

УДК 65.012.12

**НЕЛИНЕЙНЫЙ ФИЛЬТР ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО С ГАУССОВСКИМИ ВЕСАМИ**

*В. А. Толстунов*

**NONLINEAR FILTERING ON THE BASE OF GEOMETRICAL MEAN WITH GAUSSIAN SCALES**

*V. A. Tolstunov*

Предлагается алгоритм цифрового сглаживающего фильтра со скользящим окном, использующий геометрическое среднее с гауссовскими весами входных значений сигнала. Приведены результаты цифрового моделирования работы данного фильтра в случае, когда мешающий шум является суммой гауссовских и импульсных помех.

The paper provides the algorithm of digital smoothing filter with slithering window using geometrical mean with Gaussian scales. The results of digital modeling of the given filter are shown, when disturbing noise is the amount of the normal end pulsed components.

**Ключевые слова:** фильтр, мешающий шум, погрешность фильтрации, цифровое моделирование.

**Keywords:** filter, disturbing noise, inaccuracy of filtering, digital modeling.

Задача восстановления полезных информационных сигналов, искаженных различными помехами, представляет интерес для широкого круга специалистов. Для решения этой задачи предложено много алгоритмов фильтрации, которые успешно работают как в пространственной, так и в частотной областях [1, с. 131, 228]. В настоящей работе для восстановления сигналов предлагается сглаживающий фильтр, построенный с помощью обобщенного алгоритма геометрического среднего [4].

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$  – отсчеты входного одномерного сигнала,  $y_1, y_2, \dots, y_n \dots$  – отсчеты выхода фильтра. Тогда, согласно обобщенному алгоритму геометрического среднего,

$$y_k = \varphi^{-1} \left( \exp \left( \frac{\sum_{i=k-(m-1)/2}^{k+(m-1)/2} f(x_i) \ln \varphi(x_i)}{\sum_{i=k-(m-1)/2}^{k+(m-1)/2} f(x_i)} \right) \right) \quad (1)$$

где  $f(x), \varphi(x)$  – некоторые однозначные, монотонные функции,  $m$  – размер апертуры фильтра. Из (1) в частном случае, когда  $\varphi(x) \equiv 1$ ,

$f(x) = \exp(-\alpha x^2)$ ,  $x \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ , будем иметь:

$$y_k = \exp \left( \frac{\sum_{i=k-(m-1)/2}^{k+(m-1)/2} e^{-\alpha x_i^2} \ln x_i}{\sum_{i=k-(m-1)/2}^{k+(m-1)/2} e^{-\alpha x_i^2}} \right) \quad (2)$$

Рассмотрим свойства фильтра (2) в случае, когда  $x_i = s_i + \xi_i + \eta_i$ , где  $n_i$  – значение полезного сигнала,  $\xi_i$  – значение гауссовского шума,  $\eta_i$  – значение импульсного шума. Будем полагать, что гауссовский шум имеет нулевое математическое ожида-

ние и дисперсию, равную  $\sigma^2$ . Импульсный шум может принимать значения 0,  $A \geq 0$  с вероятностями  $p(\eta_i = A) = p, p(\eta_i = 0) = 1 - p = q$ .

Будем полагать также, что в пределах апертуры фильтра значения полезного сигнала практически одинаковы. Тогда для

$$x_i \in [x_{k-(m-1)/2} \dots x_{k+(m-1)/2}]$$

будем иметь  $S_i = S_k$ , и, следовательно, плотность вероятностей независимых, одинаково распределенных случайных отсчетов  $x_i$  имеет вид [2, с. 89]

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left( p \cdot \exp \left( -\frac{(x-s_k-A)^2}{2\sigma^2} \right) + q \cdot \exp \left( -\frac{(x-s_k)^2}{2\sigma^2} \right) \right) \quad (3)$$

Так как значения  $y_k$  случайны, то для характеристики сглаживающих свойств фильтра найдем математическое ожидание сигнала  $y_k$ .

Определить математическое ожидание случайной величины (2) по распределению (3) достаточно сложно. В нашем случае удобно при  $m \gg 1$  воспользоваться законом больших чисел теории вероятностей [2, с. 63]. Тогда для математического ожидания выхода фильтра (2) можно использовать приближенное соотношение:

$$M(y_k) = \exp \left( \frac{M(e^{-\alpha x_i^2} \ln x_i)}{M(e^{-\alpha x_i^2})} \right) \quad (4)$$

Вычисляя математические ожидания в (4) с учетом распределения (3), можно получить, что при отсутствии гауссовского шума и  $A/S_k \ll 1$ :

$$y_k = \exp \left( \frac{pe^{-\alpha(2AS_k + A^2)} \ln(S_k + A) + q \ln S_k}{pe^{-\alpha(2AS_k + A^2)} + q} \right). \quad (5)$$

Из (5) при  $q = 1$  имеем естественный результат

$$y_k = S_k.$$

Из (5) следует также, что

$$y_k \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \exp \left( \frac{q \ln S_k}{q} \right) = S_k.$$

То есть при увеличении параметра нелинейности  $\alpha$  импульсный шум удаляется лучше.

Если во входном сигнале  $X_i$  присутствует только гауссовский шум и  $\sigma/S_k \ll 1$ , то из (4) можно получить:

$$y_k = \exp \left( \frac{\ln S_k}{1 + 2\alpha\sigma^2} - \frac{1}{(1 + 2\alpha\sigma^2)^2} \right) \cdot \left( 2\alpha\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2S_k^2} + 2\alpha^2\sigma^4 \right). \quad (6)$$

Из (6) следует, что чем меньше  $\alpha$ , тем ближе  $y_k$  и  $S_k$ . При  $\alpha = 0$  имеем:

$$y_k = \exp \left( \ln S_k - \frac{\sigma^2}{2S_k^2} \right) = S_k e^{-\frac{\sigma^2}{2S_k^2}}.$$

Последнее показывает, что гауссовский шум при  $\alpha = 0$  существенно ослабляется, но не удаляется полностью.

Таким образом, полученные результаты теоретического исследования фильтра (2) показывают, что он удаляет как импульсный, так и гауссовский шум. В первом случае параметр нелинейности  $\alpha$  должен быть большим, во втором случае – равным нулю.

Фильтр (2) был промоделирован численно. В качестве полезного сигнала был выбран прямоугольный импульс с высотой ступеньки 20. Результат фильтрации характеризовался погрешностью

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |s_i - y_i|, \quad (7)$$

где  $N$  – число отсчетов сигнала.

На рисунке 1 показана зависимость погрешности  $R$  при удалении импульсного шума ( $m = 3, A = 30, p = 0.4, \sigma = 0$ ) от величины параметра  $\alpha$ . Кривая (1) соответствует классическому фильтру геометрического среднего

$$y_k = \sqrt[m]{x_{k-(m-1)/2} \cdots x_{k+(m-1)/2}}. \quad (8)$$

Кривая (2) соответствует исследуемому фильтру. Как видно из этого рисунка, для параметра  $\alpha$  следует брать значения  $\alpha \geq 8$ .

На рисунке 2 показана погрешность  $R$  при удалении импульсного шума от величины вероятности его появления  $p$ . Параметры моделирования:

$$A = 30, \sigma = 0, m = 3, \alpha = 9.$$

Кривая (1) показывает зашумление сигнала, рассчитываемое по формуле:

$$R_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |s_i - x_i|.$$

Кривая (3) показывает погрешность фильтра (2). Для сравнения, кривая (2) показывает погрешность классического фильтра геометрического среднего (8).

На рисунке 3 показана зависимость погрешности  $R$  от амплитуды  $A$  импульсного шума. Параметры моделирования:

$$m = 3, p = 0.4, \sigma = 0, \alpha = 9.$$

Кривая (1) показывает зашумление сигнала, кривая (2) показывает погрешность фильтра (8), кривая (3) соответствует погрешности фильтра (2).

На рисунке 4 показана зависимость погрешности  $R$  от параметра  $\sigma$  гауссовского шума. Параметры моделирования:  $m = 3, p = q = 0, \alpha = 9$ . Кривая (1) показывает зашумление сигнала, кривая (2) показывает погрешность фильтра (8), кривая (3) соответствует погрешности фильтра (2).

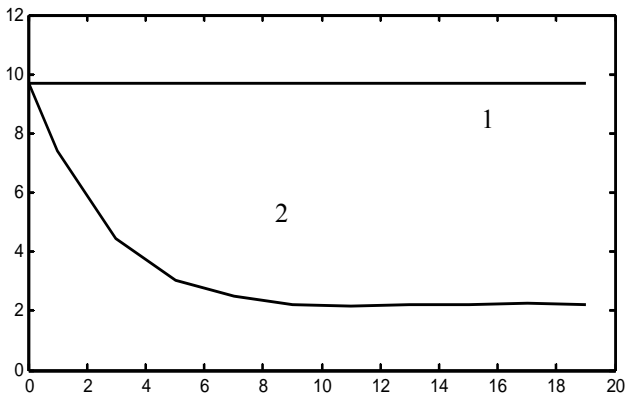


Рис. 1. Зависимость погрешности от  $\alpha$

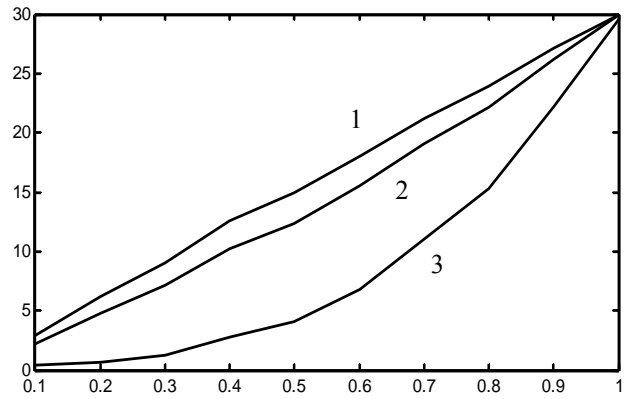


Рис. 2. Зависимость погрешности от  $p$

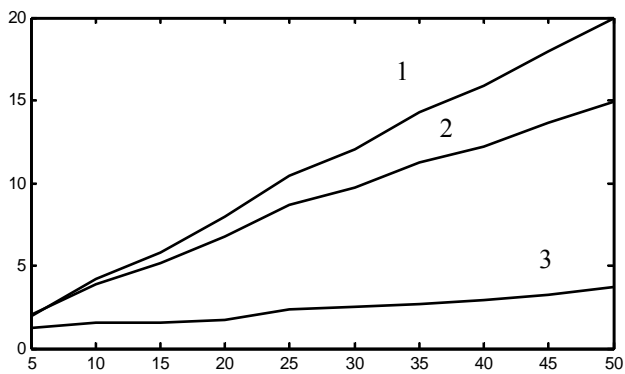


Рис. 3. Зависимость погрешности от  $A$

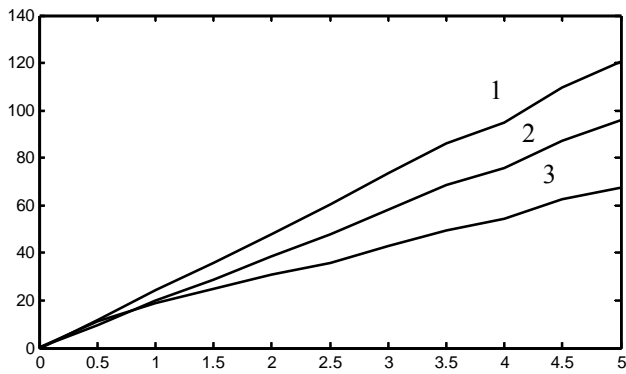


Рис. 4. Зависимость погрешности от  $\sigma$

На рисунке 5 показаны:  $a$  – зашумленный полезный сигнал

( $A = 30, p = 0.4, q = 0, \sigma = 0, R_0 = 11.4$ ),

$b$  – выход классического медианного фильтра

( $m = 3, R = 8.2$ ),  $v$  – выход фильтра геометрического среднего (8) ( $m = 3, R = 9.14$ ) и

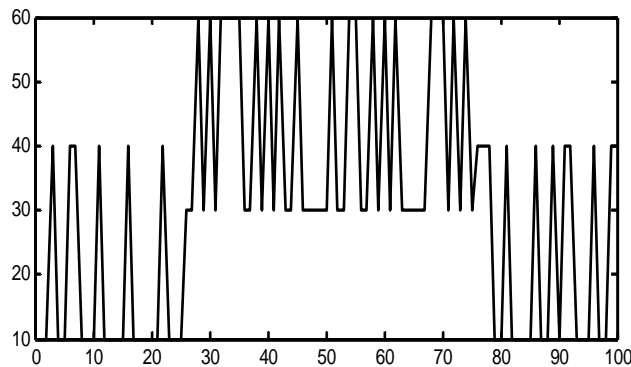
$z$  – выход исследуемого фильтра (2)

( $m = 3, \alpha = 9, R = 2.02$ ).

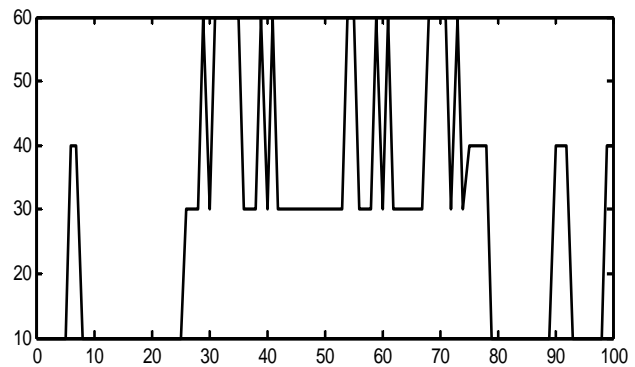
Как видно из приведенных результатов, фильтр (2) существенно лучше предыдущих фильтров удаляет импульсный шум.

Фильтр (2) легко обобщается для обработки изображений. Если в этом случае размер апертуры равен  $m \times n$ , то

$$y_{kl} = \exp \left( \frac{\sum_{i=k-(m-1)/2}^{k+(m-1)/2} \sum_{j=l-(n-1)/2}^{l+(n-1)/2} e^{-\alpha x_{ij}^2} \ln x_{ij}}{\sum_{i=k-(m-1)/2}^{k+(m-1)/2} \sum_{j=l-(n-1)/2}^{l+(n-1)/2} e^{-\alpha x_{ij}^2}} \right). \quad (9)$$



$a$



$b$

Рис. 5 (а, б). Результаты удаления импульсного шума

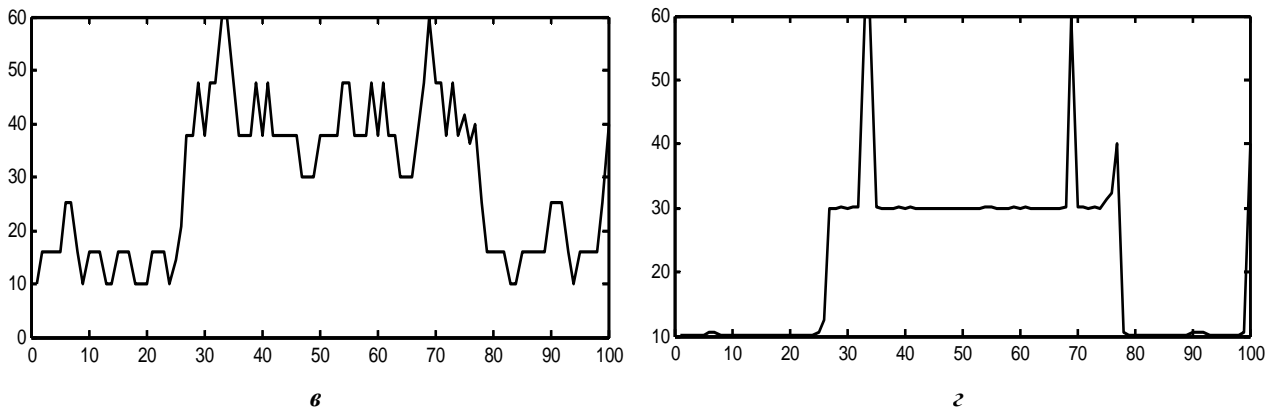


Рис. 5 (а, б). Результаты удаления импульсного шума

Фильтр (9) был промоделирован численно. Результат фильтрации оценивался погрешностью

$$R = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |s_{ij} - y_{ij}|,$$

где  $N^2$  – размер изображения. Результат зашумления характеризовался величиной:

$$R_0 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |s_{ij} - x_{ij}|.$$

На рисунке 6 показаны: а – исходное изображение, б – изображение с наложенным импульсным шумом ( $A = 100, p = 0.4, \sigma = 0, R_0 = 0.1569$ ),

в – выход медианного фильтра ( $m = n = 3, R = 0.1145$ ),

г – выход фильтра геометрического среднего

( $m = n = 3, R_0 = 0.1292$ ),

д – выход фильтра среднего арифметического с гауссовскими весами (10) [3]

( $m = n = 3, \beta = 8, R = 0.0203$ ),

е – выход исследуемого фильтра

( $m = n = 3, \alpha = 9, R = 0.0187$ ).

$$y_{kl} = \frac{\sum_{i=k-(m-1)/2}^{k+(m-1)/2} \sum_{j=l-(n-1)/2}^{l+(n-1)/2} e^{-\alpha x_{ij}^2} x_{ij}}{\sum_{i=k-(m-1)/2}^{k+(m-1)/2} \sum_{j=l-(n-1)/2}^{l+(n-1)/2} e^{-\alpha x_{ij}^2}}. \quad (10)$$



Рис. 6. Зашумление изображения и результаты удаления шума

Как видно из приведенных результатов, усредняющие фильтры с гауссовскими весами (2), (10) существенно лучше убрали наложенный импульсный шум.

Таким образом, проведенные исследования нелинейного фильтра (2) показали, что он достаточно хорошо удаляет аддитивные гауссовский шум и импульсный шум большой амплитуды и высокой интенсивности.

#### **Литература**

1. Гонсалес Р., Вуд Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.
2. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982. 255 с.
3. Сусликов В. С., Толстунов В. А. Усредняющий сглаживающий фильтр с гауссовскими весами // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ – 2012): материалы XI Международной научно – практической конференции. Кемерово: Практика, 2012. Ч. 1. С. 71 – 75.
4. Толстунов В. А. Обобщенный алгоритм геометрического среднего // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2013. № 12(59). Ч. 1. С. 133 – 135.

#### **Информация об авторе**

**Толстунов Владимир Андреевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации исследований и технической кибернетики Кемеровского государственного университета, vat@bk.ru.

**Vladimir A. Tolstunov** – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor at the Department of Investigations Automation and Engineering Cybernetics, Kemerovo State University.

*Статья поступила в редколлегию 31.10.2014 г.*