УДК 004.942:539.3

В.И. ЛОМАЗОВА, канд. техн. наук, ст. преп., НИУ "БелГУ", Белгород, Россия

ПОДДЕРЖКА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ВЫБОРЕ МОДЕЛИ АНИЗОТРОПИИ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Рассматривается проблема поддержки принятия решений при выборе (построении) модели анизотропии на примере задачи исследования связанных термоупругих процессов в неоднородных анизотропных средах. Предлагается подход, основанный на выделении подзадач структурного и параметрического синтеза, первая из которых решается эволюционными методами, а вторая – методами решения обратных задач математической физики. Ил.: 1. Библиогр.: 14 назв.

Ключевые слова: поддержка принятия решений, модель, анизотропия, термоупругая среда.

Постановка проблемы. Математическое и компьютерное моделирование являются одними из наиболее эффективных инструментов исследования физических (в том числе и термомеханических) процессов, протекающих в сложных (неоднородных, анизотропных, композитных) средах, что актуально для решения практических задач, возникающих при разработке изделий различных отраслей машиностроения. При этом научную и практическую значимость имеет не только совершенствование математического аппарата решения динамических начально-краевых задач термомеханики, но и разработка методологии построения модели термомеханики, используемой при проведении чиленных расчетов.

Основная проблема построения компьютерной модели заключается в необходимости удовлетворения двум подчас противоречащим друг другу требованиям: адекватности модели исследуемому процессу и простоте модельного описания, позволяющей строить эффективные вычислительные алгоритмы решения поставленных задач.

Анализ литературы. В рамках рассматриваемой проблематики можно выделить два основных направления исследований. Первое направление связано с определением характеристик неоднородной анизотропной термоупругой среды, входящих в уравнения модели в качестве коэффициентов (характеристик) [1 – 3]. Возникающие при этом коэффициентные обратные начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений, как правило, являются классически (по Ж. Адамару) некорректными. Сложность такого рода задач приводит к тому, что эффективные алгоритмы решения разработаны, в основном, для одномерных задач с небольшим числом искомых характеристик [4, 5], хотя общие подходы были развиты и для трехмерных задач с большим числом искомых характеристик [6], в том числе и для сложных реологических и композитных сред [7 – 9]. В рамках второго направления исследований проблема построения адекватной компьютерной модели термоупругости связывается с определением совокупности термомеханических эффектов, которые следует учесть при решении определенного класса задач. Инструментарий исследований в этом направлении составляют методы теории принятия решений, применяемые для выбора наиболее подходящей модели из заданного класса моделей или для сокращения множества выбора [10, 11]. Комбинированный подход, предложенный в [12], предполагает сочетание методов теории коэффициентных обратных задач и методов теории принятия решений для структурно-параметрического синтеза моделей термоупругости, что связано с определенными сложностями его применения и, как следствие, использование этого подхода для решения частных задач построения (выбора) моделей термомеханики.

Целью настоящей работы является разработка процедуры применения комбинированного структурно-параметрического подхода для поддержки принятия решений при выборе модели анизотропии термоупругой среды.

Моделирование термомеханических процессов. Математическую модель процесса можно представить в виде: $M = \langle S, C \rangle$, где S – структура модели, учитывающая вид и взаимосвязи между входящими в модель соотношениями, а C – параметры модели, представляющие собой коэффициенты (в данном случае зависящие от пространственных координат) этих соотношений.

Под действием термосиловых нагружений (в том числе массовых сил и тепловых источников, имеющих распределения F_i, $i = 1, 2, 3$ и F_0, соответственно) в неоднородной анизотропной термоупругой среде возникают перемещения u_i ($i = 1, 2, 3$), деформации e_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), напряжения σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), тепловые потоки q_i ($i = 1, 2, 3$), а также может произойти изменение температуры θ. Все эти величины в дальнейшем полагаются достаточно гладкими функциями декартовых пространственных координат $x = (x_1, x_2, x_3)$ и времени t. В качестве модели, описывающей анизотропию общего вида, будем использовать модель обобщенной термомеханики [13] (обобщенный закон Фурье, уравнение теплового баланса, уравнения движения (равновесия), соотношения Коши и обобщенный закон Дюамеля-Неймана):

$$\tau\dot{q}_i + q_i + K_{ij}\theta,_j = 0, \quad C_v\dot{\theta} + q_j,_j + T_0\beta_{ij}\dot{e}_{ij} = f_0, \quad \rho\ddot{u}_i - \sigma_{ij},_j = f_i,$$

$$e_{ij} - (u_i,_j + u_j,_i)/2 = 0, \quad \sigma_{ij} - C_{ijkl}e_{kl} + \beta_{ij}\theta = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

При записи соотношений термоупругости использовались общепринятые обозначения характеристик среды: τ – время релаксации теплового потока; K_{ij} (i, j = 1, 2, 3) – коэффициенты теплопроводности анизотропной среды; C_v – удельная теплоемкость при постоянной деформации; β_{ij} (i, j = 1, 2, 3) – коэффициенты термического объемного расширения; C_{ijkm} (i, j, k, m = 1, 2, 3) – изотермические коэффициенты жесткости анизотропной среды; ρ – плотность. Точки над величинами означают частные производные по времени t, индекс после запятой – частную производную по соответствующей пространственной координате. По повторяющемуся индексу производится суммирование.

Анизотропия свойств среды общего вида (описываемая тензорами β_{ij}, C_{ijkm}, K_{ij}) с учетом симметрии тензоров характеризуется 33 независимыми величинами (функциями пространственных переменных). Например, в случае неотропии (наличия одной плоскости симметрии) число характеристик анизотропии сокращается до 21. Ортотропия (наличия трех плоскостей симметрии), монотропия (наличие одного выделенного направления) и изотропия (отсутствие выделенных направлений) требуют для своего описания 15, 7 и 4 характеристик соответственно. Для представления используемой модели анизотропии будем использовать бинарный вектор модели $æ$, компоненты которого $æ_i$ (i = 5, …, 33) принимают значение 1, если соответствующая характеристика анизотропии является независимой и 0 в противном случае. Ограничившись рассмотрением только ортотропных сред, можно уменьшить размерность вектора модели до 11 компонент (i = 5, …, 15). Аналогичные возможности имеются в случаях априорных предположений относительно других типичных видов анизотропии.

Таким образом, при выборе более простой модели анизотропии число характеристик среды, требуемых для моделирования термомеханических процессов, значительно уменьшается.

Структурный синтез модели термомеханики. Предполагается, что наиболее полная из рассматриваемых моделей, соответствующая набору коэффициентов $æ_i = 1$ (i = 1, …, n), модель M^1 является адекватной. Предполагается также, что проверка адекватности произвольной модели M^* из рассматриваемого класса, может быть сведена к проверке выполнения заданной точности аппроксимации решений, полученных на основе M^1, решениями, полученными на основе M^*. с использованием процедуры, аналогичной [12]:

1) генерируется набор тестовых задач T_1, T_2, ..., T_V, решениями которых в рамках модели M^*, будут функции $\{u_i\ , e_{ij}, \sigma_{ij}, q_i, \theta\ \}^v$ (i, j =1, 2, 3; v = 1, ..., V);

2) полученные решения подставляются в соотношения, соответствующие модели M^1, и вычисляются невязки;

3) полученные невязки приводятся к безразмерному виду и нормируются, после чего невязки умножаются на весовые коэффициенты (найденные в результате обработки экспертных оценок), а затем для модели M^* определяется средняя (по набору тестовых задач) невязка δ^*;

4) проверяется выполнение для полученной средней невязки δ^* ограничения, обеспечивающего заданную допустимую точность аппроксимации δ^ε: $\delta^* \le \delta^\varepsilon$.

Сложность использования модели можно оценить по значению вектора *æ*. Однако учет разных моделей анизотропии не одинаков по сложности и зависит от особенностей процесса, типа решаемой задачи и используемого метода ее решения, а также требуемой точности решения. Поэтому в качестве критерия сравнительной сложности модели предлагается использовать взвешенную сумму компонент вектора *æ*.

Выбор (одной или нескольких) наиболее удобных для использования моделей целесообразно производить, основываясь на процедуре генетической селекции, поскольку она позволяет эффективно находить удовлетворительные решения многоэкстремальных оптимизационных задач большой размерности и обладает возможностью использования параллельных вычислений, что отвечает перспективным тенденциям развития компьютерных технологий. Для селекции моделей предлагается следующая (основанная на стандартном генетическом алгоритме [14]) процедура (рис.):

1) кодирование моделей в виде бинарных хромосом, определяемых коэффициентами $æ_i$ (i = 1, …, n) и построение начальной популяции моделей, случайным выбором из класса моделей;

2) построение нормализованной функции приспособленности на основе критерия сложности;

3) оценка популяции, после чего: либо формирование новой популяции на основе применения генетических алгоритмов, либо формирование множества селекционных моделей, часть которых (прошедших проверку на удовлетворение адекватности) составляют множество выбора. Множество выбора, как правило, включает в себя 3 – 5 моделей, после чего окончательный выбор производится лицом,

принимающим решение, на основе своих (обычно интуитивных) предпочтений.

Рис. Схема процедуры селекции

Как и любой эвристический метод случайного поиска, предлагаемая процедура генетической селекции моделей не гарантирует нахождение оптимального решения, но представляется более эффективной, чем гарантирующий точное решение метод полного перебора.

Параметрический синтез модели термомеханики. На предыдущем этапе предполагалось, что коэффициенты уравнений термомеханики являются известными константами, что соответствует пространственной однородности термоупругой среды. Этап параметрического синтеза состоит в уточнении модели за счет допущения возможной зависимости свойств среды от пространственных координат. Нахождение этой зависимости по результатам измерения на поверхности тела отдельных характеристик специальным образом инициированных в рассматриваемом теле термомеханических процессов представляет собой коэффициентную обратную задачу для уравнений термомеханики. Такого рода некорректные по Ж.Адамару задачи рассмотрены, в частности, в [1 – 3].

Выводы. Предложенный подход к построению математических моделей взаимосвязанных физических процессов (рассмотренный на примере задач термомеханики), основанный на разделении этапов стркутурного и параметрического синтеза, позволяет учесть при моделировании анизотропию среды распространения процессов. Однако его реализация представляет собой достаточно трудоемкую процедуру (являющуюся основным результатом работы), которая оправдана в случае дальнейшего многократного использования моделей для решения однотипных задач в рамках автоматизации научных исследований. Вычислительные эксперименты, проведенные с использованием разработанного исследовательского прототипа системы поддержки принятия решений по выбору модели, свидетельствуют об эффективности предложенного подхода.

Список литературы: **1.** *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / *А.О. Ватульян*. – М.: Физматлит, 2007. – 223 с. **2.** *Ломазов В.А.* Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред / *В.А. Ломазов*. – Орел: ОрелГТУ, 2002. – 172 с. **3.** *Яхно В.Г.* Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений упругости / *В.Г. Яхно*. – Новосибирск: Наука, 1990. – 304 с. **4.** *Ватульян А.О.* Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел / *А.О. Ватульян, С.А. Нестеров* // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87. – № 1. – С. 217-224. **5.** *Гордон В.А.* Определение жесткостных параметров слабонеоднородных стержней по их динамическим характеристикам. Часть I / *В.А. Гордон, П.Н. Анохин, Е.В. Брума* // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. – 2013. – № 2-2. – С. 90-97. **6.** *Ломазов В.А.* Задача диагностики упругих полуограниченных тел / *В.А. Ломазов* // Прикладная математика и механика. – 1989. – Т. 53. – № 5. – С. 766-772. **7.** *Романов В.Г.* Трехмерная обратная задача вязкоупругости / *В.Г. Романов* // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 441. – № 4. – С. 452-453. **8.** *Ломазов В.А.* Учет термочувствительности в задаче диагностики термоупругих сред / *В.А. Ломазов, Ю.В. Немировский* // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44. – № 1 (257). – С. 176-184. **9.** *Ломазов В.А.* Об одной постановке задачи диагностики переходной зоны дисперсно-упрочненного композитного материала / *В.А. Ломазов* // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16. – № 11. – С. 120-128. **10.** *Жиляков Е.Г.* Селекция аддитивных функциональных моделей сложных систем / *Е.Г. Жиляков, В.А. Ломазов, В.И. Ломазова* // Информационные системы и технологии. – 2010. – № 6. – С. 66-70. **11.** *Жиляков Е.Г.* Компьютерная кластеризация совокупности аддитивных математических моделей взаимосвязанных процессов / *Е.Г. Жиляков, В.А. Ломазов, В.И. Ломазова* // Вопросы радиоэлектроники. – 2011. – № 1. –

С. 115-119. **12.** *Ломазов В.А.* Построение математической модели при решении задач термомеханики / *В.А. Ломазов, В.И. Ломазова* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4-4. – С. 1582-1584. **13.** *Бардзокас Д.И.* Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. I. / *Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин, Н.А.Сеник, М.Л. Фильштинский*. – М.: URSS, 2010. – 312 с. **14.** *Гладков Л.А.* Генетические алгоритмы / *Л.А. Гладков, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик*. – М.: Физматлит, 2010. – 368 с.

Bibliography (transliterated): 1. *Vatul'jan A.O.* Obratnye zadachi v mehanike deformiruemogo tverdogo tela */ A.O. Vatul'jan*. – M: Fizmatlit, 2007. – 223 s. **2.** *Lomazov V.A.* Zadachi diagnostiki neodnorodnyh termouprugih sred / *V.A. Lomazov*. – Orel: OrelGTU, 2002. – 168 s. **3.** *Jahno V.G.* Obratnye kojefficientnye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij uprugosti / *V.G. Jahno*. – Novosibirsk: Nauka, 1990. – 304 s. **4.** *Vatul'jan A.O.* Ob odnom sposobe identifikacii termouprugih harakteristik dlja neodnorodnyh tel / *A.O. Vatul'jan, S.A. Nesterov* // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. – 2014. – T. 87. – № 1. – S. 217-224. **5.** *Gordon V.A.* Opredelenie zhestkostnyh parametrov slaboneodnorodnyh sterzhnej po ih dinamicheskim harakteristikam. Chast' I / *V.A. Gordon, P.N. Anohin, E.V. Bruma* // Izvestija Tul'skogo gos. un-ta. Estestvennye nauki. – 2013. – № 2-2. – S. 90-97. **6.** *Lomazov V.A.* Zadacha diagnostiki uprugih poluogranichennyh tel / *V.A. Lomazov* // Prikladnaja matematika i mehanika. – 1989. – T. 53. – № 5. – S. 766-772. **7.** *Romanov V.G.* Trehmernaja obratnaja zadacha vjazkouprugosti / *V.G. Romanov* // Doklady Akademii nauk. – 2011. – T. 441. – № 4. – S. 452-453. **8.** *Lomazov V.A.* Uchet termochuvstvitel'nosti v zadache diagnostiki termouprugih sred / *V.A. Lomazov, Ju.V. Nemirovskij*// Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fizika. – 2003. – T. 44. № 1 (257). – S. 176-184. **9.** *Lomazov V.A.* Ob odnoj postanovke zadachi diagnostiki perehodnoj zony dispersno-uprochnennogo kompozitnogo materiala / *V.A. Lomazov* // Matematicheskoe modelirovanie. – 2004. – T. 16. – № 11. – S. 120-128. **10.** *Zhiljakov E.G.* Selekcija additivnyh funkcional'nyh modelej slozhnyh system / *E.G. Zhiljakov, V.A. Lomazov, V.I. Lomazova* // Informacionnye sistemy i tehnologii. – 2010. – № 6. – S. 66-70. **11.** *Zhiljakov E.G.* Komp'juternaja klasterizacija sovokupnosti additivnyh matematicheskih modelej vzaimosvjazannyh processov / *E.G. Zhiljakov, V.A. Lomazov, V.I. Lomazova* // Voprosy radiojelektroniki. – 2011. – № 1. – S. 115-119. **12.** *Lomazov V.A.* Postroenie matematicheskoj modeli pri reshenii zadach termomehaniki / *V.A. Lomazov, V.I. Lomazova* // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. – 2011. – № 4-4. – S. 1582-1584. **13.** *Bardzokas D.I.* Matematicheskoe modelirovanie v zadachah mehaniki svjazannyh polej. T. I ./ *D.I. Bardzokas, A.I. Zobnin, N.A.Senik, M.L. Fil'shtinskij*. – M.: URSS, 2010. – 312 s. **14.** *Gladkov L.A.* Geneticheskie algoritmy */ L.A. Gladkov, V.V. Kurejchik, V.M. Kurejchik*. – M.: Fizmatlit, 2010. – 368 s.

Статью представил д-р техн. наук, проф. НИУ "БелГУ" Жиляков Е.Г.

Поступила (*received*) *10.05.2014*

Lomazova Valentina, Cand.Sci.Tech, senior teacher
Federal State Autonomous Educational Institution
of Higher Professional Education "Belgorod National Research University"
Str. Pobedy, 85, Belgorod, Russia, 308015
tel./phone: (472) 233-03-81, e-mail: lomazova@bsui.edu.ru