

УДК 519.872.8: 656.6

**ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
С ОЖИДАНИЕМ В ANYLOGIC****THE STUDY OF QUEUING SYSTEMS WITH WAITING IN ANYLOGIC**©*Осипов Г. С.**д-р техн. наук, Сахалинский государственный университет
г. Южно-Сахалинск, Россия, _Osipov@rambler.ru*©*Osipov G.**Dr. habil., Sakhalin State University
Yuzhno-Sakhalinsk, Russia, _Osipov@rambler.ru*

Аннотация. В работе рассмотрены формально-теоретические основы аналитического, имитационного и оптимизационного моделирования многоканальных систем массового обслуживания с ожиданием (с неограниченной и ограниченной очередью).

Исследование базируется на использовании в качестве аналитической платформы среды имитационного моделирования *AnyLogic*, которая позволяет проводить имитационные и оптимизационные эксперименты, а также производить параметрический анализ решений и исследования на чувствительность.

Практическая апробация моделей базируется на решении и исследовании широкого круга задач по моделированию СМО с ожиданием из различных предметных областей. Основой используемой методологии моделирования и оптимизации является положение об использовании в качестве критерия оптимизации (целевой функции) суммарных приведенных затрат как в каналах обслуживания, так и потерь в очереди.

Исследования направлены на рассмотрение и анализ систем массового обслуживания с различными потоками событий в среде имитационного моделирования *AnyLogic*.

Abstract. The paper discusses the formal theoretical basis of analytical, simulation and optimization modeling and analysis of multichannel queuing systems with waiting (with the unlimited and limited queue).

The study based on the use as an analytical platform, a simulation environment *AnyLogic*, which allows simulation and optimization experiments as well as to make a parametric analysis of the solutions and study the sensitivity.

Practical testing of models based on the study of a wide range of tasks on modeling QS with the expectation from different subject areas. The basis of the methodology of modeling and optimization is the provision on the use as the optimization criterion (objective function) of the total reduced costs in servicing channels, and the loss in the queue.

The research focused on the review and analysis of queuing systems with a different flow of events in the simulation environment *AnyLogic* simulation.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, имитационное моделирование, оптимизация систем, морской порт, грузовые терминалы.

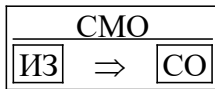
Keywords: queuing systems, simulation modeling, optimization of systems, seaport cargo terminals.

Введение

Система массового обслуживания (СМО) может быть представлена в виде двух основных (под)систем:

источник заявок (ИЗ) на обслуживание (требований, судов, информационных и материальных потоков и т.д.);

система обслуживания (СО) — исполнения заявок (технических средств, пунктов обслуживания, терминалов, вычислительных мощностей и т. д.).



Методы теории массового обслуживания (ТМО) позволяют решать задачи, по оптимизации СМО в целом.

Однако, оптимизация отдельных (под)систем может вступать во взаимные противоречия. Так минимальные расходы по заявкам обеспечиваются при больших резервах пропускной способности систем обслуживания, когда задержки заявок в очереди и на обслуживании минимизируются. Но создание резервов пропускной способности технических средств и систем обслуживания связано с большими затратами на их создание и содержание. Минимизация расходов по системам обслуживания наступает в случае наиболее полного их использования, т.е. отсутствия свободных резервов, а это ведет к возрастанию времени нахождения заявок в очереди.

Поэтому нужна глобальная оптимизация с точки зрения всей (системообразующей) СМО. Следовательно, во взаимодействии системы обслуживания и обслуживаемых ею заявок должно быть рациональное соотношение интенсивности поступления заявок с числом технических средств обслуживания и их пропускной способностью. Оптимальное значение указанных параметров целесообразно определять по критерию минимума совокупных приведенных затрат.

Необходимые сведения и формулы

На Рисунке 1 представлен граф состояний для одноканальной системы, где для удобства состояния системы $S_0, S_1, \dots, S_k, \dots$ нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО.

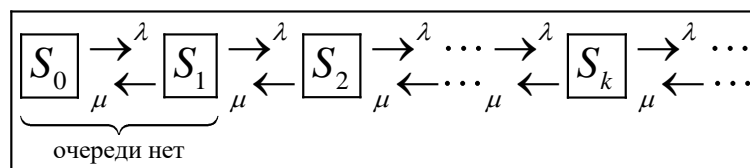


Рисунок 1. Граф состояний для одноканальной СМО с неограниченной очередью.

Система может находиться в одном из состояний:

S_0 — канал свободен;

S_1 — канал занят (обслуживает заявку), очереди нет;

S_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди;

...

S_k — канал занят, $(k - 1)$ заявок стоит в очереди;

...

По всем стрелкам поток заявок с интенсивностью λ переводит систему слева направо, а справа налево — поток обслуживания с интенсивность μ .

Рассмотрим n -канальную (многоканальную) систему с неограниченной очередью. Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ , а поток обслуживаний — интенсивность μ . На рисунке 2 представлен граф состояний системы

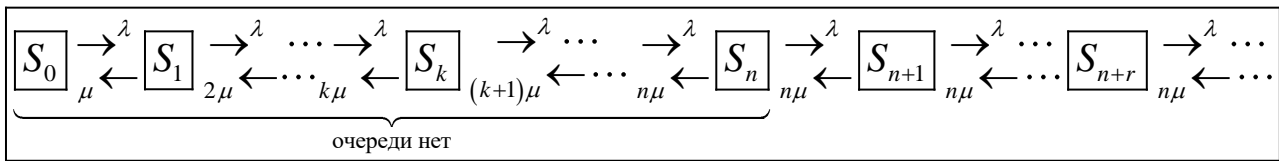


Рисунок 2. Граф состояний для многоканальной СМО с неограниченной очередью.

Система может находиться в одном из состояний:

- S_0 — в СМО заявок нет (все каналы свободны);
- S_1 — один канал занят, остальные свободны;
- S_2 — заняты два канала, остальные свободны;
- ...
- S_k — занято k каналов, остальные свободны;
- ...
- S_n — заняты все n каналов, (очереди нет);
- S_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;
- ...
- S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди;
- ...

Можно показать, что при $\frac{\rho}{n} \geq 1$ очередь будет расти до бесконечности, иначе справедливы формулы (например, [1]), представленные в Таблице 1.

Таблица 1.

ПОКАЗАТЕЛИ РАБОТЫ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

№		Наименование	Формула
1	2	3	4
1	p_0	Вероятность того, что система находится в состоянии S_0	$p_0 = \left(\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}$
2	P_q	Вероятность того, что заявка окажется в очереди	$P_q = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0$
3	L_q	Среднее число заявок в очереди (длина очереди)	$L_q = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2}$
4	L_s	Среднее число заявок в системе	$L_s = L_q + \rho$
5	T_q	Среднее время пребывания заявки в очереди	$T_q = \frac{L_q}{\lambda}$
6	T_s	Среднее время пребывания заявки в системе	$T_s = \frac{L_s}{\lambda}$

Продолжение Таблицы 1.

1	2	3	4
7	γ	Отношение времени ожидания в очереди к времени обслуживания	$\gamma = \frac{L_q}{L_s - L_q}$
8	Q	Относительная пропускная способность — вероятность того, что заявка будет обслужена	$Q = 1$
9	A	Абсолютная пропускная способность системы (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени).	$A = \lambda Q = \lambda$
10	\bar{k}	Среднее число занятых каналов	$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$

При наличии ограничения на очередь (ее длина не может превосходить числа m), то если заявка поступает в момент времени, когда все каналы заняты — она покидает очередь. На Рисунке 3 представлен граф состояний одноканальной СМО с ограниченной очередью. У каждой стрелки проставлены соответствующие интенсивности потоков событий. Причем по стрелкам справа налево систему переводит поток обслуживаний интенсивность которого равна μ , умноженному на число занятых каналов.

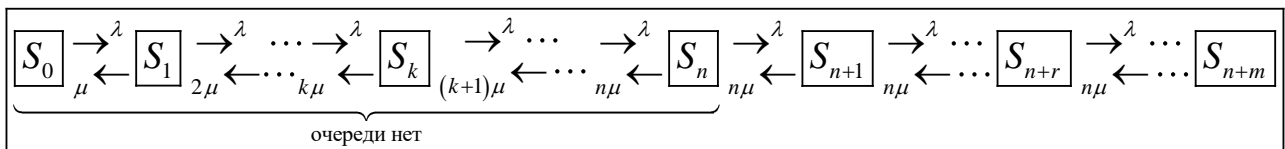


Рисунок 3. Граф состояний при ограниченной длине очереди.

В Таблице 2 приведены основные показатели работы СМО с ограниченной по длине очередью.

Таблица 2.

ПОКАЗАТЕЛИ РАБОТЫ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СМО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

№		Наименование	Формула
1	p_0	Вероятность того, что система находится в состоянии S_0	$p_0 = \left(\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)} \right)^{-1}$
2	L_q	Среднее число заявок в очереди	$L_q = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left(1 - \left(m + 1 - m \frac{\rho}{n} \right) \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2}$
3	\bar{k}	Среднее число заявок под обслуживанием (среднее число занятых каналов)	$\bar{k} = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right)$
4	L_s	Среднее число заявок в системе	$L_s = L_q + \bar{k}$
5	Q	Относительная пропускная способность	$Q = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$
6	A	Абсолютная пропускная способность системы	$A = \lambda Q$

Практическая реализация

1. В порт планируется поступление нового грузопотока с интенсивностью G (т/сутки) для обработки которого требуется построить специализированный терминал. Предполагается, что будет задействован один причал — т.е. в данном случае исследуется задача моделирования одноканальной СМО с неограниченной очередью [2].

Необходимо определить оптимальную пропускную способность терминала Π (т/сутки) по критерию минимальных совокупных (по судам и терминалу) приведенных (на одну тонну грузооборота) затрат [3, 4].

Очевидно, занятость терминала определяется его коэффициентом загрузки ρ , тогда затраты по терминалу найдутся следующим образом:

$$f_T = k\rho Z_T^p(\Pi) + (1 - k\rho)Z_T^{np}(\Pi), \tag{1}$$

где k — технологический коэффициент по терминалу;

Z_T^p, Z_T^{np} — затраты по терминалу за время работы и простоя в сутки, соответственно;

Π — пропускная способность терминала.

Затраты по судам могут быть найдены так:

$$f_s = \lambda(t_{zp} + t_{ож} + t_T)Z_s = \lambda(t_{zp} + t_{ож} + k_T t_{zp})Z_s,$$

где $t_{zp}, t_{ож}, t_T$ — соответственно длительность грузовых операций, их ожидания и технических операций;

Z_s — затраты по судну в сутки;

k_T — технологический коэффициент.

Тогда оптимизационная задача будет формулироваться следующим образом:

$$f = \frac{(1 + \gamma(\rho) + k_T)Z_s + kZ_T^p(\Pi) + (1/\rho - k)Z_T^{np}(\Pi)}{\Pi} \rightarrow \min : \rho \cdot \Pi = G \tag{2}$$

Очевидно, повышение пропускной способности терминала ($\Pi > G$) приведет к увеличению затрат по терминалу и, соответственно, уменьшению судовой составляющей затрат.

На Рисунке 4 представлена расчетная схема определения затрат в системе.

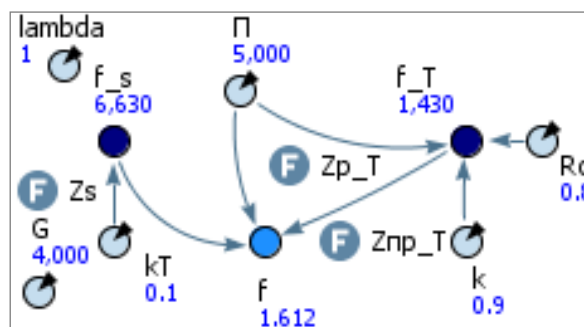


Рисунок 4. Расчетная схема моделирования.

В соответствии с представленными на рисунке исходными данными при пропускной способности терминала 5000 (т/сутки) и коэффициенте загрузки 0,8, совокупные приведенные затраты составляют 1,612 (у.е./т).

Проведя оптимизационный эксперимент, получим решение, в соответствии с которым минимальное значение целевой функции составит $f^* = 0,738$ (у.е./т) при $\rho^* = 0,445$. На рисунке 5 приведен фрагмент процесса поиска оптимального решения в среде AnyLogic.

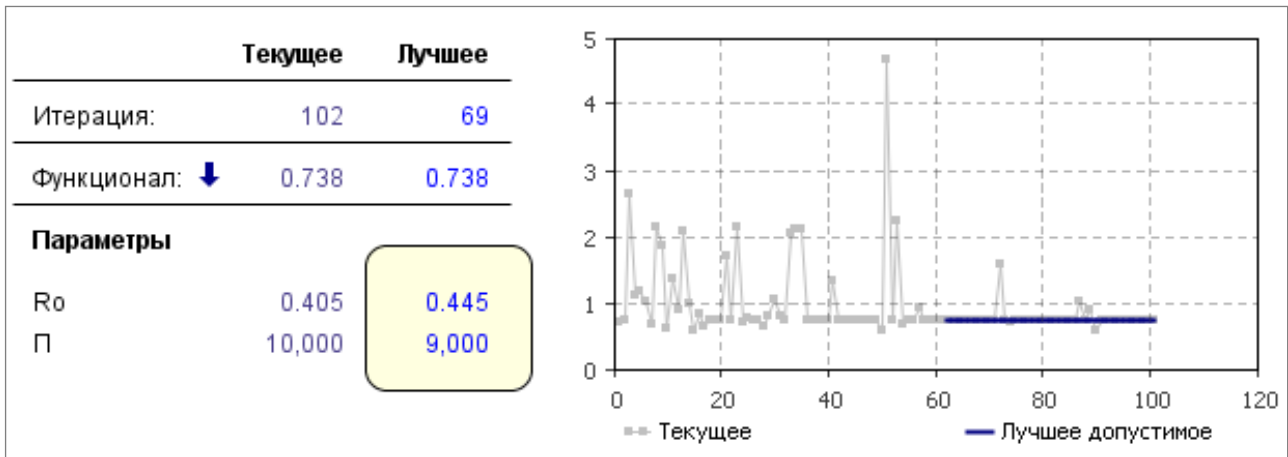


Рисунок 5. Результаты поиска оптимального решения.

Очевидно, сокращение совокупных приведенных затрат будет обеспечено за счет снижения судовой составляющей f_s до 2472 (у.е./сутки) при росте затрат по терминалу f_T до 4171 (у.е./сутки). Сравнительные характеристики для исходного (рисунок 4) и оптимального решений (Рисунок 5) представлены в Таблице 3.

Таблица 3.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕКУЩЕГО И ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЙ

Решение	Π	ρ_0	L_q	L_s	f_s	f_T	f
Исходное	5000	0,2	3,2	4	6630	1430	1,612
Оптимальное	9000	0,555	0,357	0,802	2472	4171	0,738

Таким образом решением задачи будет ввод в эксплуатацию терминала с пропускной способностью $\Pi^* = 9000$ (т/сутки). На Рисунке 6 представлены зависимости $f_s = f_s(\rho)$, $f_T = f_T(\rho)$ и $f = f(\rho)$.

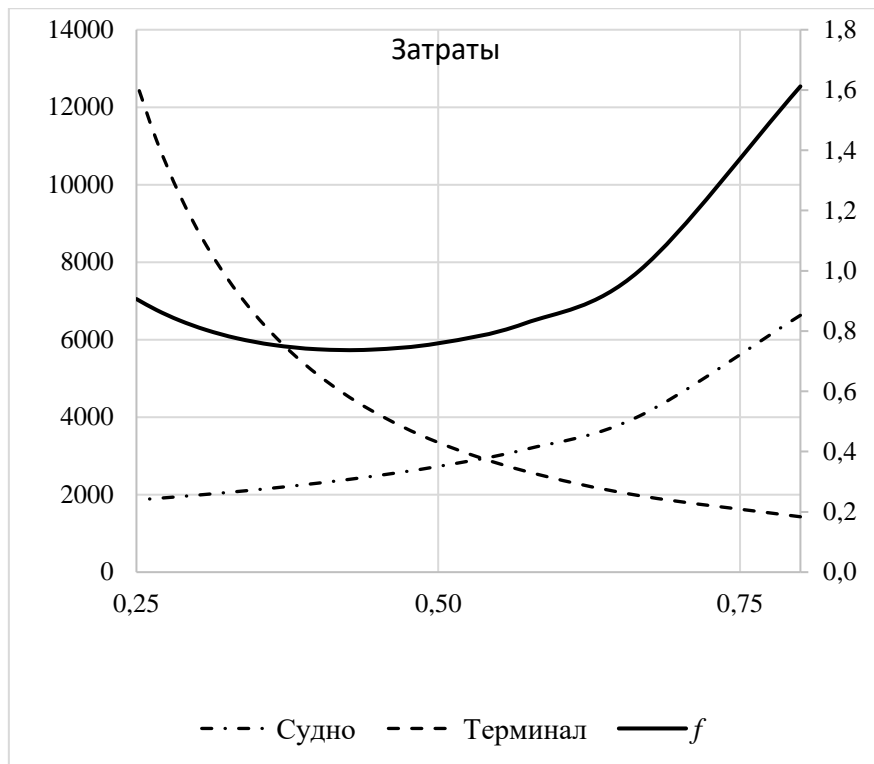


Рисунок 6. Зависимость затрат от загрузки терминала.

2. Требуется определить оптимальное число причалов на специализированном терминале при известных интенсивностях входного потока λ и потока обслуживания μ .

Пусть затраты в системе определяются выражением

$$f = c_1 L_q(n, \rho) + c_2 n,$$

где c_1, c_2 — известные константы.

Очевидно первое слагаемое в формуле определяет затраты, связанные с пребыванием судов в очереди, а второе — задает терминальную составляющую.

Пусть для конкретности $\lambda = 1,35$ и $\mu = 0,5$. Тогда $\rho = 2,7$ и минимальное число причалов $n = 3$, т.к. в этом случае выполнено условие $\rho/n < 1$ и очередь конечна.

В Таблице 4 представлены результаты расчета показателей функционирования системы при различных (в диапазоне от 3 до 7) значениях количества задействованных причалов.

Таблица 4.

ОСНОВНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ РАБОТЫ СМО

Характеристики обслуживания	Число причалов n				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя причалов p_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
Средняя длина очереди L_q	7,354	0,811	0,198	0,053	0,014
Относительные затраты f	25,061	6,434	5,593	6,16	7,043

На Рисунке 7 приведен результат проведения оптимизационного эксперимента в среде AnyLogic.

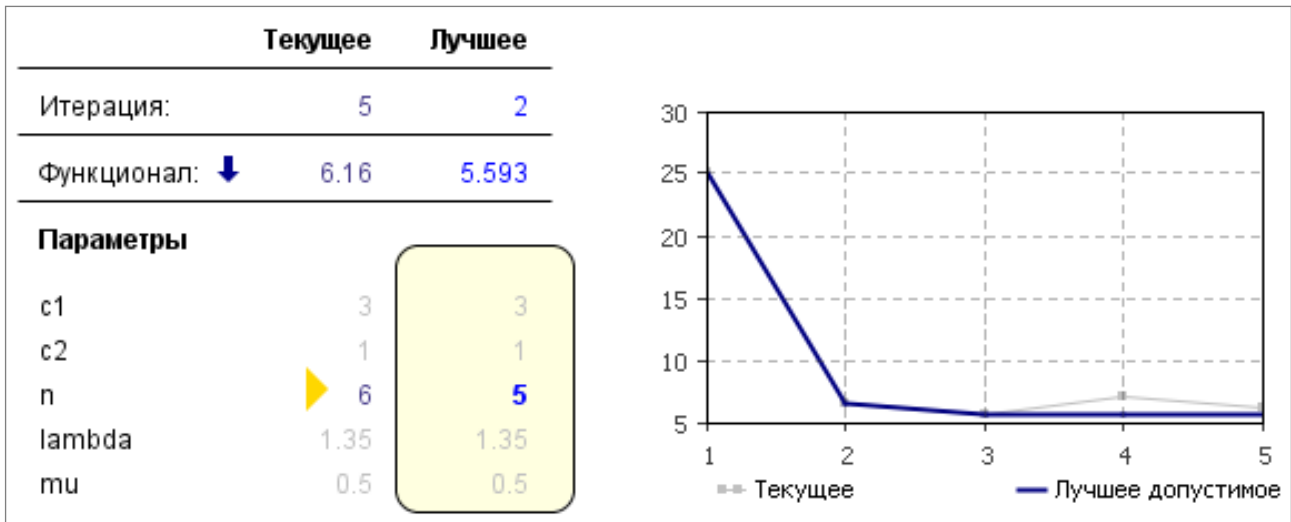


Рисунок 7. Решение задачи оптимизации.

В данном случае параметром оптимизации являлось число причалов, аналогично может осуществляться оптимизация по любому другому параметру или их сочетанию.

3. Исследуем задачу оптимальной загрузки контейнерного терминала [5] с целевой функцией:

$$f = c_0 \varphi n - c_1 L_q(\varphi, n) \rightarrow \max,$$

где c_1, c_2 — константы;

n — количество причалов;

$\varphi = \frac{\rho}{n}$ — интенсивность нагрузки причала.

Очевидно, первая составляющая целевой функции определяет средний доход от обработки одного судна, а вторая — потери, связанные с простоем судна. Здесь не учитываются постоянные затраты, не зависящие от интенсивности прихода судов в порт — затраты на содержание причалов, а также всех технических средств и сооружений, обеспечивающих функционирование терминала.

В Таблице 5 приведены результаты оптимизационного эксперимента при варьировании параметров c_0/c_1 и числа причалов n . В Таблице верхний показатель равен максимальному значению целевой функции при соответствующей интенсивности нагрузки причалов, приведенных ниже.

Таблица 5.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

c_0/c_1	Число причалов				
	3	4	5	6	7
0,5	0,523	0,83	1,159	1,505	1,863
	0,46	0,52	0,57	0,6	0,63
1	1,292	1,971	2,688	3,433	4,198
	0,56	0,61	0,65	0,68	0,7
2	3,118	4,6	6,145	7,735	9,357
	0,65	0,69	0,73	0,75	0,77
3	5,151	7,478	9,884	12,348	14,856
	0,7	0,74	0,77	0,79	0,8
4	7,308	10,5	13,787	17,145	20,551
	0,74	0,77	0,79	0,81	0,82
5	9,553	13,624	17,805	22,067	26,338
	0,76	0,78	0,81	0,83	0,84
6	11,86	16,82	21,905	27,08	32,317
	0,78	0,81	0,83	0,84	0,85
7	14,216	20,077	26,073	32,164	38,328
	0,79	0,82	0,84	0,85	0,86

Очевидно в данном случае увеличение указанных параметров приводит к монотонному росту оптимального значения интенсивности нагрузки причалов и значения целевой функции — дохода от функционирования системы.

4. В порту имеется один специализированный причал. Сравнить показатели функционирования причала в случае неограниченной очереди и при наличии ограничения на ее длину (не может превосходить m судов). Используются формулы, представленные в Таблице 2.

Таблица 6.

ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ДЛИНУ ОЧЕРЕДИ

m	ρ_0	Q	A	L_q	T_q	L_s	T_s
1	0,41	0,738	0,295	0,262	0,656	0,852	2,131
3	0,297	0,878	0,351	0,861	2,151	1,563	3,908
5	0,253	0,934	0,373	1,396	3,489	2,142	5,356
10	0,215	0,982	0,393	2,329	5,823	3,115	7,786
∞	0,2	1	0,4	3,2	8	4	10

Результаты сравнения основных показателей функционирования СМО для различных вариантов ограничений на длину очереди представлены в Таблице 6 (расчеты выполнены при $\rho = 0,8$).

5. Произведем оптимизацию многоканальной системы с неограниченной очередью по критерию минимальных совокупных приведенных затрат в зависимости от количества причалов и интенсивности их нагрузки.

На Рисунке 8 приведена принципиальная схема моделируемой системы с элементами управления — интенсивностью входного потока, количеством причалов и средним временем обслуживания одного судна.



Рисунок 8. Принципиальная схема СМО.

Заготовка для простейшей 2-D анимационной схемы приведена на Рисунке 9.

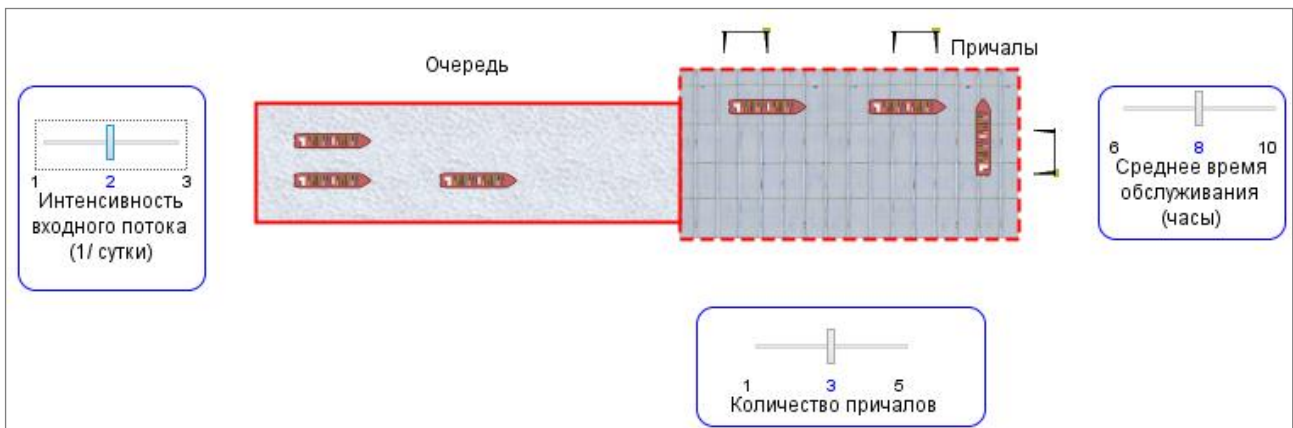


Рисунок 9. 2-D схема системы.

А. При известном соотношении интенсивности потока судов и интенсивности их обслуживания (т.е. при заданной приведенной интенсивности потока судов, или интенсивности нагрузки терминала) $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ задача сводится к определению оптимального числа задействованных причалов для обеспечения минимума целевой функции — совокупных приведенных затрат.

Формула расчета затрат по терминалу (1) преобразуется к виду:

$$f_T = n \left(k \frac{\rho}{n} Z_T^p(\Pi) + \left(1 - k \frac{\rho}{n} \right) Z_T^{np}(\Pi) \right).$$

Соответственно изменится и вид целевой функции (2):

$$f = \frac{(1 + \gamma(\rho) + k_T) Z_s + k Z_T^p(\Pi) + (1/\varphi - k) Z_T^{np}(\Pi)}{\Pi} \rightarrow \min ,$$

где $\varphi = \frac{\rho}{n}$ — интенсивность нагрузки причалов.

Пусть $\Pi=5000$, $\rho = 1,8$, тогда минимальное количество задействованных причалов будет $n = 2$, при этом интенсивность их нагрузки составит $\varphi = \frac{\rho}{n} = 0,9$.

В Таблице 7 представлены результаты расчета показателей функционирования системы при различных (в диапазоне от 2 до 5) значениях количества задействованных причалов.

Таблица 7.

ОСНОВНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ РАБОТЫ СМО

Характеристики обслуживания	Число причалов n			
	2	3	4	5
Вероятность простоя причалов p_0	0,05	0,15	0,16	0,17
Средняя длина очереди L_q	7,67	0,53	0,11	0,02
Затраты по судам f_s	6972	1814	1506	1446
Затраты по причалам f_T	1289	1839	2389	2939
Относительные затраты f	1,65	0,73	0,78	0,88

Из данных, приведенных в Таблице 7 следует, что необходимо задействовать 3 причала, при этом интенсивность нагрузки причалов составит $\varphi = \frac{\rho}{3} = 0,6$.

На Рисунках 10 и 11 представлены основные характеристики работы системы, полученные во время моделирования в среде *AnyLogic* и соответствующие предельные значения, рассчитанные по формулам, приведенным в Таблице 1.

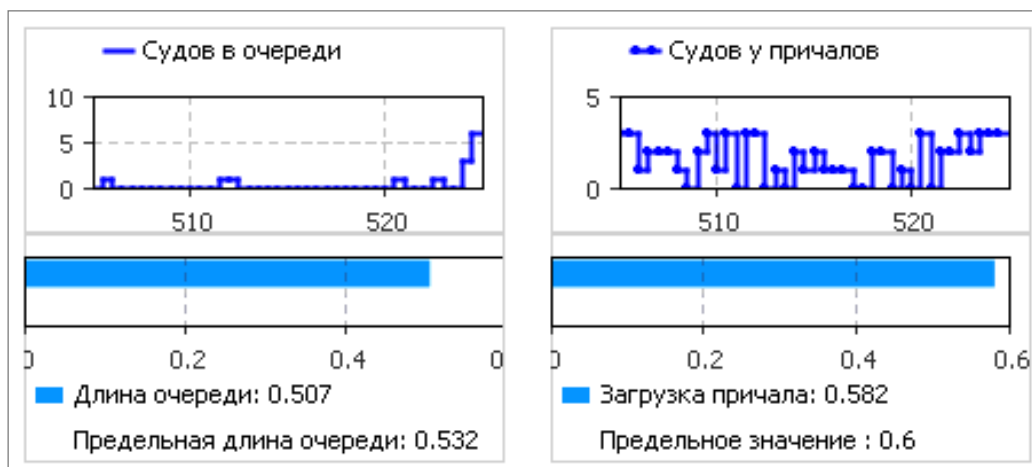


Рисунок 10. Данные о длине очереди и загрузке причала.

Б. Процедура оптимизации в *AnyLogic* позволяет решать многопараметрические задачи. Так можно определить при каких сочетаниях приведенной интенсивности потока судов и числом задействованных причалов будет обеспечен минимум совокупных приведенных расходов. На Рисунке 12 представлен фрагмент поиска оптимума по двум параметрам — ρ и n .

Аналогично может выполняться оптимизация по любым другим параметрам и их комбинации.

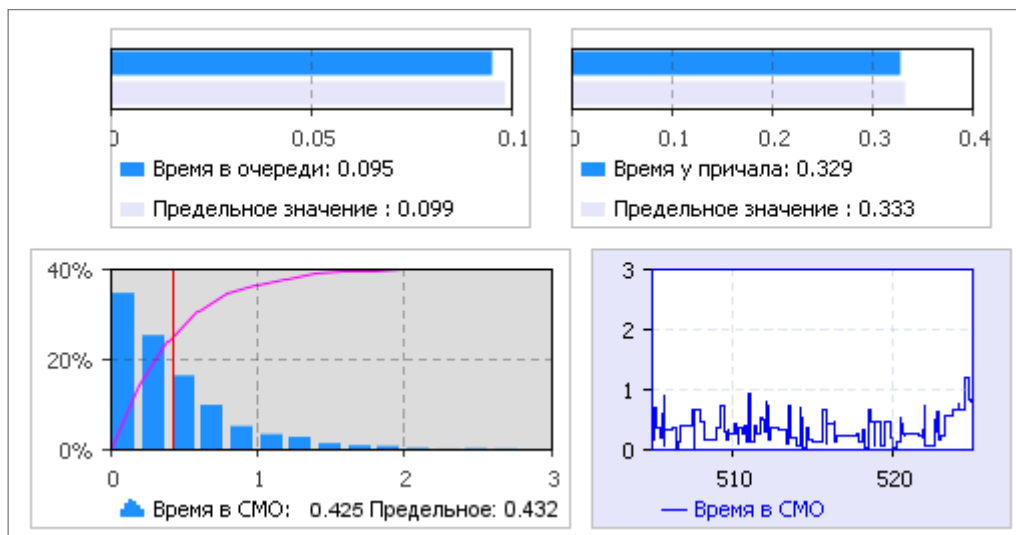


Рисунок 11. Показатели времени в очереди, обслуживания и в системе.

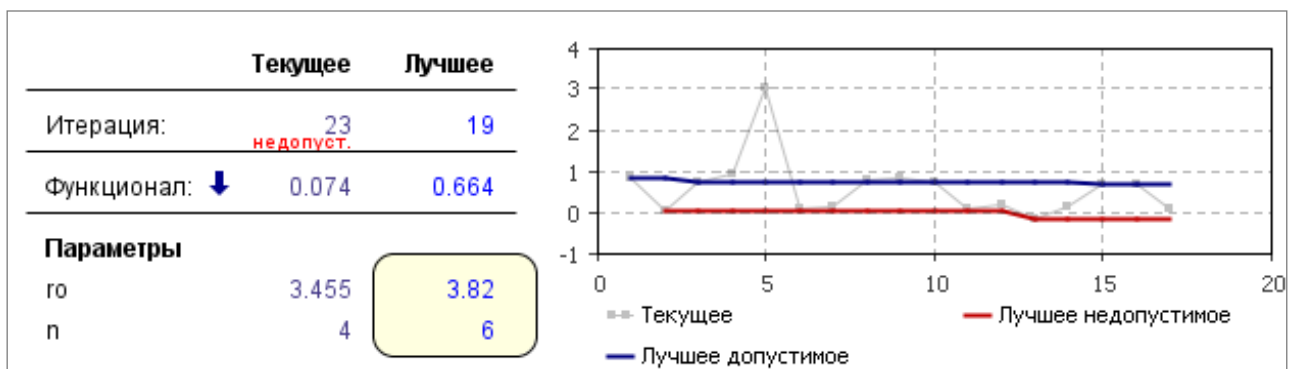


Рисунок 12. Поиск оптимума по двум параметрам.

Заключение

Представленная работа сочетает в себе набор минимально необходимого (и достаточного) теоретического материала и практических апробаций для исследования многоканальных систем массового обслуживания с ожиданием в среде пакета имитационного моделирования *AnyLogic*. Практическая реализация охватывает широкий круг примеров, демонстрирующих разработку оптимизационных проектов в среде моделирования и соответствующих оценок функционирования СМО, а также их параметров оптимизации.

Исследованы различные варианты и составляющие целевых функций задач оптимизации по различным критериям. Проведенное исследование доведено до практических реализаций в виде совокупности формальных знаний и их приложений в различных предметных и проблемных областях.

Список литературы:

1. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1980. 208 с.
2. Осипов Г. С. Одноканальные системы массового обслуживания с неограниченной очередью в *AnyLogic* // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2016. №8 (9). С. 92–95. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/osipov> (дата обращения 15.09.2016). DOI: 10.5281/zenodo.60245.

3. Осипов Г. С. Оптимизация пропускной способности грузовых терминалов // Символ науки. 2015. №12. С. 73–76.
4. Осипов Г. С. Оптимизация одноканальных систем массового обслуживания с неограниченной очередью // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2016. №9 (10). С. 63–71. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/osipov-gs> (дата обращения: 15.09.2016). DOI: 10.5281/zenodo.154304.
5. Русинов И. А. Планирование оптимальной загрузки контейнерного терминала // Эксплуатация морского транспорта. 2010. №2. С. 9–11.

References:

1. Ventzel E. S. Operations research: tasks, principles, methodology. Moscow, Nauka, 1980. 208 p.
2. Osipov G. Single-channel queuing system with unlimited queue in *AnyLogic*. Bulletin of Science and Practice. Electronic Journal, 2016, no. 8 (9), pp. 92–95. Available at: <http://www.bulletennauki.com/osipov>, accessed 15.09.2016. (In Russian). DOI: 10.5281/zenodo.60245.
3. Osipov G. S. Bandwidth optimization of a cargo terminal. The symbol of science, 2015, no. 12, pp. 73–76.
4. Osipov G. Optimization of single-channel queuing system with unlimited queue. Bulletin of Science and Practice. Electronic Journal, 2016, no. 9 (10), pp. 63–71. Available at: <http://www.bulletennauki.com/osipov-gs>, accessed 15.09.2016. (In Russian). DOI: 10.5281/zenodo.154304.
5. Rusinov I. A. Planning optimal utilization of the container terminal. Operation of Maritime transport. 2010, no. 2, pp. 9–11.

*Работа поступила
в редакцию 19.09.2016 г.*

*Принята к публикации
21.09.2016 г.*