УДК 517.95:515.172.22

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

A VARIANT OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER IN THE NEIGHBORHOOD OF A MOVABLE SINGULAR POINT

©Орлов В. Н.
д–р физ.–мат. наук
Крымский федерального университет им. В. И. Вернадского
г. Ялта, Россия, orlowvn@rambler.ru
©Orlov V.
Dr. habil., Vernadsky Crimean Federal University
Yalta, Russia, orlowvn@rambler.ru
©Хмара П. В.
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
г. Ялта, Россия, pavaluck@gmail.com
©Khmara P.
Vernadsky Crimean Federal University
Yalta, Russia, pavaluck@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается один класс нелинейных дифференциальных уравнений в общем случае неразрешимых в квадратурах, требующий решения задачи с нахождением аналитического приближенного решения в окрестности подвижной особой точки. Эта задача успешно решается на основе нового подхода в методе мажорант доказательства теоремы существования и единственности решения. Учет апостериорной оценки погрешности позволяет улучшить априорную оценку погрешности аналитического приближенного решения и оптимизировать структуру самого приближенного решения.

Abstract. This paper considers one class of nonlinear differential equations in the General case, unsolvable in closed form, requiring the solution of the problem of finding an analytical approximate solution in the neighborhood of a movable singular point. This problem is successfully solved based on the new approach, the majorant method in the proof of a theorem of existence and uniqueness of the solution. Accounting a posteriori error estimate allows to improve the a priori error estimate for the approximate analytical solution and optimize the structure of the approximate solution.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, подвижная особая точка, метод мажорант, теорема существования и единственности решения, приближенное решение, окрестность подвижной особой точки, нормальная форма.

Keywords: nonlinear differential equations, movable singular point method majorants, existence and uniqueness of the solution, approximate solution, a mobile vicinity of a singular point, the normal form.

Введение

Одним из аспектов дифференциальных уравнений является математическая модель различных процессов и явлений, а математическое моделирование в последнее время привлекает большое внимание в разных областях деятельности человека: в механике [1–4], в математической физике, в нелинейной оптике [5], в теории эволюционных задач и процессов

[6–10], в теории упругости [11, 12], в нелинейной диффузии [13, 14], в теории устойчивости элементов строительных сооружений и анализ живучести (жизнестойкости) зданий [15–17], в технологических процессах сельского хозяйства [18–20], в медицине [21, 22], в педагогике [23, 24], в фундаментальных исследованиях [25]. Часто такие модели описываются при помощи нелинейных дифференциальных уравнений [26–28]. Существующая классическая теория [29, 30] предназначена исключительно для области аналитичности и при этом имеет существенный недостаток, не позволяющий строить приближенное решение. В работах [31–35] предлагается новая версия метода мажорант при доказательстве теорем существования и единственности, позволяющая осуществлять построение приближенного решения в области аналитичности. Эта идея успешно реализована и для окрестности подвижных особых точек в работах [31, 33, 34] для определенных классов уравнений. В данной работе эта задача решается для нового класса уравнений.

Формулировка цели статьи

Для рассматриваемого класса нелинейного класса уравнений, в общем случае неразрешимых в квадратурах, построить аналитическое приближенное решение с заданной точностью. Поставленная цель основывается на результатах работы [35].

Изложение основного материала

В работе [36] для задачи Коши

$$y''' = y^4(x) + r(x), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2. \tag{2}$$

была доказана теорема существования и единственности решения в окрестности подвижной особой точки.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) x^* — подвижная особая точка задачи (1) и (2);
2) $r(x) \in C^\infty$ в $|x - x^*| < \rho_1, \rho_1 = const$;
3) $\left|\frac{r^{(n)}(x^*)}{n!}\right| \leq M_1,\ M_1 = const.$

Тогда решение задачи Коши (1), (2) можно представить в виде

$$y(x) = (x - x^*)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(x - x^*)^n \tag{3}$$

в области

$$|x - x^*| < \rho_2,$$

где

$$\rho_2 = min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[4]{M+1}}\right\}, M = max\left\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \left|\frac{r^{(n)}(x^*)}{n!}\right|\right\}.$$

Предыдущий результат позволяет построить аналитическое приближенное решение в окрестности подвижно особой точки.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1–3 теоремы 1, тогда для приближенного решения задачи (1) и (2)

$$y_N(x) = (x - x^*)^{-1} \sum_{n=0}^{N} C_n (x - x^*)^n,$$

в области

$$|x - x^*| < \rho_2$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta\, y_N(x) \le \frac{(M+1)^{(N+1)/4} |x - x^*|^{N/4 - 0{,}75}}{1 - (M+1)|x - x^*|} \left(\frac{1}{N(N-1)(N-2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(N+1)N(N-1)} + \frac{1}{(N+2)(N+1)N} + \frac{1}{(N+3)(N+2)(N+1)}\right),$$

где

$$\rho_2 = min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[4]{M+1}}\right\}, M = max\left\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \left|\frac{r^{(n)}(x^*)}{n!}\right|\right\}.$$

Выводы

Реализованный в работе [36] метод мажорант при доказательстве теоремы существования и единственности решения позволил нам построить структуру приближенного решения. Представленные результаты имеют не только значение в исследовании реальных процессов и явлений, но и практическое приложение в учебном процессе высших учебных заведений при подготовке специалистов естественных направлений и фундаментальных исследований.

Список литературы:

1. Bacy R. Optimal Filtering for correlated Noise. J. of Mat. Analysis and Applications, 1967, v. 820, no. 1, pp. 1–8.

2. Kalman R. Bacy R. New results in linear filtering and predication theory. Basic Engr, ASME Trans., 1961, v. 83d, pp. 95–108.

3. Hill J. M. Abel’s Differential Equation. J. Math. Scientist, 1982, v. 7, no. 2, pp. 115–125.

4. Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems. Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978, pp. 129–145.

5. Самодуров А. А., Чудновский В. М. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29. №1. С. 9–10.

6. Ablowitz M., Romani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, II. J. Mat. Phys, 1980, v. 21, no. 9, pp. 715–721, 1006–1015.

7. Ablowitz M., Romani A., Segur H. Nonlinear evolutions and differential equations of Painleve type. Lett. al Nuowo Cim, 1978, v. 23, no. 9, pp. 333–338.

8. Airault H. Rational solutions of Painleve equations. Studies in applied mathematics, 1979, v. 61, no. 1, pp. 31–53.

9. Davson S. P., Fortan C. E. Analytical properties and numerical solutions of the derivative nonlinear Schrodinger equations. J. Plasma Phys, 1998, 40, no. 3, pp. 585–602.

10. Clarzon P. Special polynomials associated with rational solutions of the Painleve equations and applications to solution equations. Comput. Math. and Funet. Theory, 2006, 6, no. 2, pp. 585–602.

11. Hill J. Radial deflections of thin recompressed cylindrical rubber bunch mountings. Internat. J. Solids Structures, 1977, v.13, pp. 93–104.

12. Бунякин А. В. и др. Вывод уравнения движения упругой пластины, находящейся в воздушном потоке // Вестник МГСУ. 2010. №3. С. 208–212.

13. Axford R. A. Differential equations invariant urber two–parameter Lie groups with applications to non–linear diffusion. Los Alamos Report, 1970 (LA–4517, UC–34).

14. Ockendon J. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems. Pros. Symp. Moving Boundary Problems.

15. Kovalchuk O. A. Simulation of the State of the Rod Elements of the Building Construction. Procedia Engineering, 2016, v. 153, no. 2, pp. 304–309.

16. Ковальчук О. А. Устойчивость стержневых элементов строительных конструкций // Журнал ПГС. 2014. №11. С. 53–54.

17. Ковальчук О. А. О расчете зданий с ядрами жесткости // Естественные и технические науки. 2015. №3 (81). С. 238–240.

18. Орлов В. Н. и др. Математическое моделирование в исследовании результативности экстракорпорального оплодотворения // Казанский медицинский журнал. 2009. Т. 90. №6. С. 889–892.

19. Кульмакова Т. И., Орлов В. Н. Математическое моделирование технологии воспроизводства свиней. Вестник Курганского ГСХА. 2016. №2 (18). С. 40–43.

20. Кульмакова Т. И. Орлов В. Н. Об интенсивных технологиях воспроизводства свиней. Международная научно–практическая конференция «Новейшие достижения и успехи развития сельскохозяйственных наук» (15.06.2016, г. Краснодар). С. 13–17.

21. Орлов В. Н., Винокур Т. Ю., Иванов А. Г. Способ получения оценок нормативных значений содержания микроэлементов в среде обитания человека // Патент на изобретение №2355318 от 20 мая 2009 г.

22. Орлов В. Н. и др. Разработка математической модели для оценки динамики заболеваемости и смертности от сердечно–сосудистых заболеваний на территории Чувашской Республики // Профилактика заболеваний и укрепления здоровья. 2007. №5. С. 44–47.

23. Орлов В. Н., Пикина Н. Е. Математическое моделирование в исследовании учебного процесса // Материалы межд. науч.–практ. конф. «Инновации и качество в бизнесе и в образовании: концепции, проблемы, решения» (20–21 февраля 2009 г. Чебоксары). Филиал СПбГИЭУ. С. 45–49.

24. Орлов В. Н. и др. Качество образования и его достижение // Информатика и образование. 2008. №1. С. 109–110.

25. Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.

26. Graff D. Nonlear partial differential equations in physical problems. Research Not's in Math. Boston; London; Melbourne; Pitman Publishing Inc., v. 42.

27. Hill J. M. Abel's Differential Equation. J. Math. Scientist, 1982, v. 7, no. 2, pp. 115–125.

28. Imamura H. Second proof of the irreducibility of the first differential equation of Painleve. Nagoya Vfth. J., 1990, 117, pp. 125–171.

29. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений: 2-е изд. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.

30. Матвеев Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб: Специальная литература, 1996. 372 с.

31. Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. Уравнения. 1989. Т. 25. №10. С. 1829–1832.

32. Орлов В. Н., Фильчакова В. П. Об одном конструктивном методе построения первой и второй меромофрных трансцендентных Пенлеве // Симетійні та аналітичні методи в математичній фізиці. Т. 19. ІМ НАН України. Київ, 1998. С. 155–165.

33. Орлов В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник МАИ. 2008. №6. С. 146–154.

34. Орлов В. Н., Пчелова А. З. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. №4 (14). С. 113–122.

35. Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.

36. Орлов В. Н., Хмара П. В. Теорема существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка нормальной формы полиномиальной структуры четвертой степени в окрестности подвижной особой точки // Международное научное периодическое издание по итогам международной. науч.–практ. конф. (Уфа, 29–30 декабря 2015 г.). Уфа: РИО ИЦИПТ, 2015. С. 103–106.

References:

1. Bacy R. Optimal Filtering for correlated Noise. J. of Mat. Analysis and Applications, 1967, v. 820, no. 1, pp. 1–8.

2. Kalman R. Bacy R. New results in linear filtering and predication theory. Basic Engr, ASME Trans., 1961, v. 83d, pp. 95–108.

3. Hill J. M. Abel's Differential Equation. J. Math. Scientist, 1982, v. 7, no. 2, pp. 115–125.

4. Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems. Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978, pp. 129–145.

5. Samodurov A. A., Chudnovskii V. M. Prostoi sposob opredeleniya vremeni zaderzhki sverkhizluchatelnoi bozonnoi laviny. Dokl. AN BSSR, 1985, v. 29, no. 1, pp. 9–10.

6. Ablowitz M., Romani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, II. J. Mat. Phys, 1980, v. 21, no. 9, pp. 715–721, 1006–1015.

7. Ablowitz M., Romani A., Segur H. Nonlinear evolutions and differential equations of Painleve type. Lett. al Nuowo Cim, 1978, v. 23, no. 9, pp. 333–338.

8. Airault H. Rational solutions of Painleve equations. Studies in applied mathematics, 1979, v. 61, no. 1, pp. 31–53.

9. Davson S. P., Fortan C. E. Analytical properties and numerical solutions of the derivative nonlinear Schrodinger equations. J. Plasma Phys, 1998, 40, no. 3, pp. 585–602.

10. Clarzon P. Special polynomials associated with rational solutions of the Painleve equations and applications to solution equations. Comput. Math. and Funet. Theory, 2006, 6, no. 2, pp. 585–602.

11. Hill J. Radial deflections of thin recompressed cylindrical rubber bunch mountings. Internat. J. Solids Structures, 1977, v.13, pp. 93–104.

12. Bunyakin A. V. et. Vyvod uravneniya dvizheniya uprugoi plastiny, nakhodyashcheisya v vozdushnom potoke. Vestnik MGSU, 2010, no. 3, pp. 208–212.

13. Axford R. A. Differential equations invariant urber two–parameter Lie groups with applications to non–linear diffusion. Los Alamos Report, 1970 (LA–4517, UC–34).

14. Ockendon J. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems. Pros. Symp. Moving Boundary Problems.

15. Kovalchuk O. A. Simulation of the State of the Rod Elements of the Building Construction. Procedia Engineering, 2016, v. 153, no. 2, pp. 304–309.

16. Kovalchuk O. A. Ustoichivost sterzhnevykh elementov stroitelnykh konstruktsii. Zhurnal PGS, 2014, no. 11, pp. 53–54.

17. Kovalchuk O. A. O raschete zdanii s yadrami zhestkosti. Estestvennye i tekhnicheskie nauki, 2015, no. 3 (81), pp. 238–240.

18. Orlov V. N. et. all. Matematicheskoe modelirovanie v issledovanii rezultativnosti ekstrakorporalnogo oplodotvoreniya. Kazanskii meditsinskii zhurnal, 2009, v. 90, no. 6, pp. 889–892.

19. Kulmakova T. I. Orlov V. N. Matematicheskoe modelirovanie tekhnologii vosproizvodstva svinei. Vestnik Kurganskogo GSKhA, 2016, no. 2 (18), pp. 40–43.

20. Kulmakova T. I., Orlov V. N. Ob intensivnykh tekhnologiyakh vosproizvodstva svinei. Mezhdunarodnaya nauchno–prakticheskaya konferentsiya "Noveishie dostizheniya i uspekhi razvitiya selskokhozyaistvennykh nauk" (15.06.2016, Krasnodar). pp. 13–17.

21. Orlov V. N., Vinokur T. Yu., Ivanov A. G. Sposob polucheniya otsenok normativnykh znachenii soderzhaniya mikroelementov v srede obitaniya cheloveka. Patent na izobretenie no. 2355318 ot 20 maya 2009 g.

22. Orlov V. N. et al. Razrabotka matematicheskoi modeli dlya otsenki dinamiki zabolevaemosti i smertnosti ot serdechno–sosudistykh zabolevanii na territorii Chuvashskoi Respubliki. Profilaktika zabolevanii i ukrepleniya zdorovya, 2007, no. 5, pp. 44–47.

23. Orlov V. N., Pikina N. E. Matematicheskoe modelirovanie v issledovanii uchebnogo protsessa. Materialy mezhd. nauch.–prakt. konf. "Innovatsii i kachestvo v biznese i v obrazovanii: kontseptsii, problemy, resheniya" (20–21 fevralya 2009 g. Cheboksary). Filial SPbGIEU, pp. 45–49.

24. Orlov V. N. et al. Kachestvo obrazovaniya i ego dostizhenie. Informatika i obrazovanie, 2008, no. 1, pp.109–110.

25. Orlov V. N. Metod priblizhennogo resheniya pervogo, vtorogo differentsialnykh uravnenii Penleve i Abelya. Moscow, MPGU, 2013, 174 p.

26. Graff D. Nonlear partial differential equations in physical problems. Research Not's in Math. Boston; London; Melbourne; Pitman Publishing Inc., v. 42.

27. Hill J. M. Abel's Differential Equation. J. Math. Scientist, 1982, v. 7, no. 2, pp. 115–125.

28. Imamura H. Second proof of the irreducibility of the first differential equation of Painleve. Nagoya Vfth. J., 1990, 117, pp. 125–171.

29. Golubev V. V. Lektsii po analiticheskoi teorii differentsialnykh uravnenii: 2-e izd. Moscow–Leningrad, Gostekhizdat, 1950, 436 p.

30. Matveev N. M. Obyknovennye differentsialnye uravneniya. St. Petersburg: Spetsialnaya literatura, 1996. 372 p.

31. Orlov V. N. Lukashevich N. A. Issledovanie priblizhennogo resheniya vtorogo uravneniya Penleve. Differents. Uravneniya, 1989, v. 25, no. 10, pp. 1829–1832.

32. Orlov V. N., Filchakova V. P. Ob odnom konstruktivnom metode postroeniya pervoi i vtoroi meromorfnykh transtsendentnykh Penleve. Simetiini ta analitichni metodi v matematichnii fizitsi. V. 19, IM NAN Ukraini, Kiev, 1998, pp. 155–165.

33. Orlov V. N. Ob odnom metode priblizhennogo resheniya matrichnykh differentsialnykh uravnenii Rikkati. Vestnik MAI, 2008, no. 6, pp.146–154.

34. Orlov V. N., Pchelova A. Z. Postroenie priblizhennogo resheniya nelineinogo differentsialnogo uravneniya v oblasti analitichnosti. Vestnik ChGPU im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya, 2012, no. 4 (14), pp. 113–122.

35. Orlov V N. Metod priblizhennogo resheniya pervogo, vtorogo differentsialnykh uravnenii Penleve i Abelya. Moscow, MPGU, 2013, 174 p.

36. Orlov V. N., Khmara P. V. Teorema sushchestvovaniya i edinstvennosti resheniya nelineinogo differentsialnogo uravneniya tretego poryadka normalnoi formy polinomialnoi struktury chetvertoi stepeni v okrestnosti podvizhnoi osoboi tochki. Mezhdunarodnoe nauchnoe periodicheskoe izdanie po itogam mezhdunarodnoi. nauch.–prakt. konf. (Ufa, 29–30 dekabrya 2015 g.). Ufa, RIO ITsIPT, 2015, pp. 103–106.

Работа поступила
в редакцию 22.09.2016 г.

Принята к публикации
26.09.2016 г.