

CZU: 519.813:[371.212+371.385]

MODELAREA EXPERIMENTELOR ALEATOARE ȘI FORMAREA GÂNDIRII PROBABILISTE LA ELEVI

Andrei POȘTARU, Olga BENDERSCHI

Universitatea de Stat din Moldova

În scopul formării gândirii probabiliste la elevi se propune un sistem complex de exerciții (rezolvate sau propuse spre rezolvare). În principiu, aici este vorba despre exerciții care se referă la experimente aleatoare devenite „clasice”, legate de aruncarea monedei, aruncarea zarului, alegerea la întâmplare a unui punct dintr-o mulțime oarecare de puncte, extragerea unei bile dintr-o urnă etc. Modelarea unor astfel de experimente este, credem noi, un suport bun, dar și un instrument eficient pentru crearea la elevi a unei gândiri probabiliste. Modelarea se poate efectua utilizând tabele de numere aleatoare sau elaborând programe în diverse limbaje de programare.

Cuvinte-cheie: *gândire probabilistă, experimente aleatoare, modelarea experimentelor aleatoare, definiția statistică a probabilității.*

THE MODELING OF RANDOM EXPERIMENTS AND TRAINING OF THE PROBABILISTIC THINKING OF PUPILS

The purpose of cultivating a probabilistic thinking involves a complex system of exercises and problems (to be solved or to be proposed to be solved). In general we are speaking about problems which refer to some "classic" random experiments about the tossing of a coin, the throwing of a dice, the randomly choosing of a point in a set of points, the extraction of a ball from an urn, etc. The modeling of such experiments is, we believe, a good support, but also an effective tool for creating a probabilistic thinking of pupils. In our work we present examples of modeling performed by using random number tables or by proposing programs in various programming languages.

Keywords: *probabilistic thinking, randomly choosing, modeling of random experiments, statistical definition of probability.*

Introducere

Teoria probabilităților este o structură matematică care verifică un anumit sistem de axiome. Acest concept stă la baza oricărui curs de Teoria Probabilităților în școala superioară. Accentul se pune pe însușirea aparatului matematic, necesar la examinarea modelelor probabiliste. În liceu o astfel de abordare nu pare rațională. În general, o gândire probabilistă se formează greu și într-un timp mai îndelungat, timp pe care programa analitică nu-l poate asigura. În ceea ce privește alte discipline matematice, lucrurile par mai simple, dat fiind continuitatea materiei lor.

În liceu, predarea elementelor de teoria probabilităților are următoarele scopuri:

- elevul trebuie să se familiarizeze cu unele legități ce apar în procesele în care factorul aleator intervine în mod esențial;
- elevul trebuie să învețe a crea modele matematice probabiliste pentru unele situații (fenomene) reale;
- elevul trebuie să poată utiliza modelele matematice create pentru studierea situațiilor reale și pentru a prognoza rezultatele experimentelor respective.

Acese competențe trebuie să asigure formarea la elevi a unei gândiri probabiliste.

Scopul cultivării unei gândiri probabiliste presupune un sistem complex de exerciții și probleme, rezolvate sau propuse spre rezolvare.

O bună parte din probleme se referă la experimente aleatoare ce țin de:

- ✓ alegerea „la întâmplare” a unor elemente dintr-o mulțime oarecare: a unei bile dintr-o urnă, a unui punct dintr-o mulțime de puncte (interval, dreptunghi, cerc etc.);
- ✓ aruncarea la „întâmplare” a unei monede (a două, trei etc.), a unui zar etc.

1. Definiția statistică a probabilității

Amintim că definiția clasică a probabilității se aplică doar în cazul experimentelor cu un număr finit de rezultate echiprobabile (evenimente elementare echiprobabile) [1,2]. Totodată, există numeroase experimente aleatoare, ale căror rezultate fie că nu sunt echiprobabile, fie numărul lor este infinit. Dar, problema principală

constă în aceea că pentru cele mai multe experimente aleatoare este imposibil să reprezinti rezultatul ca o mulțime de evenimente elementare. În consecință, a fost necesar să fie formulate și alte definiții ale probabilității, care să cuprindă clase mai largi de experimente.

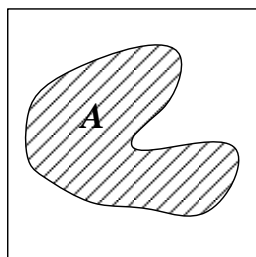
Practica, intuiția ne spun că un eveniment aleator este cu atât mai probabil cu cât se produce mai des. Prin urmare, probabilitatea trebuie să fie legată de frecvență. Astfel, ajungem la definiția statistică a probabilității.

Definiție: Probabilitate a evenimentului aleator A se numește numărul $P(A)$ de care se apropie frecvența relativă a acestui eveniment într-o serie lungă de experimente.

Această definiție, cunoscută ca *definiția statistică a probabilității*, ne dă o estimatie a acestei probabilități. Cu cât mai mare este n , cu atât mai exactă este această aproximație. În practică, drept probabilitate a evenimentului se ia frecvența lui relativă într-o serie de experimente suficient de lungă: $P(A) \approx \frac{v_n(A)}{n}$.

În legătură cu definiția statistică, modelarea experimentelor este un suport bun, dar și un instrument eficient pentru crearea la elevi a unei gândiri probabiliste. Modelarea se poate efectua utilizând *tabele de numere aleatoare* sau *elaborând programe în diverse limbaje de programare*.

Exemplu. În pătratul de mai jos se ia un punct la întâmplare. Care este probabilitatea P ca punctul luat să aparțină mulțimii de puncte A ?

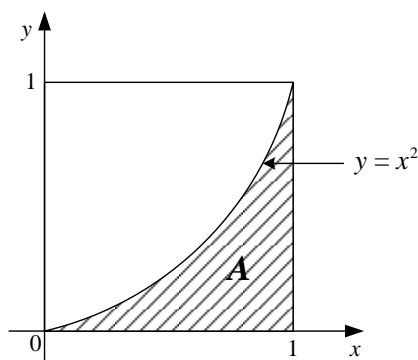


Soluție. Răspunsul (aproximativ) îl găsim cu ajutorul definiției statistice a probabilității: luăm în pătrat de n ori câte un punct la întâmplare, numărăm punctele care nimeresc în A (fie numărul lor) și luăm $P(A) \approx \frac{v_n(A)}{n}$.

Doar că aici apare o problemă: cum va fi efectuat realmente acest experiment, cum vom lua la întâmplare un punct din acest pătrat?

2. Modelarea unor experimente aleatoare

Să revenim la exemplul de mai sus, luând în calitate de A o mulțime concretă, de exemplu:



Presupunem că lungimea laturii pătratului este de 1 cm, iar vârfurile lui sunt $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Vom lua la întâmplare câteva puncte în pătrat, folosind numerele aleatoare din următorul tabel cu numere aleatoare [3]:

5446	3226	6265
9057	0639	7936
5673	8229	0856
9831	4705	8186
1538	9852	0518

Luăm primele două perechi de numere: 54 și 46, și considerăm în plan punctul cu coordonatele (0,54;0,46). Acest punct „luat la întâmplare” în pătrat nu verifică condiția $x^2 \geq y$. Continuând, luăm din tabel următoarea pereche 32 și 26. Punctul respectiv (0,32;0,26) de asemenea nu aparține mulțimii A . Dintre 15 puncte care se obțin cu numerele aleatoare din tabel, doar trei aparțin mulțimii A . Acestea sunt perechile: (0,06;0,39), (0,08;0,56), (0,05;0,18).

Astfel, frecvența relativă a evenimentului aleator $A = \{\text{un punct luat la întâmplare în pătrat nimereste în mulțimea } A\}$ este egală cu: $v_{10}(A) = 0,2$.

În baza definiției statistice a probabilității putem lua acest număr drept probabilitatea ca un punct, luat la întâmplare în pătratul dat, să nimerescă în mulțimea $A = \{(x, y): y \leq x^2\}$.

De fapt, valoarea exactă a probabilității este $1/3$, de care, bineînțeles, se va apropia frecvența relativă la creșterea numărului de puncte luate la întâmplare în pătrat.

Păstrarea în memoria calculatorului a unui tabel de numere aleatoare, suficient de voluminos, nu este un lucru rentabil. În toate limbajele de programare există generatoare de numere aleatoare (mai exact – „aproape” aleatoare sau pseudoaleatoare). De exemplu, în limbajul de programare Pascal drept generator servește funcția **RANDOM**. Cu ajutorul ei putem lua „la întâmplare” numere pe segmentul $[0,1]$, sau dintr-un cerc oarecare, dintr-un pătrat, bunăoară din pătratul menționat în exemplul de mai sus etc.

De exemplu, utilizând acest generator, putem scrie un program care ia „la întâmplare” un punct din pătratul $[0,1] \times [0,1]$ și, totodată, se verifică dacă acest punct aparține mulțimii $A = \{(x,y): y \leq x^2\}$

```

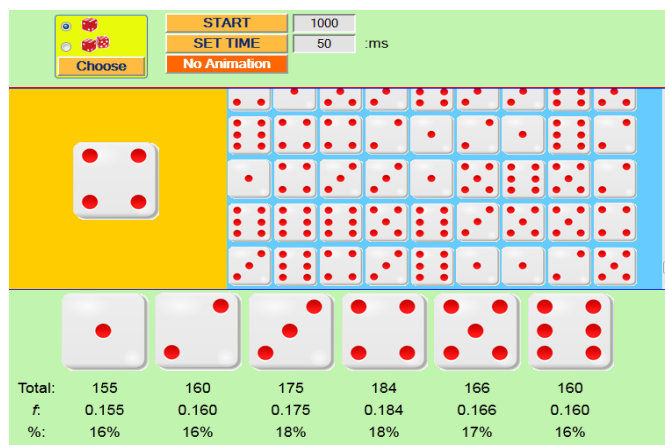
Program Punct;
Var x, y: real;
Begin
randomize;
x := random;
y := random;
writeln("s-a ales punctul:", x, ", ", y);
if (x*x > y) then writeln("Punctul apartine patratului")
else writeln("Punctul nu apartine patratului")
end.

```

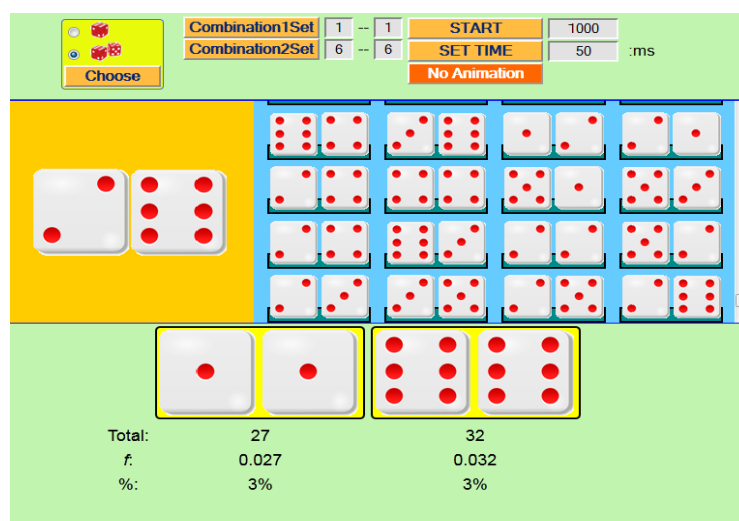
În legătură cu problemele, în care intervine aruncarea monedei, a zarului, extragerea unei bile dintr-o urnă cu bile de diferite culori, precum și alte experimente aleatoare ar fi binevenită *elaborarea unui pachet de programe* care să modeleze experimentele respective și să calculeze probabilitățile statistice corespunzătoare. Astfel, elevii vor putea urmări nemijlocit procesul de stabilizare a frecvenței relative odată cu creșterea numărului de experimente.

Prezentăm o aplicație-web [4] care ilustrează aruncarea zarului, aruncarea a două zaruri, extragerea bilelor conform schemei cu întoarcere. Utilizatorul poate observa rezultatele fiecărei probe și frecvența relativă a evenimentului aleator prezentat în aplicație. Putem indica numărul de repetări ale experimentului; astfel, se poate observa că odată cu creșterea numărului de repetări ale experimentului frecvența relativă se apropie de valoarea probabilității calculată cu ajutorul definiției clasice.

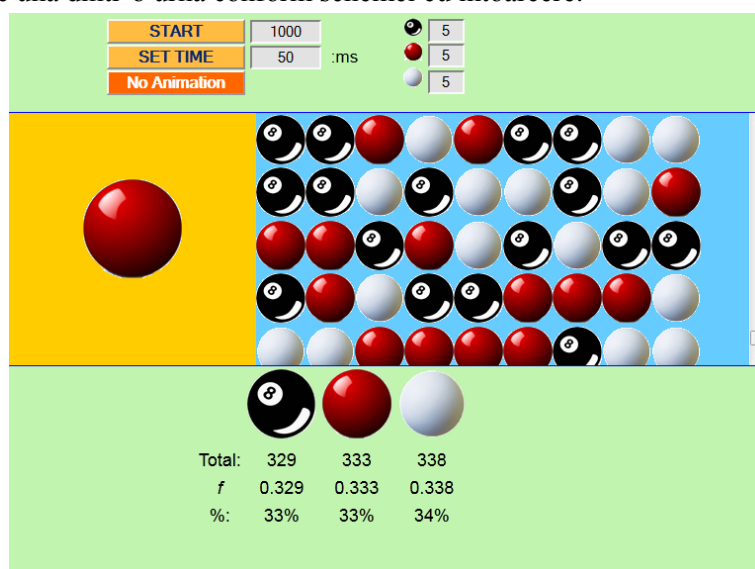
Aruncarea zarului:



Aruncarea a două zaruri:



Alegerea bilelor câte una dintr-o urnă conform schemei cu întoarcere:



Concluzie

Modelarea diverselor experimente aleatoare și estimarea probabilităților este, considerăm, un suport bun, dar și un instrument eficient pentru crearea la elevi a unei gândiri probabiliste.

Referințe:

1. *Matematica*. Manual pentru clasa XII. Chișinău, 2012.
2. POȘTARU, A. *Teoria Probabilităților*. Chișinău: CECMI, USM, 2008.
3. SĂCUIU, I., ZORILESCU, D. *Numere aleatoare (aplicații în economie, industrie și studiul fenomenelor naturale)*. București: Editura Academiei, 1973.
4. try-solve.com > Experience

Prezentat la 28.06.2017