

УДК 536.2:517.958:66

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

©Садиков А. В., канд. техн. наук, Казанский национальный исследовательский технологический университет,
г. Нижнекамск, Россия, sadykov_av@mail.ru

NUMERICAL SOLUTION OF THE EQUATIONS OF THE TURBULENCE MODEL

©Sadykov A., Ph.D., Kazan National Research Technological University,
Nizhnekamsk, Russia, sadykov_av@mail.ru

Аннотация. Рассматривается вычислительная схема для численного решения двумерных уравнений $k-\varepsilon$ модели турбулентности. Для получения дискретных аналогов дифференциальных уравнений в частных производных используется метод сплайн-коллокации в сочетании с методом конечных разностей. Учитывается переменность теплофизических свойств.

Abstract. The computational scheme for the numerical solution of two-dimensional equations of the $k-\varepsilon$ turbulence model is considered. To obtain discrete analogues of partial differential equations, the spline-collocation method is used in combination with the finite difference method. The variability of thermal properties is considered.

Ключевые слова: сплайн-коллокация, стационарная задача, дифференциальные уравнения в частных производных.

Keywords: spline-collocation, stationary problem, differential equations in partial derivatives.

Тепловой расчет топочных камер трубчатых печей сводится к совместному решению уравнений переноса излучения, осредненных уравнений энергии, движения, неразрывности, модели турбулентности, модели горения. Такая система уравнений является нелинейной, поэтому может быть решена численными методами.

Метод, предложенный в работе «Решение двумерного уравнения энергии методом сплайн-коллокации» (2005) для решения дифференциального уравнения энергии, является простым в реализации [1]. В работе «Численное решение уравнения энергии с учетом горения газообразного топлива» (2009) этот метод применен при численном решении уравнений модели горения [2]. Уравнения модели горения имеют почти такой же вид, что и уравнения $k-\varepsilon$ модели турбулентности. Поэтому представляет интерес применение этого метода для решения уравнений модели турбулентности. В данной работе решается стационарная задача для двумерной цилиндрической геометрии. Упрощенная схема области и система координат представлены на Рисунке 1.

Дифференциальное уравнение для параметров $k-\varepsilon$ модели турбулентности имеет вид [3]:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r \varphi) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma_\varphi r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + S_\varphi, \quad (1)$$

где $\varphi = \{k, \varepsilon\}$; $\Gamma_\varphi = \mu + \mu_T / \sigma_\varphi$ — коэффициент переноса; v_z, v_r — компоненты вектора скорости; ρ — плотность; S_φ — источниковый член (в дальнейшем будем обозначать его как f).

Источниковые члены S_k, S_ε определяются следующим образом:

$$S_k = G - c_k \rho \varepsilon,$$

$$S_\varepsilon = (c_{1\varepsilon} G \varepsilon - c_{2\varepsilon} \rho \varepsilon^2) / k,$$

где $c_{1\varepsilon}, c_{2\varepsilon}, c_k, c_\mu$ — эмпирические константы $k - \varepsilon$ модели [3],

$$G = \mu_T \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 \right\}.$$

Турбулентная вязкость вычисляется по формуле $\mu_T = c_\mu \rho k^2 / \varepsilon$, где $c_\mu = 0,09$.

Уравнение (1) дополняется граничными условиями. На входном участке в топку ставится граничное условие 1 рода. На оси симметрии (OZ) задается условие симметрии:

$$\frac{\partial k}{\partial r} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0. \text{ На выходе задается граничное условие II рода: } \frac{\partial k}{\partial z} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0. \text{ На жесткой}$$

стенке задаются стандартные условия для $k - \varepsilon$ модели: $\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0, k = 0$.

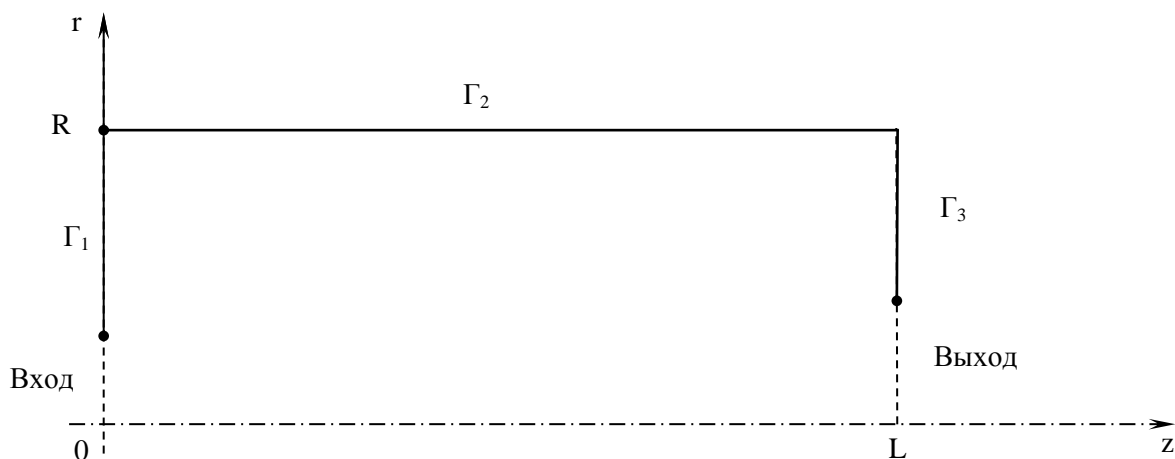


Рисунок 1. Размеры области, границы

В области $[0, L] \times [0, R]$ введем сетку $\Delta = \Delta_z \times \Delta_r$, где $\Delta_z : 0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$; $\Delta_r : 0 = r_0 < r_1 < \dots < r_M = R$. Кубический сплайн двух переменных на такой сетке можно представить в виде [5]:

$$S(z, r) = \sum_{i=-1}^{N+1} w_i(r) \cdot B_i(z), \tag{2}$$

где

$$w_i(r) = \sum_{j=-1}^{M+1} b_{ij} \overline{B_j}(r); \quad i = \overline{-1, N+1}. \tag{3}$$

Здесь z — составляющая представлена в виде дважды непрерывно дифференцируемой функции — кубического нормализованного В-сплайна, а r — составляющая — в виде $w_i(r)$.

B –сплайны нумерованы по среднему узлу их интервалов носителей. Для полного определения базисных функций $B_i(z)$, входящих в (2), Δ_z дополним узлами $z_{-3} < z_{-2} < z_{-1} < z_0, z_{N+3} > z_{N+2} > z_{N+1} > z_N$, а Δ_r — узлам и $r_{-1} < r_0, r_M < r_{M+1}$.

Приближенное решение уравнения (1) ищем в виде (2). Для простоты рассмотрим равномерную сетку $h = z_{i+1} - z_i, \tau = r_{j+1} - r_j (h, \tau - \text{const})$. Зафиксировав r , будем считать, что изменение кинетической энергии турбулентных пульсаций k и скорости ее диссипации ε по z вблизи узла (z_i, r_j) описывается сплайном

$$S(z, r_j) = \sum_{i=-1}^{N+1} w_{i,j} \cdot B_i(z),$$

где $w_{i,j} = w_i(r_j)$. С учетом финитности сплайна имеем:

$$S(z_i, r_j) = \sum_{i'=i-1}^{i+1} w_{i',j} \cdot B_{i'}(z_i), \quad (4)$$

Для равномерной сетки эта формула принимает вид:

$$S(z_i, r_j) = \frac{1}{6} w_{i-1,j} + \frac{2}{3} w_{ij} + \frac{1}{6} w_{i+1,j} \quad (5)$$

Согласно идее метода коллокации, приближенное решение $S(z, r)$ в узлах коллокации удовлетворяет уравнению (1). Узлы коллокации возьмем совпадающими с узлами сплайна. Подставим (2) в уравнение (1) и потребуем совпадения левой и правой частей в узлах (z_i, r_j) :

$$\left[\rho v_z \frac{\partial S}{\partial z} \right]_{i,j} + \left[\frac{\rho v_r r}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \right]_{i,j} = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_s \frac{\partial S}{\partial z} \right) \right]_{i,j} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma_s r \frac{\partial S}{\partial r} \right) \right]_{i,j} + f_{i,j} \quad (6)$$

Вблизи точки (z_i, r_j) значения ρ, Γ_s меняются незначительно. Поэтому в окрестности этой точки ρ, Γ_s можно вынести за знак производной. Тогда уравнение (6) примет вид:

$$\left[\rho v_z \frac{\partial S}{\partial z} \right]_{i,j} + \left[\rho v_r \frac{\partial S}{\partial r} \right]_{i,j} = \left[\Gamma_s \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right]_{i,j} + \left[\frac{\Gamma_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) \right]_{i,j} + f_{i,j} \quad (7)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N; \quad j = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Выведем формулы для производных $\frac{\partial S}{\partial z}, \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$. На основе (2) имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \sum_{i=-1}^{i+1} w_i(r_j) \frac{dB_i}{dz},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \sum_{i=-1}^{i+1} w_i(r_j) \frac{d^2 B_i}{dz^2}.$$

Учитывая, что для равномерной сетки:

$$B'_{i-1}(z_i) = -\frac{1}{2h}, B'_i(z_i) = 0, B'_{i+1}(z_i) = \frac{1}{2h}, \quad (8)$$

$$B''_{i-1}(z_i) = \frac{1}{h^2}, B''_i(z_i) = -\frac{2}{h^2}, B''_{i+1}(z_i) = \frac{1}{h^2},$$

получим:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=z_i} = -\frac{1}{2h} w_{i-1,j} + \frac{1}{2h} w_{i+1,j}; \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right|_{z=z_i} = \frac{1}{h^2} (w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}).$$

Для аппроксимации производной во втором конвективном члене в (7) используем разности против потока:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial r} \right|_{i,j} = \begin{cases} \frac{S_{ij} - S_{i,j-1}}{\tau}, v_r \geq 0; \\ \frac{S_{i,j+1} - S_{ij}}{\tau}, v_r < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Производная во втором диффузионном члене в (7) аппроксимируется в виде:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) \right]_{i,j} = \frac{1}{r_j \tau} \left[\left(r \frac{\partial S}{\partial R} \right) \Big|_{i,j+1/2} - \left(r \frac{\partial S}{\partial R} \right) \Big|_{i,j-1/2} \right]. \quad (11)$$

Индекс $(j \pm 1/2)$ указывает на то, что производные берутся в точках, лежащих посередине между соответствующими узлами сетки. Члены в квадратных скобках в правой части формулы (11) аппроксимируем следующим образом:

$$\left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) \Big|_{i,j+1/2} = r_{j+1/2} \frac{S_{i,j+1} - S_{ij}}{\tau}, \quad (12)$$

$$\left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) \Big|_{i,j-1/2} = r_{j-1/2} \frac{S_{i,j} - S_{i,j-1}}{\tau}.$$

Тогда формула (11) примет вид:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) \right]_{i,j} = \frac{1}{r_j \tau^2} [r_{j-1/2} S_{i,j-1} - (r_{j-1/2} + r_{j+1/2}) S_{i,j} + r_{j+1/2} S_{i,j+1}] \quad (13)$$

Выразим производные во втором конвективном и втором диффузионном членах через $w_{i,j}$:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial r} \right|_{i,j} = \frac{1}{6\tau} (w_{i-1,j+p} - w_{i-1,j-1+p}) + \frac{2}{3\tau} (w_{i,j+p} - w_{i,j-1+p}) + \frac{1}{6\tau} (w_{i+1,j+p} - w_{i+1,j-1+p}), \quad (14)$$

$$\text{где } p = \begin{cases} 0, & \text{если } v_r \geq 0; \\ 1, & \text{если } v_r < 0; \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) \right]_{i,j} = \left[\frac{1}{r_j \tau^2} r_{j-1/2} \left(\frac{1}{6} w_{i-1,j-1} + \frac{2}{3} w_{i,j-1} + \frac{1}{6} w_{i+1,j-1} \right) - (r_{j-1/2} + r_{j+1/2}) \left(\frac{1}{6} w_{i-1,j} + \frac{2}{3} w_{i,j} + \frac{1}{6} w_{i+1,j} \right) + r_{j+1/2} \left(\frac{1}{6} w_{i-1,j+1} + \frac{2}{3} w_{i,j+1} + \frac{1}{6} w_{i+1,j+1} \right) \right]. \quad (15)$$

Чтобы избежать деления на ноль в формуле (15) при $j=0$ предварительно применяется правило Лопиталья.

После подстановки правых частей формул (12), (14), (15) и простых преобразований уравнение (7) принимает вид:

$$\sum_{i'=i-1}^{i+1} \sum_{j'=j-1}^{j+1} A_{i',j'} w_{i',j'} = f_{ij} \quad (j=0,1,\dots,M; i=0,1,\dots,N) \quad (16)$$

В системе (16) на каждом j -ом слое имеется $(N+3)$ неизвестных коэффициентов $w_{i,j}$. Поэтому еще необходимо еще по 2 уравнения на каждом слое. Недостающие уравнения получим с помощью граничных условий. С помощью граничных условий при $z=0$ и $z=L$ исключаются из системы неизвестные $w_{-1,j}$ и $w_{N+1,j}$. Неизвестные $w_{i,-1}$ исключаются с помощью условия симметрии на оси. Неизвестные $w_{i,M+1}$ исключаются с помощью граничных условий на боковой поверхности ($r=R$). Рассмотрим вывод дополнительных уравнений относительно $w_{i,j}$ для некоторых из границ.

1. Входное сечение

На входном участке поставим условия:

$$k = c v_{0,j}^2; \varepsilon = c_0 \frac{k^{3/2}}{0,03 \Delta R}; j = 0, 1, \dots, j_{\text{вх}},$$

где $c_0 = 0,09$; $v_{0,j}$ — скорость на входе; ΔR — ширина канала; c — константа. То есть можно записать:

$$\begin{aligned} S_{0,j} &= k_{\text{вх}}, \\ S_{0,j} &= \varepsilon_{\text{вх}}, \end{aligned} \quad 0 \leq j \leq j_{\text{вх}} \quad (17)$$

С учетом (5) условие (17) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} w_{-1,j} + \frac{2}{3} w_{0,j} + \frac{1}{6} w_{1,j} &= k_{\text{вх}}, \\ \frac{1}{6} w_{-1,j} + \frac{2}{3} w_{0,j} + \frac{1}{6} w_{1,j} &= \varepsilon_{\text{вх}}, \end{aligned} \quad 0 \leq j \leq j_{\text{вх}}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} w_{-1,j} &= 6k_{\text{вх}} - 4w_{0,j} - w_{1,j} \\ w_{-1,j} &= 6\varepsilon_{\text{вх}} - 4w_{0,j} - w_{1,j} \end{aligned} \quad 0 \leq j \leq j_{\text{вх}}$$

или

$$\begin{aligned} w_{-1,j}' &= 6k_{\text{вх}} - 4w_{0,j}' - w_{1,j}' & j' = \overline{j-1, j+1}, 1 \leq j \leq j_{\text{вх}} - 1. \\ w_{-1,j}' &= 6\varepsilon_{\text{вх}} - 4w_{0,j}' - w_{1,j}' \end{aligned}$$

При $i = 0$ уравнение (16) примет вид:

$$\sum_{i=-1}^1 \sum_{j=j-1}^{j+1} A_{i,j} w_{i,j}' = f_{0,j}, \quad 1 \leq j \leq j_{\text{вх}} - 1.$$

В результате преобразований это уравнение запишется в виде:

$$A_{0,j} w_{0,j} + A_{1,j} w_{1,j} = \varphi_j, \quad (j = \overline{0, j_{\text{вх}}})$$

где

$$\begin{aligned} A_{0,j} &= \frac{2(\rho v_z)_{i,j}}{h} + \frac{6(\Gamma_S)_{0,j}}{h^2}; \\ A_{1,j} &= \frac{(\rho v_z)_{0,j}}{h}, \\ \left[\begin{aligned} \varphi_j &= f_{0,j} - 6k_{\text{вх}} (A_{-1,j-1} + A_{-1,j} + A_{-1,j+1}) \text{ для } k, \\ \varphi_j &= f_{0,j} - 6\varepsilon_{\text{вх}} (A_{-1,j-1} + A_{-1,j} + A_{-1,j+1}) \text{ для } \varepsilon. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

2. Ось симметрии

На оси симметрии ставится условие симметрии:

$$\frac{\partial k}{\partial r} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0, \text{ т. е. } \left. \frac{\partial S}{\partial r} \right|_{i,0} = 0.$$

Используя формулу центральной разности, получим:

$$S_{i,-1} = S_{i,1} \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

С учетом (5) это условие принимает вид:

$$w_{i,-1} = w_{i,1} \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Для оси симметрии уравнение (16) запишется как:

$$\begin{aligned} &A_{i-1,-1} w_{i-1,-1} + A_{i,-1} w_{i,-1} + A_{i+1,-1} w_{i+1,-1} + \\ &+ A_{i-1,0} w_{i-1,0} + A_{i,0} w_{i,0} + A_{i+1,0} w_{i+1,0} + \\ &+ A_{i-1,1} w_{i-1,1} + A_{i,1} w_{i,1} + A_{i+1,1} w_{i+1,1} = f_{i,0} \end{aligned}$$

Согласно условию на оси симметрии:

$$w_{i-1,-1} = w_{i-1,1}; w_{i,-1} = w_{i,1}; w_{i+1,-1} = w_{i+1,1}.$$

Тогда уравнение преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} &A_{i-1,0} w_{i-1,0} + A_{i,0} w_{i,0} + A_{i+1,0} w_{i+1,0} + \\ &+ (A_{i-1,-1} + A_{i-1,1}) w_{i-1,1} + (A_{i,-1} + A_{i,1}) w_{i,1} + (A_{i+1,-1} + A_{i+1,1}) w_{i+1,1} = f_{i,0} \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (16) для оси симметрии запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} &A_{i-1,0} w_{i-1,0} + A_{i,0} w_{i,0} + A_{i+1,0} w_{i+1,0} + \\ &+ 2A_{i-1,1} w_{i-1,1} + 2A_{i,1} w_{i,1} + 2A_{i+1,1} w_{i+1,1} = f_{i,0} \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

3. Выходное сечение

В узлах выходного сечения ставится условие $\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0$ ($i = N; 0 \leq j \leq j_{\text{вых}}$). С учетом

(9) это условие принимает вид:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=z_N} = -\frac{1}{2h} w_{N-1,j} + \frac{1}{2h} w_{N+1,j}.$$

Отсюда $w_{N-1,j} = w_{N+1,j}$, $0 \leq j \leq j_{\text{вых}}$.

Тогда уравнение (16) для выходного сечения принимает вид:

$$\begin{aligned} & (A_{N-1,j-1} + A_{N+1,j-1})w_{N-1,j-1} + A_{N,j-1}w_{N,j-1} + \\ & + (A_{N-1,j} + A_{N+1,j})w_{N-1,j} + A_{N,j}w_{N,j} + \\ & + (A_{N-1,j+1} + A_{N+1,j+1})w_{N-1,j+1} + A_{N,j+1}w_{N,j+1} = f_{N,j}. \end{aligned}$$

$$0 \leq j \leq j_{\text{вых}}.$$

Так как

$$A_{i+1,j-1} = A_{i-1,j-1}; A_{i+1,j+1} = A_{i-1,j+1}$$

последнее уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} & 2A_{N-1,j-1}w_{N-1,j-1} + A_{N,j-1}w_{N,j-1} + \\ & + (A_{N-1,j} + A_{N+1,j})w_{N-1,j} + A_{N,j}w_{N,j} + \\ & + 2A_{N-1,j+1}w_{N-1,j+1} + A_{N,j+1}w_{N,j+1} = f_{N,j}. \end{aligned}$$

$$0 \leq j \leq j_{\text{вых}}.$$

4. Граница Γ_1

На жесткой стенке ставятся следующие условия: $\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0, k = 0$.

Для кинетической энергии турбулентных пульсаций k уравнение (16) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} & A_{-1,j-1}w_{-1,j-1} + A_{0,j-1}w_{0,j-1} + A_{1,j-1}w_{1,j-1} + \\ & + A_{-1,j}w_{-1,j} + A_{0,j}w_{0,j} + A_{1,j}w_{1,j} + \\ & + A_{-1,j+1}w_{-1,j+1} + A_{0,j+1}w_{0,j+1} + A_{1,j+1}w_{1,j+1} = f_{0,j}; \\ & j_{\text{вх}} \leq j \leq M. \end{aligned}$$

Так как $k = 0$, можно записать $S_{0,j} = 0, j_{\text{вх}} \leq j \leq M$.

В свою очередь

$$\frac{1}{6}w_{-1,j} + \frac{2}{3}w_{0,j} + \frac{1}{6}w_{1,j} = S_{0,j}.$$

Выразим из этого уравнения $w_{-1,j}$:

$$w_{-1,j} = -\frac{2}{3}w_{0,j} - \frac{1}{6}w_{1,j};$$

Пусть $\varphi_j = f_{0,j} - (A_{-1,j-1}w_{-1,j-1} + A_{-1,j}w_{-1,j} + A_{-1,j+1}w_{-1,j+1})$.

В результате преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{6}A_{0,j-1}w_{0,j-1} + \frac{5}{6}A_{1,j-1}w_{1,j-1} + \\ & + \left(-\frac{2}{3}A_{-1,j} + A_{0,j}\right)w_{0,j} + \left(-\frac{1}{6}A_{-1,j} + A_{1,j}\right)w_{1,j} + \\ & + \frac{5}{6}A_{0,j+1}w_{0,j+1} + \frac{5}{6}A_{1,j+1}w_{1,j+1} = \varphi_j; \end{aligned}$$

$$j_{\text{вх}} \leq j \leq M.$$

Для скорости турбулентных пульсаций ε поступаем аналогичным образом.

5. Границы Γ_2, Γ_3

Рассматриваются аналогично границе Γ_1 .

В результате из системы (16) исключили ряд неизвестных с учетом граничных условий и количество неизвестных w_{ij} ($j=0,1,\dots,M; i=0,1,\dots,N$) сократилось до $(N+1)(M+1)$.

Систему (16) запишем в виде:

$$\begin{cases} B_0\Phi_0 + C_0\Phi_1 = F_0 \\ A_j\Phi_{j-1} + B_j\Phi_j + C_j\Phi_{j+1} = F_j \quad (j=1,\dots,M-1) \\ A_M\Phi_{M-1} + B_M\Phi_M = F_M \end{cases} \quad (18)$$

где A_j, B_j, C_j — трехдиагональные матрицы; $\Phi_j = (w_{0j}, w_{1j}, \dots, w_{Nj})'$; F_j — вектор из правых частей. Здесь $()'$ — означает транспонирование.

Для решения таких систем имеются как прямые, так и итерационные методы. Как показывает вычислительная практика, итерационные методы более предпочтительны. Поэтому лучше применить блочный метод последовательной верхней релаксации [5]. Алгоритм метода реализуется следующим образом:

$$\begin{cases} \Phi_0^{(l+1)} = (1-\tau) \cdot \Phi_0^{(l)} + \tau \cdot B_0^{-1}(-C_0\Phi_1^{(l)} + F_0) \\ \Phi_j^{(l+1)} = (1-\tau) \cdot \Phi_j^{(l)} + \tau \cdot B_j^{-1}(-A_j\Phi_{j-1}^{(l+1)} - C_j\Phi_{j+1}^{(l)} + F_j) \quad (j=1,\dots,M-1), \\ \Phi_M^{(l+1)} = (1-\tau) \cdot \Phi_M^{(l)} + \tau \cdot B_M^{-1}(-A_M\Phi_{M-1}^{(l+1)} + F_M) \end{cases}$$

где τ — итерационный параметр ($\tau \in (1; 2)$), l — номер итерации. Матрицы B_j имеют диагональное преобладание. Поэтому при реализации этого алгоритма не возникает проблем с обращением матриц.

Для нахождения распределения кинетической энергии турбулентных пульсаций k и скорости ее диссипации ε в области $[0, L] \times [0, R]$ используется итерационный алгоритм. Итерационный процесс прекращается при выполнении условия:

$$\max_{ij} \left| \frac{\varphi_{ij}^{(l)}}{\varphi_{ij}^{(l-1)}} - 1 \right| \leq \delta,$$

где l — номер итерации; δ — заданная точность; $\varphi = \{k, \varepsilon\}$.

Список литературы:

1. Садыков А. В. Решение двумерного уравнения энергии методом сплайн-коллокации // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы шестого всероссийского семинара. Казань: Казан. гос. университет, 2005. С. 194-197.
2. Садыков А. В., Валеев И. М. Численное решение уравнения энергии с учетом горения газообразного топлива // Вестник Казанского технологического университета. 2009. №3. С. 39-46.
3. Белов И. А., Кудрявцев Н. А. Теплоотдача и сопротивление пакетов труб. Л.: Энергоатомиздат, 1987. 223 с.
4. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 534 с.

References:

1. Sadykov, A. V. (2005). Solution of the two-dimensional energy equation by the spline-collocation method. Grid methods for boundary value problems and applications. *Materials of the Sixth All-Russian Seminar*. Kazan: Kazan. State. University, 194-197.
2. Sadykov, A. V., & Valeev, I. M. (2009). Numerical solution of the energy equation taking into account combustion of gaseous fuel. *Bulletin of Kazan Technological University*, (3). 39-46.
3. Belov, I. A., & Kudryavtsev, N. A. (1987). Heat transfer and resistance of stacks of pipes. Leningrad: Energoatomizdat, 223.
4. Zavyalov, Yu. S., Kvasov, B. I., & Miroshnichenko V. L. (1980). Methods of spline functions. Moscow: Nauka, 352.
5. Marchuk, G. I. (1980). Methods of computational mathematics. Moscow: Nauka, 534.

*Работа поступила
в редакцию 31.07.2018 г.*

*Принята к публикации
05.08.2018 г.*

Ссылка для цитирования:

Садыков А. В. Численное решение уравнений модели турбулентности // Бюллетень науки и практики. 2018. Т. 4. №9. С. 9-17. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/sadykov-a> (дата обращения 15.09.2018).

Cite as (APA):

Sadykov, A. (2018). Numerical solution of the equations of the turbulence model. *Bulletin of Science and Practice*, 4(9), 9-17.