УДК 556.491:622

Г.П. Євграшкіна, О. Є. Сабадаш

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОГНОЗНИХ МІГРАЦІЙНИХ ЗАДАЧ У ЗОНІ ПОВНОГО ВОДОНАСИЧЕННЯ

Викладені теоретичні основи розв'язання планової міграційної задачі на основі системи одновимірних рівнянь, складених за струмовими лініями. Використана ідея неявної кінцево-різницевої схеми Джонсона у неусталеному режимі з наступним розв'язанням задачі методом прогонки. Досліджуваний техногенний об'єкт, хвостосховище «Балка Стуканова» у Західному Донбасі розглядається як міграційна границя III роду, тому що має техногенні слабкопроникні відклади у водовміщуючій частині. Для математичного опису їх впливу на гідрогеохімічний режим прилеглої території застосована умова Данквертса-Бреннера і виконано її узгодження із кінцево-різницевим рівнянням, складеним для пригранічних розрахункових точок. Перевагою запропонованого методу є висока точність і можливість урахування початкових даних без усереднення у просторі і часі.

Ключові слова: міграція,математична модель,метод Джонсона.

Изложены теоретические основы решения плановой миграционной задачи на основе системы одномерных уравнений, составленных по токовым линиям. Использована идея неявной конечно-разностной схемы Джонсона в неустановившемся режиме с последующим решением задачи методом прогонки. Исследуемый техногенный объект, хвостохранилище «Балка Стуканова» в Западном Донбассе рассматривается как миграционная граница III рода, потому что имеет техногенные слабопроницаемые отложения в водовмещающей части. Для математического описания их влияния на гидрогеохимический режим прилегающей территории использовано условие Данквертса-Бреннера и выполнено его согласование с конечно-разностным уравнением, составленным для приграничных расчетных точек. Достоинствами предложенного метода является высокая точность и возможность учета исходных данных без осреднения в пространстве и времени.

Ключевые слова: миграция, математическая модель, метод Джонсона.

Presentedtheoreticalbasisforsolvingtheplannedmigrationtasksonthebasissystemof one-dimensionalequations, compiledonthecurrentlines.Usedtheideaoftheimplicit finite-difference schemeofJohnsoninunsteady-state mode, andthen a solutionsofthesweepmethod.Analyzed the technogenic object tailing "BalkaStukanova" in Western Donbass considered as border migration III sort, because it has a technological scarcely permeable water-bearing deposits in the part. For the mathematical description of their influence on hydrogeochemical regime neighborhood used condition Dankvertsa-Brenner and made his agreement with the finite-difference equation, compiled for the border of the calculation points. The advantages of this method is the high accuracy and opportunity accounting original data without averaging in space and time.

*Keywords:*migration, mathematical model, method of Johnson.

Постановка проблеми. Для наукового обґрунтування комплексу природоохоронних заходів територій, прилеглих до хвостосховищ побудовані математичні моделі зміни їх гідрогеологічних умов [1, 2, 3]. Мета теперішніх досліджень – удосконалення міграційної частини моделі на прикладі хвостосховища «Балка Стуканова» шляхом розробки і застосування нового методу прогнозних розрахунків.

Виклад основного матеріалу. Характеристика математичної моделі на прикладі території, прилеглої до хвостосховища «Балка Стуканова» викладена в публікаціях [1, 2].

Удосконалення полягає у наступному. Рівняння масопереносу

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V\frac{\partial c}{\partial x} = m\frac{\partial c}{\partial t} \qquad (1)$$

записується за класичною кінцево-різницевою явною схемою

$$D\frac{C_{i-1}^{\tau} - 2C_i^{\tau} + C_{i+1}^{\tau}}{(\Delta x)^2} - V\frac{C_{i-1}^{\tau} - C_{i+1}^{\tau}}{2\Delta x} = m\frac{C_i^{\tau+1} - C_i^{\tau}}{\Delta t} \qquad (2)$$

Поділяємо усі складові рівняння (2) на D, позначаємо $P = \frac{V}{D}$ і записуємо його наступним чином

$$\frac{C_{i-1}^{\tau}}{(\Delta x)^2} - \frac{C_i^{\tau}}{(\Delta x)^2} - \frac{C_i^{\tau}}{(\Delta x)^2} + \frac{C_{i+1}^{\tau}}{(\Delta x)^2} - \frac{PC_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} + \frac{PC_{i+1}^{\tau}}{2\Delta x} - \frac{PC_i^{\tau}}{2\Delta x} + \frac{PC_i^{\tau}}{2\Delta x} = \frac{m}{D}\cdot\frac{C_i^{\tau+1} - C_i^{\tau}}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Шляхом нескладних перетворень [5] (3) приводиться до виду

$$\frac{\frac{\Delta t D\left(C_{i-1}^{\tau} - C_i^{\tau}\right)}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x}} - \frac{\frac{\left(C_i^{\tau} - C_{i+1}^{\tau}\right)\Delta t D}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}} + C_i^{\tau} = C_i^{\tau+1}. \qquad (4)$$

Початок координат $x = 0$ вибираємо по урізу води у хвостосховищі, яке є границею III роду, тому що між дном хвостосховища і рівнем підземних вод існує шар техногенних відкладів. Рівняння (4) записуємо для розрахункових точок 0, 1, 2.

$$\frac{\frac{\Delta t D\left(C_0^{\tau} - C_1^{\tau}\right)}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x}} - \frac{\frac{\left(C_1^{\tau} - C_2^{\tau}\right)\Delta t D}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}} + C_1^{\tau} = C_1^{\tau+1}. \qquad (5)$$

Гранична умова III роду Данквертса-Бреннера має наступний вигляд у диференційній формі [4, 6]

$$V\left(C_x - C_0\right) = D\frac{\partial C}{\partial x} \qquad (6)$$

і кінцево-різницевій на попередній момент часу:

$$V\left(C_x - C_0^{\tau}\right) = D\frac{C_0^{\tau} - C_1^{\tau}}{\Delta x}. \qquad (7)$$

У виразах (1-7) прийняті такі позначення.

D– коефіцієнт гідродисперсії, м^2/доб; *C* – мінералізація підземних вод у водоносному горизонті, г/дм^3; *V*– швидкість фільтрації, м/доб; *m* – активна пористість, частки одиниці; *x* – просторова координата, м; *t* – часова координата, доб; C_{i-1}^{τ}, C_i^{τ}, C_{i+1}^{τ} – мінералізація підземних вод у розрахункових точках *i*-1, *i*, *i*+1 на попередній момент часу, г/дм^3; $C_i^{\tau+1}$ – мінералізація підземних вод у розрахунковій точці *i* на наступний момент часу, г/дм^3; *i*-1, *i*, *i*+1 – просторові індекси розрахункових точок; Δx – крок за просторовою координатою, м; Δt – крок за часовою координатою, доб; C_x – мінералізація води у хвостосховищі, г/дм^3; C_0 – мінералізація підземних вод у розрахунковій точці із координатою x = 0; C_0^{τ}, C_1^{τ}, C_2^{τ} – мінералізація підземних вод у розрахункових точках 1, 2, 3 на попередній момент часу, г/дм^3; $C_1^{\tau+1}$ – мінералізація підземних вод у розрахунковій точці 1 на наступний момент часу, г/дм^3.

Для узгодження граничної умови (7) із рівнянням (5) приводимо її до виду

$$\frac{\frac{V(C_x-C_0)\Delta x\Delta t}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2}-\frac{P}{2\Delta x}}=\frac{\frac{\Delta t(C_0^\tau-C_1^\tau)D}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{P}{2\Delta x}} \quad (8)$$

і ліву частину умови (8) підставляємо у ліву частину рівняння (5) замість першої складової

$$\frac{\frac{V(C_x-C_0^\tau)\Delta x\Delta t}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2}-\frac{P}{2\Delta x}}-\frac{\frac{\Delta tD(C_1^\tau-C_2^\tau)}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{P}{2\Delta x}}+C_1^\tau=C_1^{\tau+1}. \quad (9)$$

Усі інші точки розраховуються за звичайною схемою, наприклад

$$\frac{\frac{\Delta tD(C_1^\tau-C_2^\tau)}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2}-\frac{P}{2\Delta x}}-\frac{\frac{\Delta tD(C_2^\tau-C_3^\tau)}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{P}{2\Delta x}}+C_2^\tau=C_2^{\tau+1}. \quad (10)$$

Для визначення $C_0^{\tau+1}$ вираз (7) записуємо на наступний момент часу

$$V(C_x-C_0^{\tau+1})=\frac{D(C_0^{\tau+1}-C_1^{\tau+1})}{\Delta x} \quad (11)$$

і розв’язуємо відносно $C_0^{\tau+1}$

$$C_0^{\tau+1}=\frac{VC_x\Delta x+DC_1^{\tau+1}}{D+V\Delta x}. \quad (12)$$

Для застосування явної схеми (9, 10) необхідно визначити величини Δx і Δt за критеріями стійкості, якщо Dі V не змінюються у часі

$$\Delta x\le\frac{2D}{V},\quad \Delta t\le\frac{(\Delta x)^2}{2D}. \quad (13)$$

Якщо Dі Vне є постійними величинами, то

$$\Delta x\le\frac{2D_{min}}{V_{max}},\quad \Delta t\le\frac{(\Delta x)^2}{2D_{max}}. \quad (14)$$

Приклад розрахунку виконано за струмовою лінією, проведеною від центру греблі до річки Мала Тернівка. Початкові дані: C_x = 9 г/дм^3; $C_0^\tau=C_1^\tau=C_2^\tau$ = 1 г/дм^3; D = 0,5 г/дм^3;V = 0,0183 м/доб; m = 0,175; P = 0,0366.

Послідовність розрахунку: 1. Визначаємо величини Δx і Δtза критеріями стійкості (13).

$$\Delta x\le\frac{2\cdot0{,}5}{0{,}0183}=54{,}6\text{ м},\ \Delta t\le\frac{50^2}{2\cdot0{,}5}=2500\text{ діб}.$$

Таким чином схема (4) має запас стійкості. Вибираємо Δx = 50 м; Δt= 365 діб. Підставляємо вихідні дані у вираз (9) для визначення величини $C_1^{\tau+1}$

$$C_1^{\tau+1} = \frac{\frac{\Delta x V C_x \Delta t}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x}} - \frac{\frac{\Delta t D(C_1^{\tau} - C_2^{\tau})}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}} + C_1^{\tau} = \frac{50 \cdot 0{,}0183 \cdot 9 \cdot 365}{5147} + 1 = 1{,}584 \text{г/дм}^3.$$

Для розрахунку $C_0^{\tau+1}$ використовуємо формулу (12)

$$C_0^{\tau+1} = \frac{V C_x \Delta x + D C_1^{\tau+1}}{D + V\Delta x} = \frac{0{,}0183 \cdot 9 \cdot 50 + 0{,}5 \cdot 1{,}58}{0{,}5 + 0{,}0183 \cdot 50} = 6 \text{г/дм}^3.$$

У разі застосування неявної схеми рівняння (4) записуємо наступним чином

$$\frac{\frac{\Delta t D\left(C_{i-1}^{\tau+1} - C_i^{\tau+1}\right)}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x}} - \frac{\frac{\left(C_i^{\tau+1} - C_{i+1}^{\tau+1}\right)\Delta t D}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}} - C_i^{\tau+1} = -C_i^{\tau}. \quad (15)$$

Для розрахункових точок 1 і 2 за умовою першого роду $C = C_x$ на границі $x = 0$ (5) має вигляд:

$$\frac{\frac{\Delta t D\left(C_x - C_1^{\tau+1}\right)}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x}} - \frac{\frac{\Delta t D\left(C_1^{\tau+1} - C_2^{\tau+1}\right)}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}} - C_1^{\tau+1} = -C_1^{\tau}, \quad (16)$$

$$\frac{\frac{\Delta t D\left(C_1^{\tau+1} - C_2^{\tau+1}\right)}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x}} - \frac{\frac{\Delta t D\left(C_2^{\tau+1} - C_3^{\tau+1}\right)}{m}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}} - C_2^{\tau+1} = -C_2^{\tau}. \quad (17)$$

Для спрощення виду рівнянь (6) і (7) вводимо такі позначення

$$\frac{m}{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x}} = K_1, \quad \frac{m}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}} = K_2. \quad (18)$$

Тоді рівняння (6) і (7) приймуть вид:

$$\frac{\Delta t D\left(C_x - C_1^{\tau+1}\right)}{K_1} - \frac{\Delta t D\left(C_1^{\tau+1} - C_2^{\tau+1}\right)}{K_2} - C_1^{\tau+1} = -C_1^{\tau}, \quad (19)$$

$$\frac{\Delta t D\left(C_1^{\tau+1} - C_2^{\tau+1}\right)}{K_1} - \frac{\Delta t D\left(C_2^{\tau+1} - C_3^{\tau+1}\right)}{K_2} - C_2^{\tau+1} = -C_2^{\tau}. \quad (20)$$

Аналогічно записуємо рівняння для усіх інших розрахункових точок області масопереносу. Останнє рівняння системи для струмової лінії довжиною 4000 м, 40 розрахункових точок при Δx = 100 м має вигляд

$$\frac{\Delta t D\left(C_{39}^{\tau+1} - C_{40}^{\tau+1}\right)}{K_1} - \frac{\Delta t D\left(C_{40}^{\tau+1} - C_p\right)}{K_2} - C_{40}^{\tau+1} = -C_{40}^{\tau}, \quad (21)$$

де C_p – відома мінералізація води у річці, яка є границею І роду.

Кількість невідомих співпадає із кількістю рівнянь. Це обов’язкова умова для розв’язання системи. Для неявної схеми необхідно виконати узгодження між другим доданком попереднього рівняння і першим наступного. Стосовно рівнянь (19) і (20) це виконується наступним чином. Щоб ці доданки дорівнювали один одному, усі складові рівняння (20) помножаємо на величину $R = \frac{K_2}{K_1}$, тоді (20) прийме вигляд

$$\frac{\Delta t D\left(C_1^{\tau+1} - C_2^{\tau+1}\right)}{K_2} - \frac{\Delta t D\left(C_2^{\tau+1} - C_3^{\tau+1}\right)}{\frac{K_2 \cdot K_2}{K_1}} - \frac{K_2}{K_1} C_2^{\tau+1} = -\frac{K_2}{K_1} C_2^{\tau}. \qquad (22)$$

Аналогічні перетворення виконуємо із усіма іншими рівняннями. Систему доцільно розв'язувати методом прогонки [7].

Висновки. 1. Чисельні методи, засновані на кінцево-різницевій апроксимації Джонсона, є перспективними для розв'язання планових міграційних задач. 2. Переваги явних схем – простота. 3. Неявні схеми не потребують розрахунків критеріїв стійкості, що дозволяє скоротити кількість розрахункових точок. 4. Безсумнівним достоїнством методу є його висока точність і можливість урахування початкових даних без їх осереднення у просторі та часі.

Бібліографічні посилання

1. Евграшкина Г.П. Влияние горнодобывающей промышленности на гидрогеологические и почвенно-мелиоративные условия территорий, монография / Г.П. Евграшкина. Дн-ск. – Монолит – 2003. – 200 с.
2. Євграшкіна Г.П. Закономірності зміни гідрогеологічних умов на території, прилеглій до хвостосховища «Балка Стуканова» у Західному Донбасі / Г.П. Євграшкіна, О. Є. Сабадаш. – Вісник Дніпропетровського університету. Серія Геологія, Географія. Вип. 14. С. 42-46.
3. Євграшкіна Г.П. Гідродинамічне обґрунтування структури режимної спостережної мережі на території, прилеглій до хвостосховища Криворізького північного гірничозбагачувального комбінату / Г.П. Євграшкіна, В.В. Войцховська. / Науковий вісник національного гірничого університету №5. – 2010. – с. 118-121.
4. Веригин Н.Н. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод / Н.Н. Веригин, С.В. Васильев, В.С. Саркисян, Б.С. Шержуков. – М.: Колос, 1979. – 336 с.
5. Евграшкина Г.П. Математические модели солепереноса в зоне аэрации техногенно нарушенных территорий / Г.П. Евграшкина. – Вісник Дніпропетровського університету. Серія Геологія, Географія. Т. 18. Вип. 12. – 2010. – с. 80-84.
6. Brenner H. The diffusion model of longitudinal mixing in beds of finite length. Numerical values. – Chemical Engineering Science. 1962, vol. 17, p. 229-243.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 653 с.

Надійшла до редколегії 28.03.2013