УДК 338.984
AGRIS: A50
JEL: Q18; F68; J08; J43;

АНАЛИЗ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

*©**Славянов А. С.,** SPIN-код: 9534-6825, ORCID: 0000-0001-9177-6215, канд. экон. наук, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия, aslavianov@mail.ru*

ANALYSIS AND PRACTICAL APPLICATION OF RESOURCE DISTRIBUTION MODELS

*©**Slavianov A.,** SPIN-code: 9534-6825, ORCID: 0000-0001-9177-6215, Ph.D., Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia, aslavianov@mail.ru*

Аннотация. Российская экономика, несмотря на внешние ограничения продолжает осуществлять различные социальные, научные, оборонные и другие программы, требующие значительного количества самых разнообразных ресурсов. От их рационального распределения зависит эффективность работы предприятий и результативность проектов. Статья посвящена вопросу оптимизации ресурсов с использованием аппарата математического моделирования. В работе приведен краткий обзор математических методов оптимизации ресурсов. Особое внимание уделено моделям, исследуемых методом Лагранжа и методам теории игр. В работе рассмотрены две задачи оптимизации — максимизация результата в условиях ограниченных ресурсов и рациональном распределении ресурсов при фиксированном объеме выпуска. В работе отмечается, что существующие модели не учитывают состояние внешней среды, которая оказывает существенное влияние на результат. Вариант распределения ресурсов, принятый нами как оптимальный в одних условиях, может быть совершенно неподходящим при изменении состояния внешней среды через некоторый промежуток времени. Оптимальность распределения ресурсов может рассматриваться только в определенном состоянии внешней среды. Для решения задачи оптимизации в условиях полной и неполной неопределенности необходимо учитывать все возможные состояния среды на период реализации проекта. Для решения задач в условиях полной или неполной неопределенности предлагается математический инструментарий, основанный на теории игр с природой. Работа имеет практическое значение, так как позволяет на разных уровнях управления — от предприятия до крупной корпорации оптимизировать свою хозяйственную деятельность.

Abstract. Russia, despite external constraints, continues to implement various social, scientific, defense and other programs that require a significant number of diverse resources. From their rational distribution depends on the efficiency of enterprises and the effectiveness of projects. The article is devoted to the optimization of resources using the apparatus of mathematical modelling. In this paper, we give a brief overview of mathematical methods for optimizing resources. Particular attention is paid to models studied by the Lagrange method and to the methods of game theory. In the paper, two optimization problems are considered — maximization of the result under conditions of limited resources and rational allocation of resources with a fixed output volume. The paper notes that existing models do not take into account the state of the external environment, which has a significant impact on the result. The variant of resource allocation, accepted by us as optimal under certain conditions, can be completely unsuitable when the state of the external environment changes after a certain period of time. The optimal allocation of resources can be considered only in a certain state of the external environment. To solve the optimization problem in conditions of complete and incomplete uncertainty, it is necessary to take into account all possible environmental conditions for the project implementation period. To solve problems in conditions of complete or incomplete uncertainty, a mathematical toolkit is proposed based on the theory of games with nature. The work is of practical importance since it allows you to optimize your economic activities at different levels of management — from the enterprise to a large corporation.

Ключевые слова: математические модели, оптимизация, внешняя среда, неопределенность, распределение ресурсов.

Keywords: mathematical models, optimization, external environment, uncertainty, resource allocation.

Введение

Ресурсосбережение представляет собой одну из наиболее важных проблем современного высокотехнологичного производства. Современный этап развития экономики с одной стороны предусматривает использование ресурсосберегающие технологии практически во всех видах экономической деятельности, а с другой стороны наблюдается нерациональное использование и распределение ресурсов как внутри одного проекта или предприятия, так и между организациями, входящих в финансово–промышленную группу. Простой перебор всех возможных вариантов распределения ресурсов может дать результат, однако затраты времени на такой процесс могут существенно снизить эффективность работы. Методы математического моделирования позволяют существенно упростить эту задачу и подобрать оптимальное решение.

Классификация и обзор математических моделей и методов оптимизации ресурсов

Математическая модель представляет собой формализованное описание явлений, процессов или объектов, выраженное посредством совокупности зависимостей, формул, логических условий, уравнений и т. п. В зависимости от поставленной задачи, природы исследуемого объекта, заданной точности и достоверности результатов, начальных условий, зависит вид (тип) математической модели [1].

В зависимости от состояния среды, в которой функционирует исследуемый объект, могут быть определены следующие типы моделей:

–детерминированые;

–вероятностные;

–модели, функционирующие в условиях неопределенности.

Детерминированные модели — модели, в которых задачи формируются в условиях, позволяющих получить однозначное решение. При этом имеется полная определенность в начальных условиях и параметрах, что позволяет с достаточной точностью определить результат реализации различных стратегий.

Вероятностные модели — модели в которых параметры задаются в виде вероятностных величин, причем вероятность этих значений известна или достаточно легко может быть просчитана. Соответственно, результат реализации различных стратегий принимается с определенной вероятностью.

Модели, функционирующие в условиях неопределенности, характеризуются тем, что параметры, ограничения и условия модели заранее неизвестны и вероятностная оценка ожидаемого результата невозможна.

Математические модели классифицируют по следующим группам:

1. Модели, исследуемые методом Лагранжа. Оптимальное решение (нахождение экстремумов) в этих моделях ищется путем дифференцирования целевой функции. Метод применяется при наличии в задаче ограничений.

2. Регрессионный анализ применяется в случае наличия достаточного количества статистических данных и позволяет построить зависимость функции от переменных. Различают простую и сложную регрессии. В простой исследуется функция от одной переменной, в сложная регрессия включает более двух переменных. При определении характера функции методом регрессионного анализа, задача оптимизации может быть решена методом Лагранжа. Для решения задач оптимизации ресурсов в промышленности регрессионный анализ применяется для нахождения зависимости между затраченным рабочим временем, материалами, другими ресурсами и выпуском продукции или оказанными услугами.

3. Метод Гауса позволяет решать задачи оптимизации, у которых оценка и ограничения являются линейными функциями. Метод предусматривает последовательное изменение опорного решения до нахождения оптимального результата, который уже не представляется возможности улучшить.

Существует особый класс математических моделей, где задачи оптимизации решаются методами линейного и нелинейного программирования.

4. Линейное программирование позволяет определить максимальные и минимальные значения целевой линейной функции, на которую наложены линейные ограничения. Этот метод получил наибольшее распространение для решения задач оптимального распределения ресурсов между различными предприятиями или подразделениями одного предприятия. Метод позволяет решать задачу определения оптимального соотношения между различными видами выпускаемой на предприятиях продукции в условиях ограниченных ресурсов, транспортные и иные задачи. Модель содержит целевую функцию, определяющую эффективность производства и ограничения по ресурсам или времени (срокам).

5. Дискретное или целочисленное программирование применяется для решения задач оптимизации, в которых переменные принимают целые значения. Решение задач этим методом требует больших затрат времени, чем метод линейного программирования. В реальных расчетах часто ограничивают число переменных и возможных результатов.

6. Задачи с булевыми переменными являются частным случаем целочисленного программирования. Этот метод основан на том, что переменные приобретают определенные значения: 0 или 1. Метод допускает, что любую переменную, принимающую целое значение в определенном, неотрицательном интервале, можно представить в виде суммы булевых переменных.

7. Параметрическое программирование применяется для решения параметрических задач, в которых от определенного параметра линейно зависят коэффициенты при неизвестных в целевой функции и свободные члены уравнений. Примером может быть зависимость наличия запасов от предложений поставщиков, нормы расхода от применяемых технологий и т. п.

8. Блочное программирование применяется для решения задач оптимизации в иерархических многоуровневых структурах корпораций, холдингов, отраслей промышленности. Все предприятия, входящие в эту структуру, имеют общую целевую

функцию и ограничения, хотя и имеют разные характеристики и находятся в разных начальных условиях.

9. Динамическое программирование дает возможность решить сложные задачи оптимизации путем последовательного их разбиения на ряд простых подзадач. В подзадачах ищется оптимальное решение, которое затем используется для решения основной задачи. Особенностью метода является применение табличной техники занесения результатов промежуточных вычислений.

10. Стохастическое программирование позволяет решать различные задачи, оперируя случайными величинами. Существует два подхода в стохастической теории, первый основан на выявлении зависимости (корреляции) между случайными процессами, второй на математическом анализе многомерных функций распределения случайных величин. Стохастическая теория подразумевает, что конечный результат во многом зависит от начальных условий, в которых находится экономическая система. Незначительное изменение начальных условий может привести к существенному изменению конечного результата при завершении процесса (теория хаоса). Решение задач методами стохастического программирования может применяться в случаях, когда информация об объекте умышленно искажается или скрывается. Оптимизационные задачи решаются в два этапа. На первом этапе принимается решение, основанное на максимизации математического ожидания результата, на последующем этапе, в зависимости от результата, полученного на первом этапе, принимается корректирующее решение, минимизирующее возможные негативные эффекты.

11. Математическая теория игр позволяет выбрать оптимальное решение в условиях неопределенности с учетом возможных действий конкурентов (противника). Здесь моделируется поведение противника в условиях конфликта, протекающего по определенным правилам, которые устанавливают порядок обмена информацией, очередность возможных действий и др.

12. Эвристическое программирование предназначено для решения сложных обратных задач в условиях неполной информации. Метод используется в тех случаях, когда невозможно оценить границы применимости модели и возможные ошибки. Эвристические методы базируются на опыте экспертов, которые интуитивно выявляют взаимосвязи и закономерности и не являются строго формализованными.

13. Имитационное моделирование используется для систем со множеством внутренних связей, которые не могут быть описаны и исследованы традиционными аналитическими методами. Здесь могут быть использованы нейросетевые методы и методы генетических алгоритмов. Имитационные модели рассчитаны на компьютерную обработку данных и представляют собой алгоритм поиска оптимальных решений методами численного анализа.

Задачи оптимизации ресурсов можно решить графическими методами, к которым относятся ленточный график Ганта, метод PERT (сетевого планирования и управления) и метод GERT.

14. График Ганта представляет собой особый тип гистограммы, показывающий последовательность, продолжительность и сроки начала работ по проекту. Сдвигая сроки начала и окончания работ, можно контролировать равномерность загрузки производственных мощностей и исполнителей.

15. PERT график представляет собой информационно–динамическую модель в виде ориентированного графа, в которой изображаются взаимосвязи и результаты всех работ, необходимых для достижения конечной цели разработки. Неопределенность продолжительности этапов НИР здесь учитывается в специальной методике расчета ожидаемого времени проведения работ, основанной на законе бета–распределения.

16. Модель GERT предполагает построение альтернативных сетей, что позволяет более адекватно осуществлять планирование и управление проектом на тех стадиях, где нет возможности однозначно определить результат работ, входящих в проект. В отличии от PERT метода, где все работы и события должны быть определены, GERT метод оценивает вероятность наступления ожидаемого события и строит альтернативную сеть с учетом полученных результатов. Кроме того, метод предусматривает возможность, после совершения некоторых работ, возврата к начальному узлу.

Оптимизация ресурсов методом математического программирования

Методы математического программирования предназначены для решения многомерных задач с ограничениями. В этих задачах требуется найти оптимум или экстремум (минимальное или максимальное значение) целевой функции нескольких переменных с ограничениями на область этих переменных.

Модель математического программирования включает в себя:

–целевую функцию;

–система ограничений;

–совокупность факторов (переменных), изменяя которые можно совершенствовать систему.

Целевая функция представляет собой функцию переменных, которая характеризует процесс выполнения задачи. Целевая функция показывает эффективность функционирования системы, позволяет выбрать оптимальный (наилучший) вариант из множества возможных. Это может быть максимальный доход, максимально возможное снижение издержек, рациональное использование ресурсов и т. п. Ограничения по ресурсам выражаются в виде неравенств. Совокупность неравенств образует область допустимых решений. План реализации проекта, учитывающий все ограничения, считается допустимым. Допустимый план, при показателях которого котором целевая функция достигает экстремума, называется оптимальным планом. Задачи оптимизации в математическом программировании решаются аналитическими и графическими методами.

Следует отметить, что методы математического программирования достаточно хорошо изучены отечественными и зарубежными учеными и практиками. При решении задач распределения ресурсов следует особое внимание уделить трудам советского ученого Л. В. Канторовича, который еще в 1939 г. сформулировал задачи линейного программирования [2] и предложил методологию их решения. Позднее американским ученым Данцингом был разработан эффективный метод решения задач линейного программирования — симплекс–метод [3]. Графические методы оптимизации также достаточно подробно рассмотрены автором [4].

В связи с этим, остановимся на методах оптимизации достаточно эффективных, но не столь популярных к которым относятся модели, построенные на основе теории игр и метод Лагранжа.

Оптимизация ресурсов с использованием метода Лагранжа

Как уже отмечалось, задачи оптимизации ресурсов могут иметь два решения. Первое заключается в распределение всех имеющихся ресурсов для достижения максимального результата (например, максимизация прибыли) и другая задача состоит в минимизации затрат при достижении определенного, фиксированного результата.

Оптимизация ресурсов в целях максимизации результата

Основная цель предприятия в условиях рыночной экономики заключается в максимизации прибыли посредством оптимального распределения имеющихся в ее распоряжении ресурсов. Под прибылью принято понимать разницу между полученным за определенный период времени доходом и затратами на производство и реализацию товаров и услуг:

$$PR = R - C, \tag{1}$$

где PR — прибыль, R — доход, C — затраты. В производстве используется достаточно много различных видов ресурсов — материалы, энергия, комплектующие, труд и т. д (x_1, x_2, … x_n), которые имеют свою цену на рынке (p_1, p_2, ... p_n). Общие затраты можно записать в следующем виде:

$$C = (p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \tag{2}$$

Доходы зависят от количества проданной продукции и цены на нее. В условиях совершенной конкуренции фирма не может влиять на рыночные цена, в условиях рынка монополистической конкуренции, олигополии или монополии цена на товары и услуги зависят от поведения конкурентов и потребителя. В экономике присутствует достаточное количество игроков, которое позволяет применить в расчетах модель рынка совершенной конкуренции. Допустим, что предприятие выпускает только один вид продукции, количеством x_0. В этом случае стоимость продукции (p_0) останется постоянной, а доход в этом случае составит величину $R = p_0x_0$. Зависимость между затратами и выпуском продукции выражается производственной функцией:

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_n). \tag{3}$$

Тогда доходы предприятия можно записать в виде:

$$R == p_0 f(x_1, x_2, \dots x_n) \tag{4}$$

Подставив в уравнение (1) выражения (2) и (4) получим:

$$PR(x_1, x_2, \dots x_n) = p_0 f(x_1, x_2, \dots x_n) - (p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \tag{5}$$

В зависимости от периода времени (долгосрочный и краткосрочный), задача оптимизации может разный вид. В случае долгосрочного планирования предприятие может использовать в своей производственной деятельности любое неотрицательное значение количества ресурсов. Для долгосрочного периода задача оптимизации принимает вид:

$$p_0 f(x_1, x_2, \dots x_n) - (p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) = PR(x_1, x_2, \dots x_n) \to \max \tag{6}$$

при условии:

$$x_1, x_2, \dots x_n \geq 0$$

В долгосрочном периоде предприятие может приобрести на рынке любое неограниченное количество ресурсов.

В краткосрочном периоде предприятие лишено возможности маневра и может использовать только то, что лежит на складе. В этом случае, возможности предприятия ограничены неравенством:

$$g(x_1, x_2, \dots x_n) \le b,$$

где b остаток запасов на складе. В этом случае задача оптимизации принимает вид:

$p_0\, f(x_1, x_2, \dots xn) - (p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) = PR(x_1, x_2, \dots xn) \to \max$ (7)

при условии:

$x_1, x_2, \dots xn \ge 0$

$g(x_1, x_2, \dots x_n) \le b$.

При анализе деятельности предприятия с помощью модели производственной функции обычно прибегают к методам агрегирования, когда множество ресурсов объединяют в две группы или выделяют два основных ресурса (x_1, x_2), которые оказывают существенное влияние на уровень затрат и объемы выпускаемой продукции [5].

Издержки производства описываются функцией (2). Фиксированному объему средств, затраченных на производство, будет соответствовать определенное количество ресурсов, которое возможно приобрести, причем предприятие может закупить любое количество каждого вида, в пределах функции $C = p_1x_1 + p_2x_2$. При фиксированном значении $C=C_1$ графически функция издержек приобретает вид линий, которые принято называть изокостами (Рисунок 1).

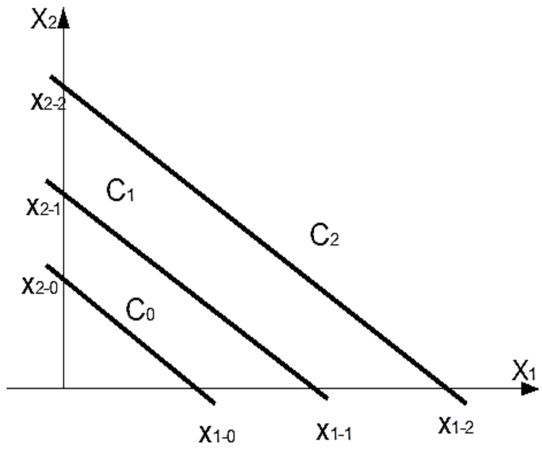

Рисунок 1. Семейство изокост производственной функции.

Объему финансирования C_0 будет соответствовать изокоста $x_{1\text{-}0} - x_{2\text{-}0}$, если увеличить финансирование до C_1, то изокванта поднимется до $x_{1\text{-}1} - x_{2\text{-}1}$, а C_2 будет соответствовать изокоста $x_{1\text{-}2} - x_{2\text{-}2}$. Из примера Рисунке 1 видно, что $C_2>C_1>C_0$.

Семейство изокост производственной функции описывается уравнениями:

$$C_0 = p_1x_1 + p_2x_2 \qquad (8)$$
$$C_1 = p_1x_1 + p_2x_2$$
$$C_2 = p_1x_1 + p_2x_2$$

При долгосрочном планировании задача оптимизации ресурсов представляет собой задачу на абсолютный глобальный максимум при условии положительного значения количества ресурсов $x_1, x_2, \ge 0$.

Максимум целевой функции (функции прибыли) можно найти среди множества x_1, x_2, которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial PR(x1,x2)}{\partial x1} = 0 \\ \frac{\partial PR(x1,x2)}{\partial x2} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Подставив выражение (7) в (9) получим:

$$\begin{cases} \frac{\text{po}\partial f(x1,x2)}{\partial x1} = p1 \\ \frac{\text{po}\partial f(x1,x2)}{\partial x2} = p2 \end{cases} \tag{10}$$

Из системы уравнений (10) можно найти затраты (x_{01}, x_{02}), соответствующие экстремуму целевой функции. Эта точка с координатами x_{01}, x_{02} является точкой рыночного равновесия предприятия. Если подставить это значение в уравнение (10), получим тождества:

$$\begin{cases} \frac{\text{po}\partial f(X01,X02)}{\partial x1} = p1 \\ \frac{\text{po}\partial f(X01,X02)}{\partial x2} = p2 \end{cases} \tag{11}$$

При почлененом делении одного тождества на другое получим следующее отношение:

$$\frac{\text{po}\partial f(X01,X02)}{\partial x1} / \frac{\text{po}\partial f(X01,X02)}{\partial x2} = p1/p2 \tag{12}$$

Выражение (12) показывает, что соотношение производительности ресурсов равно соотношению рыночных цен на эти ресурсы.

Если зафиксировать объем выпускаемой продукции на уровне $y = y_0 = f(x_1, x_2)$, то получим кривую в координатах (x_1, x_2), получим кривые, которые называются изоквантами (Рисунок 2).

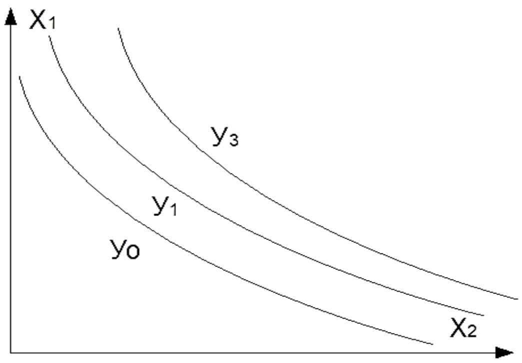

Рисунок 2. Изокванты производственной функции.

Изокванты показывают множество вариантов сочетаний ресурсов x_1 и x_2, с помощью которых можно выполнить определенный, фиксированный объем работ $У_0$. Уравнение изокванты имеет вид: $y_0 = f(x_1, x_2)$.

Объемы выпуска продукции соответствуют условию $У_2 > У_1 > У_0$.

Проведем через точку, соответствующую экстремуму целевой функции (x_{01}, x_{02}) изокванту и изокосту (Рисунок 3)

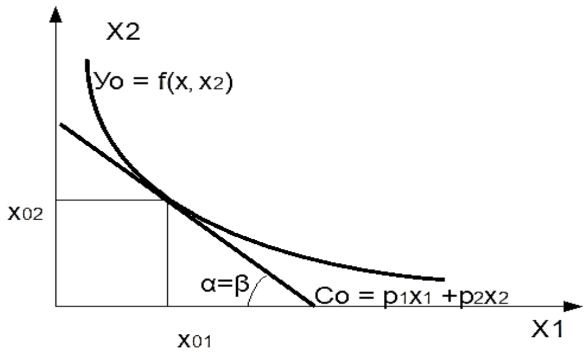

Рисунок 3. Изокванта и изокоста в точке экстремума целевой функции.

Из выражения (11), (12) следует, что $tg\alpha = tg\beta = p_1/p_2$, а это говорит о том, что изокоста в точке экстремума будет являться касательной к кривой изокванты.

Задача максимизации выпуска при ограниченных ресурсах

Формально постановка задачи имеет вид:

$$f(x_1, x_2) \to \max \qquad (13)$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 \le V$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

где V — ограничения по затратам ресурсов.

Графически задача решается следующим образом (Рисунок 4).

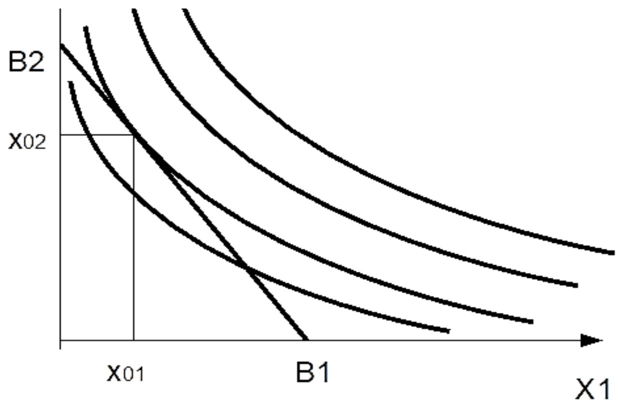

Рисунок 4. Графическое решение задачи оптимизации выпуска при ограниченных ресурсах.

Изокоста (Рисунок 4) соответствует всевозможным комбинациям ресурсов при ограниченных затратах (бюджете организации). На следующем этапе графической оптимизации строим изокванты производственной функции, которые сдвигаем до касания с изокостой. Точка касания изокванты с изокостой покажет максимальный объем выпуска продукции при оптимальном сочетании ресурсов x_1 и x_2.

Формально задачу оптимизации можно решить с помощью функции Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(C - p_1x_1 - p_2x_2) \qquad (14)$$

Для нахождения экстремума берем частные производные и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x1, x2, \lambda)}{\partial x1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x1, x2, \lambda)}{\partial x2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x1, x2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

После преобразований получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x1, x2)}{\partial x1} = \lambda p1 \\ \dfrac{\partial f(x1, x2)}{\partial x2} = \lambda p2 \\ C - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

Решением задачи оптимизации будет точка с координатами (x_{01}, x_{02}), взятая без множителя Лагранжа λ_0. Значения x_{01}, x_{02} будут соответствовать количеству ресурса вида x_1 и x_2 соответственно, при котором выпуск продукции будет максимальным.

Задача оптимизации ресурсов при фиксированном объеме выпуска

При данной постановке, задача оптимизации будет иметь вид:

$p_1x_1 + p_2x_2 = C(x_1, x_2) \to \min$

при условии

$$f(x_1, x_2) = y \qquad (17)$$
$$x1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

где $f(x_1, x_2)$ производственная функция, y — заданный объем выпуска, x_1, x_2 — ресурсы.

Графическое решение задачи заключается в построении изокванты производственной функции, к которой последовательно, до точки касания, перемещается изокоста (Рисунок 5).

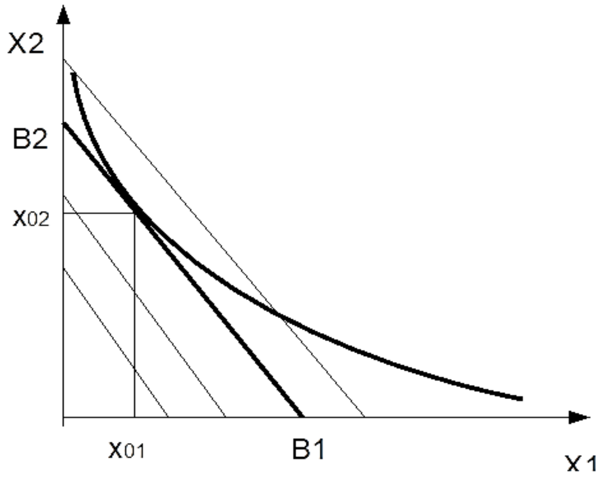

Рисунок 5. Графическое решение задачи оптимизации ресурсов при фиксированном выпуске.

Точка касания изокосты и изокванты покажет оптимальное сочетание ресурсов вида x_1 и x_2.

Формально задача оптимизации решается с помощью функции Лагранжа.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(y - f(x_1, x_2)) \tag{18}$$

Для нахождения экстремума берем частные производные и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x1, x2, \lambda)}{\partial x1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x1, x2, \lambda\,)}{\partial x2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x1, x2, \lambda\,)}{\partial\,\lambda} = 0 \end{cases} \tag{19}$$

После преобразований получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x1, x2)}{\partial x1} = \ p1 \\ \dfrac{\partial f(x1, x2)}{\partial x2} = p2 \\ f(x_1, x_2) = y \end{cases} \tag{20}$$

Решение системы уравнений (20) будет точка с координатами (x_{01}, x_{02}), взятая без множителя Лагранжа λ_0. Значения x_{01}, x_{02} будут соответствовать оптимальному соотношению ресурсов вида x_1 и x_2 соответственно, при фиксированном выпуске продукции.

Данный метод может быть использован на предприятиях, где существующие технологии позволяют использовать разные исходные материалы для получения одного и того же продукта, например, котельные и тепловые электростанции, применяющие для получения энергии уголь, мазут или природный газ. На промышленных предприятиях можно оценить количество импортных и отечественных комплектующих, необходимых для изготовления различных технических и иных объектов. Для укрупненных расчетов можно использовать два вида ресурса — труд и капитал, тогда, используя данный метод, можно в первом приближении оценить количество работников и оборудования, необходимых для реализации проекта.

Модели оптимизации ресурсов на основе теории игр

Будем полагать, что вариант распределения ресурсов является оптимальным, если все другие варианты не приводят к желаемому результату или позволяют достичь такой же результат с большими затратами. Однако на результативность проектов оказывают не только внутренние (состояние основных фондов предприятия, квалифицированных кадров, наличие запасов и финансирования), но и внешние факторы, такие как изменения конъюнктуры мировых рынков, колебания курсов ключевых валют, международная экономическая и политическая нестабильность и др.

Следует отметить, что вариант, принятый нами как оптимальный в одних условиях, может быть совершенно неподходящим при изменении состояния внешней среды через некоторый промежуток времени. Оптимальность распределения ресурсов может рассматриваться только в определенном состоянии внешней среды. Для решения задачи оптимизации в условиях полной и неполной неопределенности необходимо учитывать все возможные состояния среды на период реализации проекта. Для решения задач в условиях полной или неполной неопределенности предлагается математический инструментарий, основанный на теории игр с природой.

Размер выделяемых предприятию ресурсов будет зависеть не только стратегии развития отрасли, состояния предприятий, инфраструктуры, профессиональной подготовки специалистов, но и от следующих внешних факторов, характеризующих внешнюю среду:

- курсы валют;
- процентная банковская ставка;
- конъюнктура мирового рынка сырьевых товаров;
- экономические и политические санкции;
- соблюдение договорных обязательств внешними партнерами;
- социальная и политическая стабильность;
- состояние бюджета;
- природно–климатические условия.

Незначительные изменения этих факторов могут существенно повлиять на общее состояние среды и на принятие решения о финансировании того или иного проекта.

Современное состояние среды характеризуется нестабильностью мирового валютного и финансового рынка, значительными колебаниями цен на стратегические сырьевые товары, драгоценные металлы. Отечественная экономическая и финансовая система зависит от экспорта сырьевых товаров и импорта машин, оборудования и материалов. Международная политическая нестабильность способствует оттоку капитала за рубеж, что сокращает инвестиционный потенциал отечественной экономики. Согласованные антироссийские санкции ЕС, США, Японии и других присоединившихся к ним стран, оказывают влияние на общий вектор экономической стратегии нашей страны, вынуждая ее применять ответные меры. Между тем, судя по последним событиям, связанных с международными конфликтами, можно отметить, что среда, в которой функционируют предприятия отечественной промышленности не настроена агрессивно в отношении России, а заинтересована лишь в сдерживании развития нашей страны в инновационной сфере. Задачи соперников России будут заключаться в минимизации выигрыша, а не максимизации проигрыша.

Снизить выигрыш России пытаются ограничением финансирования проектов по добыче углеводородов, разрывом контрактов на поставку высокотехнологичного оборудования, комплектующих и запасных частей, замораживанием финансирования стратегических проектов и т. д.

Для оптимизации ресурсов, выделяемых на развитие космической отрасли в условиях враждебной среды возможно применение специальной методологии, основанной на моделях антагонистических игр с природой. Под антагонистическими играми в теории понимаются такие игры, в которых выигрыш одного игрока является проигрышем другого. Под природой здесь понимается враждебная, но не заинтересованная в проигрыше игрока (предприятие) среда (второй игрок).

Оптимизация ресурсов в условиях определенности

У Роскосмоса есть несколько стратегий (A_1, A_2, ... Ai, ... A_m) распределения ресурсов. Под стратегией будем понимать набор (портфель) проектов, среди которых есть исследовательские, коммерческие, оборонные и иные проекты. Каждый проект требует определенных затрат финансовых, трудовых и других ресурсов. Однако последствия реализации каждой стратегии будут зависеть от состояния (действий) среды. Внешняя среда может по-разному (B_1, B_2, ... B_j, ... B_n) реагировать на реализацию принятых страной стратегий — например, могут быть введены ограничения на поставку комплектующих и запасных частей, организованы мероприятия, направленные на ослабление национальной валюты, ограничено финансирование и т. п. Результативность стратегии развития отечественной промышленности при этом может быть снижена. Результаты возможных исходов (a_{ij}) запишем в таблицу, которая называется платежной матрицей (Таблица 1).

Таблица 1.

ТАБЛИЦА ВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ РЕАЛИЗАЦИИ СТРАТЕГИЙ
(ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА)

Стратегии предприятия	*Стратегии (внешней среды) природы*					
	B1	*B2*	...	*Bj*	...	*Bn*
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
Ai	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{jj}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Анализ платежной матрицы показывает, что существуют такая стратегия A для РКП, в которой имеется наилучший результат из всех наихудших вариантов. Так, в стратегии A_1 найдется самый минимальный результат $a_1 = min\ a_{1j}$, в стратегии A_2 найдется самый наихудший результат $a_2 = min\ a_{2j}$ и т. д. Потом из полученных наихудших результатов выбираем тот, который имеет максимальное значение $V_x = max\ a_i$.

Это означает, что мы, руководствуясь этим принципом, выбираем стратегию Ai, при которой при самом худшем варианте развития событий, мы обладаем гарантированным результатом $V_x=max_i\ min_j\ a_{ij}$. Придерживаясь стратегии Ai, РКП получит гарантированный выигрыш, превышающий значение a, которое в теории игр получило название *нижней цены игры* или максмина.

Игрок природа, не заинтересованный в разорении игрока, будет стараться снизить его выигрыш. Для этого природа постарается найти такую стратегию B из всех возможных, где выигрыш соперника был бы минимальным $V^x = min_j\, max_i\, a_{ij}$. Таким образом, придерживаясь стратегии *Bj*, природа получает гарантию того, что при любых стратегиях *A*, выигрыш соперника не превысит величину b_j, которая в теории игр получила название *верхней цены игры*, или минмакса.

Если верхняя цена игры совпадает с нижней ценой, то такая игра в теории называется игрой с седловой точкой. В седловой точке пересекаются оптимальные стратегии двух игроков, и в этом элементе платежной матрицы наблюдается равновесие, которое называется в случае антагонистических некооперативных (где участники не могут договориться между собой) игр равновесием по Нэшу. Эта ситуация интересна тем, что в этой точке другой участник не может улучшить свой результат, изменяя свои решения, если первый игрок не будет менять свою стратегию. Результат, который получат игроки в ходе реализации своих стратегий, называется чистой ценой игры.

Если седловой точки нет, а предприятие может одновременно использовать несколько стратегий, то задача будет состоять в том, в какой пропорции распределить ресурсы на реализацию каждой стратегии, чтобы получить максимальный результат. Внешняя среда также может использовать несколько стратегий с целью минимизации выигрыша российского предприятия, и ее задача будет состоять в определении пропорций различных видов нагрузки на предприятие. Решение задач в смешанных стратегиях ищем методами линейного программирования.

Принятие решений в условиях неопределенности

Существует немало случаев, когда нет возможности сделать достоверный прогноз состояния внешней среды. Поведение таких макроэкономических показателей, как безработица, инфляция, спрос, уровень доходов потребителей предсказать довольно сложно, не говоря о валютных курсах и ценах на комплектующие, материалы и другие ресурсы. Лицо, принимающее решение (ЛПР) на предприятии может лишь ориентироваться на расчеты экономистов, которые просчитывают варианты определенных стратегий при различных состояниях внешней среды (природы). Неопределенность может быть полной или неполной.

Если есть возможность оценить вероятность наступления каждого состояния природы, то это означает, что предприятия действует в условиях неполной неопределенности или в условиях риска.

Принятие решений в условиях риска

Предположим, у предприятия есть несколько стратегий развития, $i=1, 2, \ldots m$. Известно, что природа может находиться в нескольких состояниях $j = 1, 2, 3 \ldots n$. В случае принятия *i-го* решения, предприятие получит доход в j-м состоянии окружающей среды в размере z_{ij}. Для выбора оптимальной стратегии анализируется так называемая «матрица последствий решений», в которую заносятся возможные доходы предприятия при реализации различных стратегий в определенных состояниях природы (Таблица 2).

Особенность принятия решения в условиях риска состоит в том, что результат реализации a_{ij} стратегии предприятия необходимо корректировать на вероятность его осуществления P_j . Это позволяет получить интегральный показатель результата *Gi*, соответствующий каждой стратегии развития предприятия. Сравнение этих интегральных показателей позволяет выбрать оптимальную стратегию. Самый простой способ принятия решений в такой ситуации — это ориентироваться на максимальное математическое ожидание результата каждой стратегии (*Gi*) или минимальное значение математического ожидания, в случае, если элементы матрицы будут представлять собой убытки (потери).

Таблица 2.

ВОЗМОЖНЫЕ ПОСЛЕДСТВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ СТРАТЕГИИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Стратегии предприятия	*Возможные состояния внешней среды (природы) и вероятность их реализации*						$\sum_{j=1}^{n} P_j*a_{1j}$
	B1	*B2*	...	*Bj*	...	*Bn*	
	P1	*P2*	...	*PJ*	...	*Pn*	
A1	$P1*a_{11}$	$P2*a_{12}$	...	$Pj*a_{1j}$	...	$Pn*a_{1n}$	*G1*
A2	$P1*a_{21}$	$P2*a_{22}$	...	$Pj*a_{2j}$	...	$Pn*a_{2n}$	*G2*
...	...	...	...	...	...	...	
Ai	$P1*a_{i1}$	$P2*a_{i2}$	...	$Pj*a_{ij}$	...	$Pn*a_{in}$	*Gi*
...	...	...	...	...	...	...	
Am	$P1*a_{m1}$	$P2*a_{m2}$	...	$Pj*a_{mj}$	...	$Pn*a_{mn}$	*Gm*

Правило максимизации ожидаемого результата

Этот метод принятие решения носит еще название критерий Байеса. Средний доход или математическое ожидание $M[a_{ij}]$ есть сумма произведений результатов стратегии *Ai*, полученных при различных состояниях природы *Bj*, на вероятность состояния природы *Pj*. Это правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

Правило максимального выигрыша

Этот метод принятия решений основан на том, что РКП должна ориентироваться на максимальный результат, который дает каждая стратегия. Этот принцип принятия решений называется принципом оптимиста или МАКС–МАКС. В соответствии с этим правилом анализируются все максимальные результаты, которые удается достичь при различных состояниях природы.

Правило наибольшего гарантированного выигрыша

Гораздо более осторожный подход (критерий Вальда) ориентирован на получение гарантированного выигрыша при наихудшем состоянии внешней среды (стратегия пессимиста или MAX–MIN). В соответствии с этим подходом, выбирается та стратегия, при котором предполагается получить максимальный результат при наихудшем состоянии внешней среды.

Правило минимизации риска или критерий Сэвинджа

В соответствии с этим правилом, в качестве оптимальной выбирается такая стратегия, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагополучной ситуации. В литературе этот критерий выбора решений называется еще MINIMAX, который основан на минимизации максимально возможных потерь.

Выбор решения в соответствии с критерием Сэвинджа происходит в соответствии со следующими этапами.

1. В платежной матрице определяются максимальные значения результата реализации каждой стратегии РКП для каждого состояния природы Bi. Аналогичным образом анализируем и остальные состояния природы.
2. Элементы матрицы решений вычитаются из максимального значения соответствующего состояния внешней среды.
3. Результаты вычислений заносятся в так называемую матрицу рисков.

4. При принятии решения выбираем ту стратегию, которой характерны наименьшие значения.

В нашем примере, ошибочный выбор стратегии приводит к потерям, по сравнению с тем доходом, который мы могли получить, выбрав стратегию, приносящую максимальный результат.

Критерий Гурвица — учитывает субъективную склонность принимающего решения менеджера. Здесь придается вес каждому результату, который учитывается в расчетах. После умножения результатов на соответствующие веса и суммирования получается результат. Выбирается решение с наибольшим результатом. Менеджер может быть настроен оптимистически или осторожно. Его настроение характеризуется показателем x, который учитывается в формуле Гурвица:

$$Si = x\,min(a_{ij}) + (1-x)max(a_{ij}), \quad (21)$$
$$1 \geq x \geq 0,$$

где x — показатель пессимизма, характеризует личное настроение ЛПР.

Чем больше x, тем более осторожно настроены менеджеры предприятия. Оптимальной является стратегия, где получается наибольший результат max (Si).

Понятно, что, для осторожного управляющего значение x будет больше и выбор падет на другую стратегию.

Очевидно, что при $x=1$ получим правило MAX–MIN, а если принять $x=0$, то критерий Гурвица трансформируется в правило MAX–MAX.

Правило Лапласа. Не всегда имеется возможность предвидеть ситуацию и рассчитать вероятность наступления той или иной ситуации. В большинстве случаев достаточно сложно предвидеть поведение игроков на финансовых, сырьевых и других международных рынках. Также трудно найти решение проблем, с которыми в процессе реализации космических проектов раньше никто никогда не сталкивался. То есть, предвидеть то, что эти проблемы могут осложнить проект возможно, но определить вероятность их возникновения затруднительно. В условиях полной неопределенности применяют правило Лапласа, согласно которому все вероятности состояния природы считаются равными ($P_1 = P_2 = \ldots P_i = \ldots P_n$). После этого, ЛПР решает проблему выбора оптимального решения, в соответствии с известными методиками (MAX–MIN, MAX–MAX и др.)

В условиях неопределенности внешней среды, вызванной нестабильностью финансовых и сырьевых рынков, а также перманентными внешними ограничениями, использование моделей распределения ресурсов, основанных на методологии теории игр, представляется особенно важным и своевременным для российской экономики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №17-06-00344.

Список литературы:

1. Жданов С. А. Экономические модели и методы в управлении. М.: Дело и сервис. 1998. Т. 176. С. 4.

2. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Ленинград: Ленингр. гос. ун-т, 1939. 68 с.

3. Dantzig G. B. Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, 1963. 634 p.

4. Славянов А. С. Особенности контроллинга научной деятельности в условиях реализации стратегии импортозамещения // Современные вызовы контроллингу и требования к контроллерам. 2015. С. 241.

5. Клейнер Г. Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986. 240 с.

References:

1. Zhdanov, S. A. (1998). Economic models and methods in management. Moscow, Case and Service. V. 176, 4. (in Russian)

2. Kantorovich, L. V. (1939). Mathematical methods of organization and production planning. Leningrad, *Leningrad State University,* 68. (in Russian).

3. Dantzig, G. B. (1963). Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, 634.

4. Slavyanov, A. S. (2015). Peculiarities of controlling scientific activity in the context of import substitution strategy. *In: Modern challenges to controlling and requirements for controllers. 241*. (in Russian).

5. Kleiner, G. B. (1986). Production functions: theory, methods, application. Moscow, Finansy i statistika, 240.

Работа поступила в редакцию 25.08.2018 г.

Принята к публикации 28.08.2018 г.

Ссылка для цитирования:

Славянов А. С. Анализ и практическое применение моделей распределения ресурсов // Бюллетень науки и практики. 2018. Т. 4. №9. С. 228-244. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/slavianova (дата обращения 15.09.2018).

Cite as (APA):

Slavianov, A. (2018). Analysis and practical application of resource distribution models. *Bulletin of Science and Practice, 4*(9), 228-244.