularitate Slater: Există $x' \in \mathbb{R}^m$ cu proprietatea $h_i(x') < 0$, $i = \overline{1, n}$ și $x'_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, ceea ce presupune că mulțimea soluțiilor admisibile are interiorul relativ nevid.

Condițiile de optimalitate locală sunt descrise de următoarea teoremă, iar punctele care le satisfac sunt puncte staționare ale problemei:

Teoremă: Fie funcțiile $f(x), h_1(x), \dots, h_n(x)$ continuu diferențiabile în vecinătatea punctului $x^* \in \mathbb{R}^m$. Dacă x^* este punct de minim local, atunci există $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$ concomitent nenule, astfel încât:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

în punctul x^* .

Nu întotdeauna punctele staționare sunt soluțiile problemei, iar pentru a le selecta pe cele optime se va aplica teorema ce urmează, care conține condiții suficiente de optimalitate.

Teoremă: Fie funcțiile $f(x), h_1(x), \dots, h_n(x)$ de două ori diferentiabile în punctul staționar $x^* \in \mathbb{R}^m$ și fie:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j > 0$$

pentru orice creșteri nenule dx_i și dx_j , astfel încât:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial h_i(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Din cauza dificultăților de aplicare, metoda Lagrange nu este utilizată pe larg la soluționarea problemelor de optimizare. Deseori sunt recomandate metode numerice aproximative, care garantează o soluție din vecinătatea punctului optim.

Teoremă (Teorema Kuhn - Tucker) [7]: Punctul x^* este soluție optimă a problemei de programare convexă

$$\begin{aligned} \min F(x) \\ h_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, n} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m} \end{aligned}$$

dacă și numai dacă există un punct $\lambda^* \geq 0$, astfel încât (x^*, λ^*) este punct și al funcției Lagrange, adică $L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*)$.

Dacă funcțiile $f(x), h_1(x), \dots, h_n(x)$ sunt diferentiabile, atunci se poate demonstra că condițiile teoremei precedente sunt echivalente cu condițiile de optimalitate Kuhn – Tucker:

$$\nabla_{x_j} L \geq 0, \quad x_j^* \nabla_{x_j} L = 0, \quad x_j^* \geq 0, \quad j = \overline{1, m} \quad \text{și} \quad \nabla_{\lambda_i} L \leq 0, \quad \lambda_i^* \nabla_{\lambda_i} L = 0, \quad \lambda_i^* \geq 0, \quad i = \overline{1, n}$$

Cazul în care funcția obiectiv este una convexă și domeniul de definiție a soluțiilor admisibile convex, descris de restricții inegalități și restricții egalități care sunt funcții liniare, vom discuta despre probleme ale programării convexe. În acest caz avem situația când minimumul local coincide cu minimumul global. Pentru astfel de probleme sunt obținute un șir de rezultate teoretice, printre care condițiile de optimalitate Kuhn-Tucker, și descrise metode eficiente de rezolvare, precum utilizarea multiplicatorilor Lagrange, aplicarea derivatelor de ordinul întâi (metode gradient) și a celor de ordinul doi (matricea Hessian).

Aplicarea metodelor gradient clasice, după cum au fost descrise mai sus, în cazul restricțiilor, deplasarea de-a lungul celei mai rapide descreșteri poate duce în puncte inadmisibile. În scopul evitării unor astfel de situații, de către J.B. Rosen a fost propusă **metoda gradientului proiectat** [8], conform căreia antigradientul este proiectat astfel încât punctul obținut să fie unul admisibil, iar funcția să ia valori mai mici (să se minimizeze).

Definiție: Proiecția punctului $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ pe mulțimea X se numește punctul $\Pi_X(a)$, care este cel mai aproape de a dintre toate punctele din X .

Deci, de fapt, efectuarea proiectării unui punct pe o mulțime presupune soluționarea problemei de proiectare, care nu este una simplă. În cazul unor probleme complicate se poate recurge la unele modificări ale metodei gradientului proiectat, când mulțimea soluțiilor admisibile este aproximată cu o mulțime de poliedre.

Definiție: Matricea pătratică P de ordinul n se numește matrice de proiectare, dacă $P = P'$ și $P \cdot P = P$, unde P' este matricea transpusă.

Într-un punct admisibil x , direcția celei mai rapide descreșteri este vectorul antigradient, dar, deoarece mișcarea pe astfel de direcție poate duce la un punct în afara domeniului soluțiilor admisibile, vectorul va fi proiectat. Deci, trebuie proiectat vectorul $-\nabla f(x)$, astfel încât să se poată mișca de-a lungul direcției $d = -P\nabla f(x)$, unde P este matricea respectivă de proiectare.

Metoda funcțiilor de penalitate [9, 10] constă în reducerea problemei de optimizare cu restricții la un șir de probleme de optimizare fără restricții de tipul $\min_{x \in X} \Phi(f, h, g, r)$, unde r este parametrul de penalizare a funcției de penalizare Φ . Funcția de penalizare descrisă este minimizată de un șir de valori de mărimi r crescătoare care forțează mulțimea minimurilor obținute să tindă către optimul problemei cu restricții, iar complexitatea de soluționare a problemei este de același ordin ca cea a problemei inițiale.

Pot fi descrise metode care modifică funcția obiectiv începând cu puncte situate în interiorul domeniului de admisibilitate, dar și în exteriorul lui, dar pot fi descrise și metode ce combină aceste două tipuri de funcții.

Fie că avem de soluționat problema (1*) – (3*) formulată anterior, atunci funcția de penalitate are forma generală:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \varphi(h_i(x)) + \sum_{j=1}^m \psi(g_j(x)),$$

unde φ și ψ sunt funcții nedeterminate de o singură variabilă care verifică condițiile: $\varphi(y) = 0$, dacă $y \leq 0$ și $\varphi(y) > 0$, dacă $y > 0$, iar $\psi(y) = 0$, dacă $y = 0$ și $\psi(y) > 0$, dacă $y \neq 0$. Astfel de funcții tipice au forma $\varphi(y) = (\max\{0; y\})^p$ și $\psi(y) = |y|^p$, p – număr întreg pozitiv, iar funcția de penalitate are forma:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^n (\max\{0; h_i(x)\})^p + \sum_{j=1}^m |g_j(x)|^p$$

Problema de minimizare fără restricții pentru problema neliniară cu restricții (1*) – (3*) are forma:

$$\min_{x \in X} \Phi(x) = f(x) + r \cdot \alpha(x),$$

unde $\alpha(x)$ este funcția de penalitate.

Algoritmul metodei de penalitate:

Pasul inițial. Alegem punctul inițial x_1 , mărimea parametrului de penalitate r_1 , numărul $\beta > 1$ și $\varepsilon > 0$ în calitate de criteriu de oprire.

Pasul 1. Pentru x_k soluționăm problema de optimizare fără restricții $\min_{x \in X} \Phi(x) = f(x) + r_k \cdot \alpha(x)$. Soluția x_{k+1} este soluția optimă a problemei obținută și trecem la pasul 2.

Pasul 2. Dacă $r_k \alpha(x_{k+1}) < \varepsilon$, atunci STOP, iar în caz contrar considerăm $r_{k+1} = \beta r_k$, substituim $k = k + 1$ și trecem la pasul 1.

În cazul în care problema (1*) – (3*) este formulată ca problemă cu restricții inegalități, ea poate fi soluționată utilizând **metoda barieră**, care constă în transformarea problemei cu restricții în problemă de minimizare fără restricții, introducând funcții barieră ce nu permit ieșirea punctului considerat din domeniul valorilor admisibile. Algoritmul metodei barieră este analog algoritmului metodei de penalitate, cu condiția ca punctul inițial x_1 să fie un punct interior al mulțimii domeniului admisibil.

Deci, dacă avem de soluționat problema neliniară cu restricțiile inegalități $h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, n}$, unde $f, h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$ sunt funcții continue de m variabile, atunci în calitate de funcție barieră vom defini funcția $B(x)$ definită pe interiorul mulțimii soluțiilor admisibile X , astfel încât: $B(x)$ este continuă, $B(x) \geq 0$ și $B(x) \rightarrow \infty$ pe măsură ce x se apropie de frontiera lui X . Exemplu de funcție de barieră poate servi funcția:

$$B(x) = \sum_{i=1}^n \frac{-1}{h_i(x)}$$

Problema inițială se reduce la problema de optimizare:

$$\min_{x \in X} \Phi(x) = f(x) + r \cdot B(x),$$

unde $r > 0$.

3. Algoritmi de soluționare a problemelor cu funcții obiectiv nediferențiabile

Descrierea proceselor economice duce deseori la soluționarea unor modele matematice care presupun aplicarea metodelor de optimizare nediferențiabile. Astfel de metode permit soluționarea problemelor fără a fi impuse schimbări în formularea problemei sau ajustarea funcției obiectiv, care ar duce la descrierea procesului economic cu unele abateri de la cel real. Aceasta se datorează faptului că aplicând astfel de metode pot fi soluționate un șir de probleme care sunt descrise de funcții neliniare nenetede, dar și în cazul problemelor de dimensiuni mari.

La baza acestor metode sunt metodele gradient clasice (descrise în paragraful precedent). În acest scop, este introdusă noțiunea de gradient generalizat (subgradient) pentru funcții nediferențiabile care va reprezenta un echivalent al noțiunii de gradient în punctele în care, de fapt, gradientul nu există, dar și o descriere a procedurii de descreștere și adaptare a pasului pentru direcția nou-obținută la fiecare pas al metodei.

Fie $f(x)$ funcție convexă definită pe E^m , X^* mulțimea minimurilor (care poate fi și vidă), $x^* \in X^*$ punct de minim; $\inf f(x) = f^*$; $d_f(x)$ – subgradientul funcției în punctul x .

Definiție: [11] **Gradientul generalizat (subgradientul)** $d_f(x_0)$ al funcției f în punctul x_0 este un vector $d_f(x_0)$, pentru care

$$f(x) - f(x_0) \geq (d_f(x_0), x - x_0) \forall x \in E^m$$

Deci, rezultă că, dacă $f(x) < f(x_0)$, atunci $(d_f(x_0), x - x_0) > 0$, ceea ce presupune că antisubgradientul în punctul x_0 formează un unghi ascuțit cu orice direcție aleatoare, dusă din x_0 în direcția x cu o valoare mai mică a lui $f(x)$. De unde avem că, dacă X^* nu este mulțime vidă, iar $x_0 \notin X^*$, atunci la deplasarea din x_0 în direcția $d_f(x_0)$ cu un pas destul de mic distanța până la X^* se micșorează.

➤ Grupul de metode gradient generalizat

Definiție: [11] **Metoda gradientului generalizat** vom numi procedura de construire a șirului $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ de minimizare, unde x_0 este o mărime inițială, iar x_k se construiesc după următoarea formulă recurentă: $x_{k+1} = x_k - \lambda_{k+1} \frac{d_f(x_k)}{\|d_f(x_k)\|}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, unde $d_f(x_k)$ un subgradient aleator al funcției $f(x)$ în punctul x_k , λ_{k+1} este multiplicatorul pasului.

Metoda astfel definită este descrisă de procedura de alegere a mărimilor pasului λ_k care vor satisface condițiile:

$$\lambda_k > 0; \lambda_k \rightarrow 0 \text{ pentru } k \rightarrow \infty; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = +\infty \quad (5)$$

și pot fi utilizate următoarele metode de alegere a pasului:

1. $\lambda_{k+1} = \frac{\lambda_0}{k+1}$, $\lambda_0 > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$;
2. $\lambda_{k+1} = \frac{\lambda_k}{k+1}$, $\lambda_0 > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$;
3. $\lambda_{k+1} = \frac{\lambda_k + \lambda_{k-1}}{2}$, $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{2}$, $k = 1, 2, \dots$;

Teoremă: [11] Fie $f(x)$ o funcție convexă, definită pe E^m , cu domeniul mărginit al punctelor de minim X^* , $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ – șirul numerelor pozitive cu proprietatea (5). Atunci șirul $\{x_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ pentru orice $x_0 \in E^m$ posedă una dintre proprietăți: sau există $k = k^*$, astfel încât $x_{k^*} \in X^*$, sau $\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{x \in M^*} \|x_k - x\| = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \min_{x \in E^m} f(x) = f^*$.

În dependență de modalitatea de alegere a șirului $\{x_k\}$, poate fi aplicată:

- **metoda gradientului generalizat cu pas constant**, conform căreia pentru $\lambda > 0$ pasul este $\lambda_k(x_k) = \frac{\lambda}{\|d_f(x_k)\|}$ și obținem $x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{d_f(x_k)}{\|d_f(x_k)\|}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.
- **metoda gradientului generalizat cu șirul convergent al multiplicatorilor pasului fără normarea gradientului** cu $x_{k+1} = x_k - \lambda_{k+1} d_f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$;
- **metoda gradientului generalizat cu șirul convergent al multiplicatorilor pasului fără normarea gradientului și cu posibilitatea de revenire în punctul inițial:** $x_{k+1} = \begin{cases} x_k - \lambda_{k+1} d_f(x_k), & \lambda_{k+1} \|d_f(x_k)\| \leq 0, \\ x_0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$ $k = 1, 2, \dots$ cu $c > 0$ o constantă aleatoare;
- **metoda gradientului generalizat cu pas constant, iar apoi cu pas micșorat de două ori:** pentru $\sigma \geq 2$, $x_{k+1} = x_k - \lambda_{k+1} \frac{d_f(x_k)}{\|d_f(x_k)\|}$, unde $\lambda_{k+1} = h_0 \cdot 2^{-[(k+1)/N]}$ cu h_0 suficient de mare și $N \geq 3\sigma^2 + 1$;

Pentru toate metodele formulate anterior, dar și pentru **metoda gradientului generalizat cu viteza de convergență a progresiei geometrice, metoda gradientului generalizat pentru suprafețe de nivel alungite ale funcției de minimizat, metoda gradientului stohastic generalizat, metoda gradient cu dilatarea spațiului**, în [11, 12] au fost formulate teoremele respective care demonstrează convergența metodelor și sunt specificate condițiile în care se recomandă aplicarea fiecăreia. În dependență de problema formulată, va fi aleasă o metodă sau alta, fapt ce va conduce la o soluție cât mai aproape de cea exactă.

➤ Grupul de metode ε -subgradient

Fie funcția $f(x)$ convexă pe E^m , astfel încât $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Vom nota $G_f^\varepsilon(x_0) = \{d \in E^m : f(x) - f(x_0) \geq (d, x - x_0) - \varepsilon, \forall x \in E^m\}$ – mulțimea ε -subgradientă a funcției $f(x)$ în punctul x_0 pentru $\varepsilon > 0$, cu d – gradientul funcției $f(x)$ în punctul x_0 . În cazul în care $\varepsilon = 0$, vom avea $G_f^\varepsilon(x_0) = G_f(x_0)$. Dacă $G_f^\varepsilon(x_0)$ conține 0, atunci avem $f(x_0) - f^* \leq \varepsilon$, iar altfel există o direcție de descreștere ε -subgradientă ce asigură minimizarea funcției cu ε de-a lungul direcției. Pentru determinarea direcției este aproximată $G_f^\varepsilon(x_0)$ cu un înveliș convex al ε -subgradientilor din $G_f^\varepsilon(x_0)$ obținuți la pașii precedenți.

Pentru sistemul de vectori $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ definim operația $z = K_p\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, care pune în corespondență sistemului de vectori un vector z de lungime minimă ce aparține învelișului convex $\{d_i\}_{i=1}^k$, iar z este direcția celei mai rapide descreșteri din punctul x în care mulțimea subgradientă este $\text{conv}\{d_i\}_{i=1}^k$. Determinarea lui z se reduce la soluționarea problemei de programare pătratică de forma:

$$\min \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i d_i \right\|^2,$$

astfel încât

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1; \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Deplasarea dintr-un punct curent se efectuează numai în cazul în care informația acumulată permite găsirea direcției în care funcția poate fi minimizată cu cel puțin parametrul ε .

O altă abordare este algoritmul care presupune o deplasare pe direcția de minimizare a funcției ce se va efectua pentru orice mărime. Atunci când în direcția aleasă nu are loc minimizarea funcției, atunci se va face un pas foarte mic de încercare (de probă).

Algoritmul metodei ε -subgradient

Se consideră $x_0 \in E^m$ și $\varepsilon > 0$. Vom calcula $d_f(x_0)$ și $d_0 = d_f(x_0)$, $G_0 = d_0$.

La pasul k vom avea punctul x_k și mulțimea G_k , deci:

- se calculează $p_k = -K_p(G_k)$ ca rezultat al soluționării problemei de programare pătratică;
- se determină $x_{k+1} = \arg \min_{t_k} (x_k + t_k p_k)$ ca soluție a problemei de optimizare unidimensională fără restricții. Pentru $t_k = 0$ avem $x_{k+1} = x_k$, iar în calitate $d_f(x_{k+1})$ va fi ales $d \in G(x_{k+1})$, pentru care se respectă relația $(d, p_k) = 0$, ceea ce presupune calcularea subgradientului în x_{k+1} obținut prin deplasarea în direcția p_k cu un pas mic;
- se determină $d_{k+1} = d_f(x_{k+1})$ și $G_{k+1} = G_k \cup \{d_{k+1}\}$;
- se trece la un alt pas interior.

Dacă $(d_k, x_k - x_0) > \varepsilon$, atunci G_k se înlocuiește cu mulțimea vidă, iar x_k se consideră punct inițial pentru un nou ciclu exterior.

Neajunsul metodei expuse este lipsa aproximațiilor inferioare, ceea ce nu permite ajustarea parametrului ε , fapt ce a condus la dezvoltarea metodelor subgradient agregate.

4. Soluționarea problemei neliniare separabile

Deseori, la modelarea unei probleme economice reale, deși modelul depinde de mai multe variabile, funcțiile care sunt aplicate depind doar de una singură. De exemplu, când vorbim despre problema neliniară de transport pe rețea, putem menționa că o să avem funcții de cost asociate fiecărui arc din rețea; respectiv fiecare funcție depinde de mărimea fluxului transportat pe acel arc: funcția obiectiv este sumă de funcții neliniare de o singură variabilă, iar funcțiile restricții sunt sume de funcții liniare de o singură variabilă.

În acest context, un caz special cercetat în continuare este soluționarea problemei neliniare de transport ca problemă a programării neliniare separabilă.

Definiție: O funcție f cu m necunoscute se numește *separabilă*, dacă poate fi scrisă ca sumă de m funcții, fiecare de câte o variabilă; astfel, $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_m(x_m)$.

Definiție: O problemă a programării neliniare se numește *separabilă*, dacă funcția obiectiv și toate restricțiile sunt considerate funcții separabile, ceea ce înseamnă că avem formulată problema:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i), \quad \sum_{i=1}^m h_{ji}(x_i) \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Deoarece funcția obiectiv $F(x) = \sum_{e \in E} \varphi_e(x_e)$ a problemei neliniare de transport formulate mai sus este o sumă de funcții, fiecare fiind dependentă de o singură variabilă, iar funcțiile restricții sunt funcții liniare, deci tot sunt separabile, rezultă că sunt satisfăcute condițiile ce descriu o problemă a programării separabile. Printre primii care au formulat o metodă de soluționare a problemei de programare separabilă a fost Miller [13], dar a fost studiată și în [14].

Condiții suficiente pentru un optim global ca soluție la o problemă de programare matematică la minim ar fi ca funcția obiectiv să fie convexă și mulțimea soluțiilor admisibile să fie o mulțime convexă. În caz că funcția obiectiv este concavă, iar mulțimea soluțiilor admisibile este mulțime convexă, putem vorbi doar despre un minim local.

Metodele de soluționare a unor astfel de probleme presupun soluționarea unei sau a câtorva probleme ale programării liniare generate de problema inițială. Ele au la bază aproximarea funcției neliniare cu o funcție liniară sau secvențial-liniară și aplicarea metodei simplex sau simplex-modificată, în dependență de caz.

Schema algoritmului ce presupune aproximarea cu o funcție liniară

Pasul inițial: Se determină o soluție admisibilă inițială $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ a problemei neliniare, care reprezintă o soluție a sistemului de restricții. Fie că au avut loc $k - 1$ iterații.

Pasul 1: Dacă soluția obținută este optimă, atunci STOP, iar în caz contrar trecem la iterația k . Pentru funcția obiectiv neliniară se determină gradientul $\nabla f(x^k) = (\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_m})$.

Pasul 2: Se construiește funcția $F(z) = \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_2} z_2 + \dots + \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_m} z_m$, care este una liniară, apoi, aplicând restricțiile $h_i(x) \leq 0$, $i = \overline{1, n}$ și $x_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$, se determină valoarea minimală $z^k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_m^k)$ a funcției.

Pasul 3: Pentru soluția z^k a problemei liniare se determină soluția problemei inițiale neliniare $x^{k+1} = x^k + \lambda^k (z^k - x^k)$, unde λ^k este pasul de calcul $0 \leq \lambda^k \leq 1$, care poate fi luat aleator sau poate fi ales astfel, încât $f(x^{k+1})$ să fie minimal. Se trece la pasul 1.

Această metodă, deși permite obținerea soluției optime pentru problema neliniară separabilă, depinde foarte mult de soluția inițială aleasă la începutul algoritmului.

Pentru obținerea unor soluții mai bune, se propune aproximarea funcției obiectiv neliniare separabile cu o funcție secvențial-liniară. Problema liniară cu funcția obiectiv secvențial-liniară va fi soluționată aplicând metoda simplex (sau a unei modificări a acesteia), în baza căreia se obține soluția pentru problema inițială neliniară.

Este cunoscut faptul că orice funcție convexă poate fi aproximată cu un careva grad de acuratețe cu o funcție secvențial-liniară, fapt ce implică aproximarea unei probleme a programării neliniare, cu o careva acuratețe, cu o problemă a programării liniare. Programarea separabilă poate fi aplicabilă și în cazul funcțiilor non-convexe, dar trebuie de menționat că în așa caz nu ne este garantat optimul global. Pentru a aproxima o funcție neliniară cu una secvențial-liniară, pot fi aplicate diferite tehnici care ar permite aducerea problemei neliniare separabile la forma λ , forma δ sau la forma Δ . În ceea ce urmează vom descrie cum poate fi redusă problema neliniară separabilă la forma λ pentru a o soluționa ca problemă a programării liniare.

Fie se cere soluționarea problemei neliniare

$$\begin{aligned} \min F(x) \\ h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, n} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

pentru care se știe că sunt separabile, deci pot fi scrise astfel:

$$F(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_m(x_m)$$

și, respectiv,

$$h_i(x) = h_{i1}(x_1) + h_{i2}(x_2) + \dots + h_{im}(x_m), \quad i = \overline{1, n}$$

Domeniul de definiție a fiecărei necunoscute se împarte în segmente de tipul $[x_k, x_{k+1}]$, astfel încât pentru orice $x \in [x_k, x_{k+1}]$ putem scrie o combinație liniară de forma: $x = \lambda x_k + (1 - \lambda)x_{k+1}$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Dacă notăm $\lambda_k = \lambda$ și $\lambda_{k+1} = 1 - \lambda$, vom avea $x = \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}$ cu $\lambda_k + \lambda_{k+1} = 1$ și $0 \leq \lambda_k, \lambda_{k+1} \leq 1$.

În caz general, când avem șirul de puncte: $x_0 < x_1 < \dots < x_r$ vom avea

$$x = \sum_{k=0}^r \lambda_k x_k, \quad \sum_{k=0}^r \lambda_k = 1, \quad 0 \leq \lambda_k \leq 1, \quad k = \overline{0, r}$$

Pe fiecare segment $[x_k, x_{k+1}]$ funcția neliniară va fi aproximată cu o funcție liniară de forma $f(x) = \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1})$ cu $\lambda_k + \lambda_{k+1} = 1$ și $0 \leq \lambda_k, \lambda_{k+1} \leq 1$. Dacă avem șirul de puncte: puncte: $x_0 < x_1 < \dots < x_r$ vom putea aproxima funcția neliniară cu o funcție secvențial-liniară de forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \lambda_k f(x_k), \sum_{k=0}^r \lambda_k = 1, 0 \leq \lambda_k \leq 1, k = \overline{0, r}$$

Deci, putem spune că funcțiile neliniare separabile pot fi scrise ca combinații de funcții liniare, iar problema de programare neliniară separabilă poate fi adusă la o problemă secvențial-liniară după cum urmează:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{r_i} \lambda_{ik} f_{ik} \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{r_i} \lambda_{ik} g_{ijk} & \leq b_j, j = \overline{1, n} \\ \sum_{k=0}^{r_i} \lambda_{ik} & = 1, 0 \leq \lambda_{ik} \leq 1, k = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, m} \end{aligned}$$

Se va presupune că pentru fiecare variabilă x_i domeniul ei de definiție va fi împărțit în r_{i+1} puncte, astfel încât $k = \overline{0, r_i}$. Problema astfel formulată se va soluționa în raport cu variabilele de decizie λ_{ik} prin aplicarea metodei simplex, ținându-se cont de criteriul de adiacență care constă în: cel mult două elemente λ_k sunt mai mari ca zero și ele trebuie să fie consecutive atunci când vom adăuga un element nou în bază. Deci, λ_{ik} va fi introdusă în bază doar dacă variabilele ce sunt deja în bază au forma $\lambda_{i,k-1}$ sau $\lambda_{i,k+1}$, ceea ce înseamnă că sunt adiacente. Dacă metoda simplex impune introducerea în bază a unei variabile care nu satisface restricția de consecutivitate, atunci se va alege următoarea variabilă, cea mai bună, care ar permite reducerea costurilor.

Chiar dacă se utilizează o altă formă de reducere a problemei neliniare separabile la o problemă secvențial-liniară, poate fi descrisă următoarea *schemă generală*:

Pasul inițial: Se aduce problema neliniară la o problemă neliniară separabilă. Domeniul de definiție a fiecărei variabile este împărțit în segmente, astfel încât să fie obținută o aproximare cât mai descriptivă.

Pasul 1: Pentru fiecare funcție neliniară se construiește funcția secvențial-liniară, care o aproximează, și problema neliniară separabilă se reduce la o formă a problemei secvențial-liniare, care este soluționată aplicând metoda simplex.

Pasul 2: Aplicând notațiile făcute la pasul inițial, se obține soluția problemei neliniare în baza soluției problemei secvențial-liniare.

Pentru a îmbunătăți soluția obținută, se pot aproxima funcțiile împărțind domeniul de definiție într-un număr mai mare de puncte, dar această decizie poate duce la probleme de dimensiuni foarte mari, ceea ce ar complica foarte mult obținerea soluției așteptate. De aceea, se poate aproxima funcția doar într-un domeniu mai îngust în apropierea punctului optim obținut pentru un număr mai mic de puncte.

Concluzii

1. În cazul problemelor neliniare cu funcții obiectiv diferentiabile algoritmi aplicați au ca punct de reper noțiunea de gradient, hessian, condițiile de optimalitate Kuhn - Tucker și multiplicatorii Lagrange.

2. Pentru problemele neliniare cu restricții se va recomanda metoda gradientului proiectat, care permite evitarea situațiilor când algoritmul va tinde către un punct în afara domeniului de definiție.

3. Programarea matematică propune un șir larg de metode de soluționare a problemelor în cazul în care funcțiile sunt nediferențiabile, dar ele trebuie selectate foarte atent pentru a obține o soluție cât mai aproape de cea optimă.

4. În cazul metodelor de soluționare a problemelor de programare separabilă se va ține cont de faptul că minimizarea unei funcții obiectiv neliniare concave nu ne garantează optimul global.

5. Deși se poate obține o soluție mult mai bună când se reduce problema separabilă la o problemă secvențial-liniară, se va ține cont de faptul că dimensiunea problemei obținute crește odată cu împărțirea domeniului de definiție în mai multe segmente, fapt ce ar presupune și o soluție mult mai aproape de cea optimă.

Referințe:

1. DANTZIG, G.B. Application of the Simplex Method to a Transportation Problem. În T. C. Koopmans. In: *Activity of Production and Allocation*. New York: John Wiley and Sons, 1951, p.359 - 373.

2. ДАНТЦИГ, Д. *Линейное программирование, его обобщения и применения*. (Г.Н. Андрианова, Л.И. Горькова, & А.А. Корбуга, trad.). Москва: ПРОГРЕСС, 1966.
3. ГОЛЬШТЕЙН, Е., & ЮДИН, В.Д. *Задачи линейного программирования транспортного типа*. Москва: Наука, 1969.
4. SARODE, M.V. Application of a Simplex Method to Find the Optimal Solution. In: *International Journal of Innovations of Engineering and Science*, 2017, vol.2, no.2, p.21-24.
5. ВОНЕМЕ, Т.Д., & FRANK, В. *Hybrid Systems, Optimal Control and Hybrid Vehicles*. Springer International Publishing AG, 2017.
6. CAUCHY, A. *Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées*. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2982c/f540.image.langEN>. Paris: BACHELIER, IMPRIMEUR - LIBRAIRE, 1847.
7. KUHN, H.W., & TUCKER, A.W. Nonlinear Programming. *Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* Berkeley: University of California Press, <https://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200500213#toc>, 1951, p.481-492.
8. ROSEN, J.B. The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part I. Linear Constraints. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1960, vol.8, no.1, p.181 - 217.
9. SUN, W., & YUAN, Y.-X. *Optimization theory and methods, Nonlinear Programming* (vol.1). Springer Science + Business Media, LLC, 2006.
10. LUENBERGER, D.G., & YE, Y. *Linear and nonlinear programming International Series in Operations Research and management science*. Stanford: Springer, 2008.
11. ШОП, Н.З. *Методы недифференцируемой оптимизации и сложные экстремальные задачи*. Кишинев: Эврика, 2008.
12. GAMEȚCHI, A., & SOLOMON, D. *Cercetări operaționale* (vol.II). Chișinău: Evrica, 2015.
13. MILLER, C.E. The simplex Method for Local Separable Programming. (R.L. Wolfe, Ed.) In: *Recent Advances in Mathematical Programming*, 1963.
14. LI, H.-L., & YU, C.-S. A global optimization method for nonconvex separable programming problems. In: *European Journal of Operational Research*, 1999, vol.117, p.275-292.

Date despre autor:

Tatiana PAȘA, lector universitar, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea de Stat din Moldova.

E-mail: pasa.tatiana @ yahoo.com

Prezentat la 18.12.2018