

**О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
ОДНОНАПРАВЛЕННО-АРМИРОВАННЫХ СРЕД***А. В. Станиславович***ON SOME PROBLEMS OF THERMAL CONDUCTIVITY
OF UNIDIRECTIONALLY REINFORCED MATERIALS***A. V. Stanislavovich*

Рассматривается структурная модель теплопроводности однонаправленно армированного слоя. Исследуется применимость допущения о равенстве температур в фазах композита в пределах представительного элемента армированного слоя. Решается уравнение теплопроводности с коэффициентами, теряющими разрыв на границах раздела фаз. На этих же поверхностях задаются условия идеального теплового контакта. Дифференциальная начально-краевая задача сводится к разностной. Применяются экономичные разностные схемы. Для получения оценок для реальных материалов рассматриваются стеклопластики. Из численных результатов видно, что время выравнивания температуры в фазах композита для исследуемых материалов порядка 10^{-3} с, что существенно меньше характерного времени эксплуатации конструкций. Эти результаты позволяют говорить о правомерности допущения о равенстве температур в фазах композита в пределах представительного элемента армированного слоя.

Structural model of thermal conductivity of unidirectionally reinforced layer is under consideration. The assumption that temperatures are equal within represented element of reinforced layer is addressed in the present research. In order to answer that question the heat equation with discontinuous coefficients on the phase boundary is solved. On phase boundaries perfect thermal contact conditions are set. Then differential problem is approximated by difference scheme. Effective difference schemes have been used. To get numerical approximation on real-life data fiberglass reinforced thermoplastics are under consideration. Numerical results show that temperature in composition phases equals quite fast (about 10^{-3} seconds), which is significantly less than the typical time of service of constructions made of composite materials. This allows assume that temperatures are equal within the represented element of reinforced layer.

Ключевые слова: теплопроводность, армированные среды, дифференциальные уравнения в частных производных, численные методы, разностные схемы.

Keywords: thermal conductivity, reinforced materials, partial differential equations, numerical methods, difference schemes.

Введение

В последние десятилетия теория термоупругости получила существенное развитие в связи с важными проблемами, возникающими при проектировании ответственных инженерных конструкций и сооружений современной техники. В различных ее областях: авиационной, ракетной, судостроительной, энергетическом и химическом машиностроении и т. д. – широко используются тонкостенные элементы конструкций типа слоистых композитных оболочек и пластин. Во многих случаях – в энергетических установках, реактивных двигателях аэрокосмической техники и т. д. – такие несущие тонкостенные элементы работают в условиях высокотемпературного неравномерного нестационарного нагрева, приводящего к возникновению тепловых напряжений, знание величины и

характера которых необходимо для всестороннего анализа несущей способности конструкции.

В этой связи первостепенное значение приобретает проблема корректного построения эффективных теплофизических характеристик армированной среды.

При выводе определяющих уравнений термоупругого поведения армированного слоя предполагают, что температура в связующем и армирующих элементах в пределах представительного элемента армированного слоя одинакова, например [1; 2; 6]. Однако вопрос о том, как быстро выравнивается температура в пределах представительного элемента армированного слоя при тепловом нагружении композитного материала волокнистой структуры, остается открытым. Исследованию данного вопроса посвящена настоящая работа.

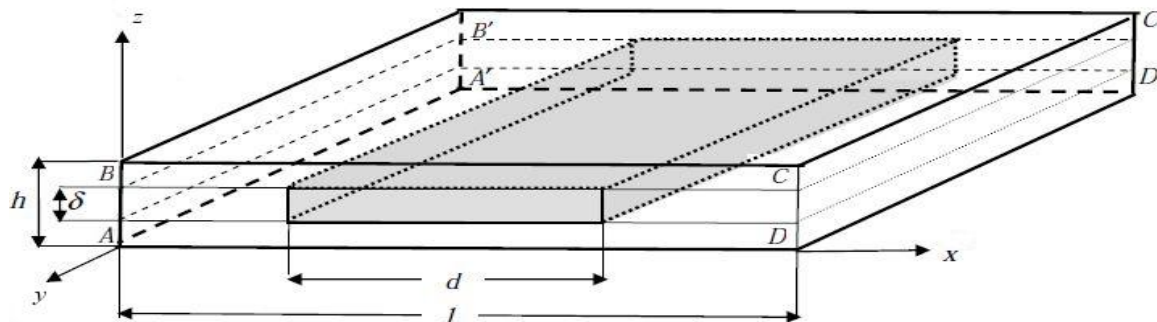


Рис. 1. Представительный элемент армированного слоя

Рассматривая модель однонаправленно-армированного слоя, описанную в [1; 2], в качестве представительного элемента однонаправленно-армированного слоя будем рассматривать параллелепипед $ABCDD'C'B'A'$ (рис. 1). На рис. 1 заштрихованной области соответствует армирующее волокно.

В настоящей работе, также как и в [1; 2], при построении математической модели принимается допущение о прямоугольной форме сечения армирующих волокон.

Для получения численных оценок в качестве композитных материалов будут рассматриваться стеклопластики.

Стеклопластики – композитные материалы, в которых армирующим волокном выступает стекловолокно, а связующим – высокотемпературные пластики (полиимид, полиэфирсульфон, полисульфон и другие) [5; 9; 10].

Существующие в настоящее время значения параметров формирования композитных материалов таковы: характерный диаметр нити стекловолокна порядка 13 мкм [10], массовая доля (V_m) стекловолокна в композите составляет 15 – 50 % [10]. Отсюда следуют характерные размеры представительного элемента (достаточно малого элемента, чтобы нельзя было рассматривать его как квазиоднородную среду) композитного материала.

Физико-механические характеристики (плотность, теплопроводность, теплоемкость) рассматриваемых материалов представлены в таблице 1 [10; 11; 12; 13].

К решению задачи подойдем в результате нескольких итераций: сначала рассмотрим модельные одно- и двумерные задачи, а затем основную задачу в трехмерной постановке.

Таблица 1

Физико-механические характеристика материалов

	Плотность, $\frac{кг}{м^3}$	Теплоемкость, $\frac{Дж}{кг \times C^\circ}$	Теплопроводность, $\frac{Вт}{м \times C^\circ}$
Стекловолокно	2550	800	1,2
Полиимид	1420	1090	0,12
Полиэфирсульфон	1370	1100	0,18
Полисульфон	1240	1100	0,26

1. Одномерная задача

Постановка задачи

Задача в одномерной постановке является модельной и ее можно рассматривать в качестве первого приближения.

Пусть $G = \{0 < x < l_x\}$ – отрезок длиной l_x , $\Gamma = \{x = 0\} \cup \{x = l_x\}$ – его граница. Тогда $\bar{G} = G + \Gamma$ (рисунок 2). Также введем следующие области:

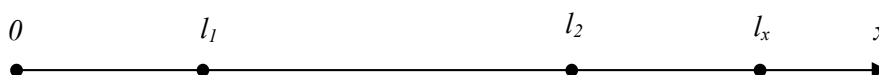


Рис. 2. Одномерная постановка задачи

$$G_1 = \{0 < x < l_1\} \cup \{l_2 < x < l_x\},$$

$$G_2 = \{l_1 < x < l_2\},$$

$$\Gamma_1 = \{x = l_1\}, \Gamma_2 = \{x = l_2\}.$$

Тогда $G^* = G_1 + G_2$,

$$G = G_1 + G_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Рассматривается одномерное уравнение теплопроводности на отрезке, составленном из трех отрезков с различными теплофизическими характеристиками [4, с. 17 – 21]:

$$\rho C \frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u, \quad x \in G^*, t \in (0, T],$$

$$L_1 u = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность, C – удельная теплоемкость. Параметры λ, ρ, C терпят разрывы на границах раздела фаз (области Γ_1, Γ_2):

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1; & x \in G_1 \\ \lambda_2; & x \in G_2 \end{cases};$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_1; & x \in G_1 \\ \rho_2; & x \in G_2 \end{cases};$$

$$C = \begin{cases} C_1; & x \in G_1 \\ C_2; & x \in G_2 \end{cases}.$$

На границах раздела фаз задаются условия идеального теплового контакта:

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{при } x \in \Gamma_1,$$

$$\lim_{x \rightarrow l_1 - 0} u = \lim_{x \rightarrow l_1 + 0} u;$$

$$\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{при } x \in \Gamma_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow l_2 - 0} u = \lim_{x \rightarrow l_2 + 0} u.$$

Начальные и граничные условия задаются в следующем виде:

$$u|_{t=0} = u(x, y, 0) = T_0, \quad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma} = u(0, t) = u(l_x, t) = T_0 + \left(1 - \frac{1}{(1+10^5 t)^5}\right) T_1. \quad (1.2)$$

Подобный выбор граничного условия (1.2) позволяет удовлетворить начальному условию (1.1).

Ставится задача определить поле температур в области G и, в частности, рассчитать время T выравнивания температуры в области G .

Метод решения

Зададим N_x – число разбиений по пространственной координате x . В области \bar{G} построим равномерную сетку ω_{h_x} с шагами $h = l_x / N_x$.

$$\omega_{h_x} = \{(x_i), x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x\}.$$

Дифференциальный оператор $L_1 u$ аппроксимируем следующим разностным оператором [3, с. 381]:

$$\Lambda_1 u_i = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \chi_{i-1/2} (u_{i-1} - u_i) - \\ -\chi_{i+1/2} (u_i - u_{i+1}) \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Здесь $\chi_{i-1/2}, \chi_{i+1/2}$ – разностные коэффициенты теплопроводности. Так как коэффициент теплопроводности λ непрерывен в G^* всюду, кроме точек разрыва, то положим:

$$\chi_{i+1/2} = \lambda_{i+1/2} = \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{2}.$$

$\chi_{i-1/2}$ определяется аналогично. Под узловыми значениями разрывных величин надо понимать соответствующие односторонние пределы [3, с. 382].

Производную по времени аппроксимируем следующим разностным выражением [7, с. 18]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau}.$$

Пусть τ – шаг по времени, тогда $t_k = k\tau$ – точки разбиения по времени. Будем считать, что $u_i^k \approx u(x_i, t_k)$.

Для решения разностной задачи используем разностную схему, которая при использовании разностных операторов вида (1.3) называется «наилучшей» схемой [3, с. 380 – 384; 7, с. 185 – 201; 8, с. 385 – 389]. Данная схема позволяет удовлетворить условиям идеального теплового контакта, она абсолютно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации по временной и пространственным координатам даже в случае разрывного коэффициента теплопроводности:

$$O(\tau^2 + h^2) \quad [3, с. 382 – 384; 8, с. 388].$$

$$\rho_i C_i \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \Lambda_1 u_i^{k+1},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1. \quad (1.4)$$

Здесь ρ_i, C_i – значения плотности и теплоемкости в соответствующих узлах сетки. В точках разрыва их значения определяются по формулам:

$$\rho_i = \frac{\rho_{i+1} + \rho_{i-1}}{2}, \quad C_i = \frac{C_{i+1} + C_{i-1}}{2}.$$

Сетка строится таким образом, чтобы точки разрыва приходились на узлы сетки ω_{h_x} .

Обозначим:

$$\mu^k = T_0 + \left(1 - \frac{1}{(1 + 10^5 k \tau)^5}\right) T_1.$$

Граничные условия получаются из (1.2):

$$\begin{cases} u_0^{k+1} = \mu^{k+1} \\ u_{N_x}^{k+1} = \mu^{k+1}. \end{cases} \quad (1.5)$$

На каждом временном шаге получается система $N_x - 1$ линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Вид этой системы может быть легко получен путем анализа выражений (1.4) – (1.5). Система решается методом прогонки [8, с. 35 – 38]. Численное интегрирование ведется пока не будет выполнено условие остановки итерационного процесса.

Численные результаты

Введем линейную интенсивность армирования (рисунок 2):

$$w = \frac{l_2 - l_1}{l_x}.$$

Можно показать, что зависимость интенсивности армирования w от массовой доли армирующего волокна V_m выражается в следующем виде:

$$w = \frac{V_m \rho_c}{\rho_a + V_m (\rho_c - \rho_a)}.$$

Здесь ρ_c, ρ_a – плотность связующего и армирующего соответственно.

В таблицах 1 – 3 представлено характерное время выравнивания температуры в области G в зависимости от используемого связующего и массовой доли стекловолокна в композите. Здесь области G_1 соответствует связующее, а области G_2 – армирующее стекловолокно.

В качестве критерия остановки процесса принималось условие:

$$dT = \left| \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} (u_i^k - u|_{\Gamma}) \right| < \varepsilon.$$

Расчёты проводились при следующих начальных и граничных условиях: $T_1 = 100C^\circ$, $T_0 = 0C^\circ$, $\varepsilon = 10^{-7}$. Число узлов сетки $N_x = 100$, шаг по времени $\tau = 10^{-6}$ с. Таким образом $\tau \sim h$, что хорошо согласуется с литературой [3; 8].

Из таблиц видно, что время, за которое выравнивается температура в связующем и армирующем волокне, мал по сравнению с характерным временем эксплуатации конструкций. Также видно, что при увеличении объемной доли стекловолокна в композиционном материале характерное время выравнивания температуры заметно уменьшается. Это объясняется тем, что при сравнимой плотности и теплоемкости теплопроводность стекла намного больше, чем у пластиков, выступающих связующим.

Связующее полиимид

V_m	$l, 10^{-6} м$	$l_2 - l_1, 10^{-6} м$	$w = \frac{d}{l}$	$T, 10^{-3} с.$
0,15	145	13	0,09	385,8
0,3	67	13	0,19	81,7
0,4	48	13	0,27	41,2
0,5	36	13	0,36	22,2

Таблица 2

Связующее полиэфирсульфон

V_m	$l, 10^{-6} м$	$l_2 - l_1, 10^{-6} м$	$w = \frac{d}{l}$	$T, 10^{-3} с.$
0,15	150	13	0,09	268
0,3	69	13	0,19	56,3
0,4	49	13	0,26	27,9
0,5	37	13	0,35	15,5

Таблица 3

Связующее полисульфон

V_m	$l, 10^{-6} м$	$l_2 - l_1, 10^{-6} м$	$w = \frac{d}{l}$	$T, 10^{-3} с.$
0,15	164	13	0,08	200,8
0,3	75	13	0,17	41,7
0,4	53	13	0,24	20,6
0,5	40	13	0,33	11,5

2. Двумерная задача

Постановка задачи

Задача в двумерной постановке также является модельной. Ее можно рассматривать как следующий шаг на пути к рассмотрению задачи в трехмерной постановке.

Пусть $G = \{0 < x < l_x; 0 < z < l_z\}$ – прямоугольник со сторонами l_x, l_z .

$$\Gamma = \{x = 0;$$

$$0 \leq z \leq l_z\} \cup \{x = l_x; 0 \leq z \leq l_z\} \cup$$

$$\{0 < x < l_x; z = 0\} \cup$$

$$\{0 < x < l_x; z = l_z\}$$

его граница. Тогда $\bar{G} = G + \Gamma$ (рисунок 3).

Прямоугольник \bar{G} представляет собой проекцию параллелепипеда $ABCDD'C'B'A'$ (рисунок 1) на плоскость Oxz .

Также введем следующие области:

$$G_1 = \{0 < x < l_x^1; 0 < z < l_z\} \cup$$

$$\{l_x^2 < x < l_x; 0 < z < l_z\} \cup$$

$$\{l_x^1 \leq x \leq l_x^2; 0 < z < l_z^1\} \cup$$

$$\{l_x^1 \leq x \leq l_x^2; l_z^2 < z < l_z\},$$

$$G_2 = \{l_x^1 < x < l_x^2; l_z^1 < z < l_z^2\},$$

$$\Gamma_1 = \{l_x^1 \leq x \leq l_x^2; z = l_z^1\},$$

$$\Gamma_2 = \{l_x^1 \leq x \leq l_x^2; z = l_z^2\},$$

$$\Gamma_3 = \{x = l_x^1; l_z^1 < z < l_z^2\},$$

$$\Gamma_4 = \{x = l_x^2; l_z^1 < z < l_z^2\}.$$

Тогда $G^* = G_1 + G_2$,

$$\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4, \quad G = G^* + \Gamma^*.$$

Рассматривается двумерное уравнение теплопроводности в плоской области, составленной из двух областей (G_1, G_2) с различными теплофизическими характеристиками [4, с. 17 – 21]:

$$\rho C \frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u + L_2 u, \quad x, z \in G^*, t \in (0, T];$$

$$L_1 u = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad L_2 u = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

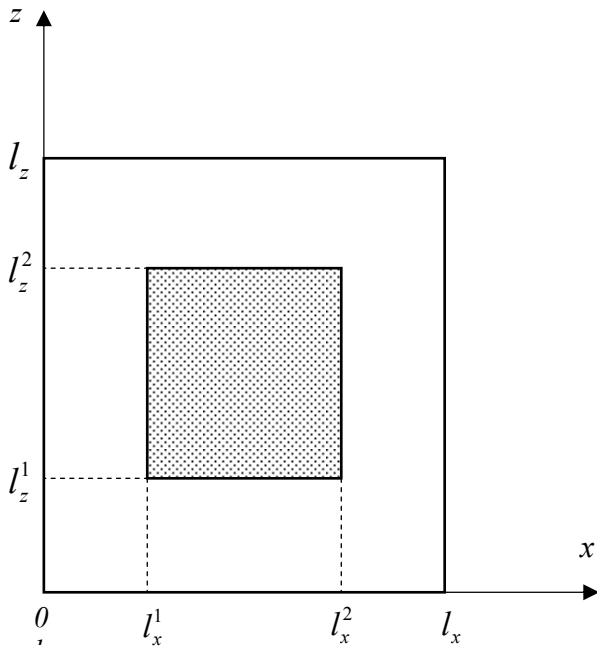


Рис. 3. Двумерная постановка задачи

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность, C – удельная теплоемкость. Параметры λ, ρ, C терпят разрывы на границах раздела фаз (области $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$):

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1; & (x, z) \in G_1 \\ \lambda_2; & (x, z) \in G_2 \end{cases};$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_1; & (x, z) \in G_1 \\ \rho_2; & (x, z) \in G_2 \end{cases};$$

$$C = \begin{cases} C_1; & (x, z) \in G_1 \\ C_2; & (x, z) \in G_2 \end{cases}.$$

На границах раздела фаз ставятся условия идеального теплового контакта:

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{при } x, z \in \Gamma^*,$$

$$\lim_{x, z \rightarrow \Gamma^*-0} u = \lim_{x, z \rightarrow \Gamma^*+0} u.$$

Начальные и граничные условия задаются в виде:

$$u|_{t=0} = u(x, z, 0) = T_0, \quad (2.1)$$

$$u|_{\Gamma} = T_0 + \left(1 - \frac{1}{(1+10^5 t)^5}\right) T_1. \quad (2.2)$$

Подобный выбор граничного условия (2.2) позволяет удовлетворить начальному условию (2.1).

Ставится задача определить поле температур в области G и, в частности, рассчитать время T выравнивания температуры в области G .

Метод решения

Зададим N_x, N_z – число разбиений по пространственным координатам x, y . В области \bar{G} построим равномерную сетку ω_{h_x, h_z} с шагами

$$h_x = \frac{l_x}{N_x}, \quad h_z = \frac{l_z}{N_z};$$

$$\omega_{h_x, h_z} = \left\{ (x_i, z_j), \quad x_i = ih_x, \quad y_j = jh_z, \quad \left. \begin{matrix} 0 \leq i \leq N_x, \\ 0 \leq j \leq N_z \end{matrix} \right\} \right\}.$$

Дифференциальные операторы $L_1 u, L_2 u$ аппроксимируем следующими разностными операторами [3, с. 394]:

$$\Lambda_1 u_{i,j} = \frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} \chi_{i-1/2,j} (u_{i-1,j} - u_{i,j}) - \\ -\chi_{i+1/2,j} (u_{i,j} - u_{i+1,j}) \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_2 u_{i,j} = \frac{1}{h_z^2} \begin{pmatrix} \chi_{i,j-1/2} (u_{i,j-1} - u_{i,j}) - \\ -\chi_{i,j+1/2} (u_{i,j} - u_{i,j+1}) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\chi_{i,j}$ – разностный коэффициент теплопроводности. Так как коэффициент теплопроводности λ непрерывен в G^* всюду, кроме линий разрыва Γ^* , то положим:

$$\chi_{i+1/2,j} = \lambda_{i+1/2,j} = \frac{\lambda_{i,j} + \lambda_{i+1,j}}{2}.$$

$\chi_{i-1/2,j}, \chi_{i,j-1/2}, \chi_{i,j+1/2}$ определяются аналогично. Под узловыми значениями разрывных величин

надо понимать соответствующие односторонние пределы [3, с. 382].

Производную по времени аппроксимируем следующим разностным выражением [7, с. 18]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau}.$$

Пусть τ – шаг по времени, тогда $t_k = k\tau$ – точки разбиения по времени. Будем считать, что:

$$u_{i,j}^k \approx u(x_i, z_j, t_k).$$

Для решения разностной задачи воспользуемся схемой переменных направлений, состоящей из двух шагов [3, с. 391 – 394]. Данная схема имеет второй порядок аппроксимации по временной и пространственным координатам $O(\tau^2 + h^2)$.

$$\rho_{i,j} C_{i,j} \frac{u_{i,j}^{k+0.5} - u_{i,j}^k}{0.5\tau} = \Lambda_1 u_{i,j}^{k+0.5} + \Lambda_2 u_{i,j}^k, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1; \quad (2.3)$$

$$\rho_{i,j} C_{i,j} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+0.5}}{0.5\tau} = \Lambda_1 u_{i,j}^{k+1} + \Lambda_2 u_{i,j}^{k+0.5}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1. \quad (2.4)$$

Здесь $\rho_{i,j}$, $C_{i,j}$ – значения плотности и теплоемкости в соответствующих узлах сетки соответственно. На линиях разрыва их значения определяются по формулам:

$$\rho_{i,j} = \frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \text{ или } \rho_{i,j} = \frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j-1}}{2}$$

в зависимости от того по какой переменной выполняется прогонка. $C_{i,j}$ на линиях разрыва определяется аналогично.

Первая прогонка явная по z и неявная по x . Вторая прогонка явная по x и неявная по z .

Сетка строится таким образом, чтобы точки разрыва приходились на узлы сетки ω_{h_x, h_z} .

Обозначим:

$$\mu^k = T_0 + \left(1 - \frac{1}{(1 + 10^5 k \tau)^5}\right) T_1.$$

Граничные условия получаются из (2.2):

$$\begin{cases} u_{0,j}^{k+0.5} = \frac{1}{2}(\mu^{k+1} + \mu^k) - \\ - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (\mu^{k+1} + \mu^k), \quad 1 \leq j \leq N_z - 1 \\ u_{N_x,j}^{k+0.5} = \frac{1}{2}(\mu^{k+1} + \mu^k) - \\ - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (\mu^{k+1} + \mu^k), \quad 1 \leq j \leq N_z - 1 \end{cases}; \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} u_{i,0}^{k+1} = \mu^{k+1}, \quad 0 \leq i \leq N_x \\ u_{i,N_z}^{k+1} = \mu^{k+1}, \quad 0 \leq i \leq N_x. \end{cases} \quad (2.6)$$

Граничное условие (2.5) записывается в таком виде, чтобы компенсировать погрешность на промежуточном временном слое и обеспечить второй порядок точности по временной координате $O(\tau^2)$ [3, с. 393].

Для перехода на полуцелый временной слой ($u^k \rightarrow u^{k+0.5}$) решается последовательность $N_z - 1$ систем, состоящих из $N_x - 1$ линейных алгебраических уравнений (2.3), (2.5) с трехдиагональными матрицами. Для перехода на новый временной слой ($u^{k+0.5} \rightarrow u^{k+1}$) решается последовательность $N_x - 1$ систем, состоящих из $N_z - 1$ линейных алгебраических уравнений (2.4), (2.6) с трехдиагональными матрицами. СЛАУ решается методом прогонки [8, с. 35 – 38]. Численное интегрирование ведется, пока не будет выполнено условие остановки итерационного процесса.

Численные результаты

Введем линейные интенсивности армирования в направлении осей Ox , Oz (рисунок 3):

$$w_x = \frac{l_x^1 - l_x^2}{l_x}, \quad w_z = \frac{l_z^1 - l_z^2}{l_z}.$$

Примем допущение, что $w_x = w_z$.

Можно показать, что с учетом принятого выше допущения зависимость линейных интенсивностей армирования w_x , w_z от массовой доли армирующего волокна V_m выражается в следующем виде:

$$w_x = w_z = \sqrt{\frac{V_m \rho_c}{\rho_a + V_m (\rho_c - \rho_a)}}. \quad (2.7)$$

Здесь ρ_c , ρ_a – плотность связующего и армирующего соответственно.

Ниже в таблицах 6 – 8 представлены численные данные, позволяющие судить о характерном времени выравнивания температуры в области G в зависимости от использующегося связующего и массовой доли стекловолокна в композите. Здесь области G_1 соответствует связующее, а области G_2 – армирующее стекловолокно.

Также введем следующие обозначения:

$$d_x = l_x^1 - l_x^2, \quad d_z = l_z^1 - l_z^2.$$

Расчёты проводились при следующих начальных и граничных условиях: $T_1 = 100^\circ$, $T_0 = 0^\circ$, $\varepsilon = 10^{-7}$.

В качестве критерия остановки процесса принималось условие:

$$dT = \left| \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq j \leq N_z - 1}} (u_{i,j}^k - u |_\Gamma) \right| < \varepsilon.$$

Число разбиений $N_x = N_z = 100$, шаг по времени $\tau = 10^{-6}$ с. Таким образом $\tau \sim h$, что согласуется с [3; 8].

Таблица 6

Связующее полиимид

Vm	$l_x,$ $10^{-6} м.$	$l_z,$ $10^{-6} м.$	$dx, 10^{-6} м.$	$dz, 10^{-6} м.$	w_x	w_z	$T,$ $10^{-3} с.$
0,15	43	43	13	13	0,3	0,3	27,237
0,3	30	30	13	13	0,44	0,44	13,045
0,4	25	25	13	13	0,52	0,52	8,670
0,5	22	22	13	13	0,6	0,6	6,219

Таблица 7

Связующее полиэфирсульфон

Vm	$l_x,$ $10^{-6} м.$	$l_z,$ $10^{-6} м.$	$dx, 10^{-6} м.$	$dz, 10^{-6} м.$	w_x	w_z	$T,$ $10^{-3} с.$
0,15	44	44	13	13	0,28	0,28	18,674
0,3	30	30	13	13	0,43	0,43	8,713
0,4	25	25	13	13	0,51	0,51	5,875
0,5	22	22	13	13	0,59	0,59	4,289

Таблица 8

Связующее полисульфон

Vm	$l_x,$ $10^{-6} м.$	$l_z,$ $10^{-6} м.$	$dx, 10^{-6} м.$	$dz, 10^{-6} м.$	w_x	w_z	$T,$ $10^{-3} с.$
0,15	46	46	13	13	0,28	0,28	13,294
0,3	31	31	13	13	0,42	0,42	6,234
0,4	26	26	13	13	0,49	0,49	4,353
0,5	23	23	13	13	0,57	0,57	3,292

Из таблиц видно, что время, за которое выравняется температура (порядка миллисекунд), малó по сравнению с характерным временем эксплуатации конструкций. Также видно, что при увеличении объемной доли стекловолокна в композиционном материале характерное время выравнивания температуры заметно уменьшается. Это объясняется тем, что при сравнимой плотности и теплоемкости теплопроводность стекла намного больше, чем у пластиков, выступающих связующим.

3. Трехмерная задача

Постановка задачи

Заключительным шагом обобщения является задача в трехмерной постановке.

Пусть $G = \{0 < x < l_x; 0 < y < l_y; 0 < z < l_z\}$

параллелепипед со сторонами l_x, l_y, l_z .

$$\Gamma = \{x = 0; 0 \leq y \leq l_y; 0 \leq z \leq l_z\} \cup$$

$$\{x = l_x; 0 \leq y \leq l_y; 0 \leq z \leq l_z\} \cup$$

$$\{0 < x < l_x; y = 0; 0 < z < l_z\} \cup$$

$$\{0 < x < l_x; y = l_y; 0 < z < l_z\} \cup$$

$$\{0 < x < l_x; 0 < y < l_y; z = 0\} \cup$$

$$\{0 < x < l_x; 0 < y < l_y; z = l_z\}$$

– его граница.

Тогда $\bar{G} = G + \Gamma$ (рисунок 4).

Также введем следующие области:

$$G_1 = \{0 < x < l_x^1; 0 < y < l_y; 0 < z < l_z\} \cup$$

$$\{l_x^2 < x < l_x; 0 < y < l_y; 0 < z < l_z\} \cup$$

$$\{l_x^1 \leq x \leq l_x^2; 0 < y < l_y; 0 < z < l_z\} \cup$$

$$\{l_x^1 \leq x \leq l_x^2; l_y^2 < y < l_y; 0 < z < l_z\},$$

$$G_2 = \{l_x^1 < x < l_x^2; l_y^1 < y < l_y^2; 0 < z < l_z\},$$

$$\Gamma_1 = \{l_x^1 \leq x \leq l_x^2; y = l_y^1; 0 < z < l_z\},$$

$$\Gamma_2 = \{l_x^1 \leq x \leq l_x^2; y = l_y^2; 0 < z < l_z\},$$

$$\Gamma_3 = \{x = l_x^1; l_y^1 < y < l_y^2; 0 < z < l_z\},$$

$$\Gamma_4 = \{x = l_x^1; l_y^1 < y < l_y^2; 0 < z < l_z\}.$$

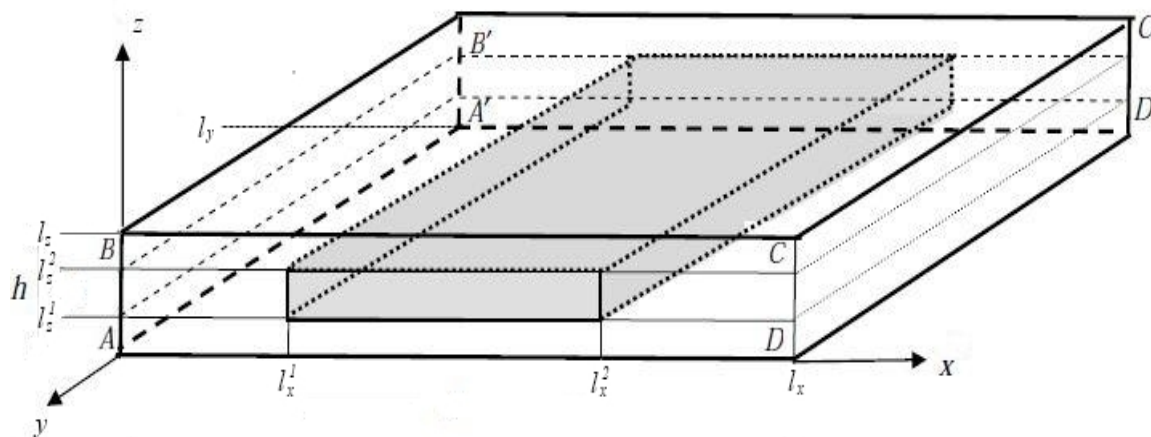


Рис. 4. Трехмерная постановка задачи

Тогда $G^* = G_1 + G_2$,

$\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, $G = G^* + \Gamma^*$.

Рассматривается трехмерное уравнение теплопроводности в области, составленной из двух областей (G_1, G_2) с различными теплофизическими характеристиками.

$$\rho C \frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u + L_2 u + L_3 u,$$

$x, y, z \in G^*, t \in (0, T]$;

$$L_1 u = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; L_2 u = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; L_3 u = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность, C – удельная теплоемкость. Параметры λ, ρ, C терпят разрывы на границах раздела фаз (области $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$):

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1; & (x, y, z) \in G_1; \\ \lambda_2; & (x, y, z) \in G_2; \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_1; & (x, y, z) \in G_1; \\ \rho_2; & (x, y, z) \in G_2; \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} C_1; & (x, y, z) \in G_1; \\ C_2; & (x, y, z) \in G_2. \end{cases}$$

На границах раздела фаз ставятся условия идеального теплового контакта:

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial n} \text{ при } x, y, z \in \Gamma^*,$$

$$\lim_{x,y,z \rightarrow \Gamma^*-0} u = \lim_{x,y,z \rightarrow \Gamma^*+0} u;$$

Граничные и начальные условия задаются в виде:

$$u|_{t=0} = u(x, y, 0) = T_0, \tag{3.1}$$

$$u|_{\Gamma} = T_0 + \left(1 - \frac{1}{(1+10^5 t)^5}\right) T_1. \tag{3.2}$$

Подобный выбор граничного условия (3.2) позволяет удовлетворить начальному условию (3.1).

Ставится задача определить поле температур в области G и, в частности, рассчитать время T выравнивания температуры в области G .

Метод решения

Зададим N_x, N_y, N_z – число разбиений по пространственным координатам x, y, z . В области \bar{G} построим равномерную сетку ω_{h_x, h_y, h_z} с шагами

$$h_x = \frac{l_x}{N_x}, h_y = \frac{l_y}{N_y}, h_z = \frac{l_z}{N_z};$$

$$\omega_{h_x, h_y, h_z} = \left\{ \begin{array}{l} (x_i, y_j, z_s), \quad x_i = ih_x, \\ y_j = jh_y, \quad z_s = sh_z, \\ 0 \leq i \leq N_x, \quad 0 \leq j \leq N_y, \\ 0 \leq s \leq N_z \end{array} \right\}.$$

Дифференциальные операторы $L_1 u, L_2 u, L_3 u$ аппроксимируем следующими разностными операторами [3, с. 397 – 398]:

$$\Lambda_1 u_{i,j,s} = \frac{1}{h_x^2} \left(\chi_{i-1/2,j,s} (u_{i-1,j,s} - u_{i,j,s}) - \chi_{i+1/2,j,s} (u_{i,j,s} - u_{i+1,j,s}) \right);$$

$$\Lambda_2 u_{i,j,s} = \frac{1}{h_y^2} \left(\chi_{i,j-1/2,s} (u_{i,j-1,s} - u_{i,j,s}) - \chi_{i,j+1/2,s} (u_{i,j,s} - u_{i,j+1,s}) \right);$$

$$\Lambda_3 u_{i,j,s} = \frac{1}{h_z^2} \left(\chi_{i,j,s-1/2} (u_{i,j,s-1} - u_{i,j,s}) - \chi_{i,j,s+1/2} (u_{i,j,s} - u_{i,j,s+1}) \right).$$

Здесь $\chi_{i,j,s}$ – разностный коэффициент теплопроводности. Так как коэффициент теплопроводности λ

непрерывен в G^* всюду, кроме поверхностей разрыва фаз композита Γ^* , то положим:

$$\chi_{i+1/2,j,s} = \lambda_{i+1/2,j,s} = \frac{\lambda_{i,j,s} + \lambda_{i+1,j,s}}{2}.$$

$$\chi_{i-1/2,j,s}, \quad \chi_{i,j-1/2,s}, \quad \chi_{i,j+1/2,s}, \quad \chi_{i,j,s-1/2},$$

$\chi_{i,j,s+1/2}$ определяются аналогично. Под узловыми значениями разрывных величин надо понимать соответствующие односторонние пределы [3, с. 382].

Производную по времени аппроксимируем следующим разностным оператором [7, с. 18]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j,s}^{k+1} - u_{i,j,s}^k}{\tau}.$$

Пусть τ – шаг по времени, тогда $t_k = k\tau$ – точки разбиения по времени. Будем считать, что $u_{i,j,s}^k \approx u(x_i, y_j, z_s, t_k)$.

Для решения разностной задачи воспользуемся локально-одномерной схемой [3, с. 394 – 398]. Данная схема состоит из трех шагов.

$$\rho_{i,j,s} C_{i,j,s} \frac{u_{i,j,s}^{k+1/3} - u_{i,j,s}^k}{\tau} = \Lambda_1 u_{i,j,s}^{k+1/3}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1; \quad (3.3)$$

$$\rho_{i,j,s} C_{i,j,s} \frac{u_{i,j,s}^{k+2/3} - u_{i,j,s}^{k+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 u_{i,j,s}^{k+2/3}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1; \quad (3.4)$$

$$\rho_{i,j,s} C_{i,j,s} \frac{u_{i,j,s}^{k+1} - u_{i,j,s}^{k+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 u_{i,j,s}^{k+1}, \quad 1 \leq s \leq N_z - 1. \quad (3.5)$$

Здесь $\rho_{i,j,s}, C_{i,j,s}$ – значения плотности и теплоемкости в соответствующих узлах сетки соответственно. На поверхностях разрыва их значения определяются по формулам:

$$\rho_{i,j,s} = \frac{\rho_{i+1,j,s} + \rho_{i-1,j,s}}{2},$$

$$\rho_{i,j,s} = \frac{\rho_{i,j+1,s} + \rho_{i,j-1,s}}{2},$$

$$\rho_{i,j,s} = \frac{\rho_{i,j,s+1} + \rho_{i,j,s-1}}{2}$$

в зависимости от того по какой переменной выполняются прогонка. $C_{i,j,s}$ на поверхностях разрыва определяется аналогично.

Сетка строится таким образом, чтобы точки разрыва приходились на узлы сетки ω_{h_x, h_y, h_z} .

Обозначим:

$$\mu^k = T_0 + \left(1 - \frac{1}{(1 + 10^5 k \tau)^5} \right) T_1.$$

Граничные условия получаются из (3.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,0,s}^{k+1} = \mu^{k+1}, 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq s \leq N_z \\ u_{i,N_y,s}^{k+1} = \mu^{k+1}, 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq s \leq N_z \\ u_{0,j,s}^{k+1} = \mu^{k+1}, 1 \leq j \leq N_y - 1, 0 \leq s \leq N_z \\ u_{N_x,j,s}^{k+1} = \mu^{k+1}, 1 \leq j \leq N_y - 1, 0 \leq s \leq N_z \\ u_{i,j,0}^{k+1} = \mu^{k+1}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1 \\ u_{i,j,N_z}^{k+1} = \mu^{k+1}, 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Для перехода на промежуточный временной слой $u^k \rightarrow u^{k+\frac{1}{3}}$ решается последовательность $(N_y - 1) \times (N_z - 1)$ систем, состоящих из $N_x - 1$ линейных алгебраических уравнений (3.3), (3.6) с трехдиагональными матрицами.

Для перехода на промежуточный временной слой $u^{k+\frac{1}{3}} \rightarrow u^{k+\frac{2}{3}}$ решается последовательность $(N_x - 1) \times (N_z - 1)$ систем, состоящих из $N_y - 1$ линейных алгебраических уравнений (3.4), (3.6) с трехдиагональными матрицами.

Для перехода на новый временной слой

$$u^{k+\frac{2}{3}} \rightarrow u^{k+1}$$

решается последовательность $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$ систем, состоящих из $N_z - 1$ линейных алгебраических уравнений (3.5), (3.6) с трехдиагональными матрицами. СЛАУ решается методом прогонки [8, с. 35 – 38].

Численные результаты

Введем линейные интенсивности армирования в направлении осей Ox, Oz (рисунок 4):

$$w_x = \frac{l_x^1 - l_x^2}{l_x}, \quad w_z = \frac{l_z^1 - l_z^2}{l_z}.$$

Примем допущение, что $w_x = w_z$.

Можно показать, что зависимость интенсивности армирования w от массовой доли армирующего волокна V_m выражается в формулой (2.7).

Ниже в таблицах 9 – 11 представлены численные данные, позволяющие судить о характерном времени выравнивания температуры в области G , в зависимости от используемого связующего и массовой доли стекловолокна в композите. Здесь области G_1 соответствует связующее, а области G_2 – армирующее стекловолокно.

В качестве критерия остановки процесса принималось условие:

$$d\Gamma = \left| \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq j \leq N_y - 1 \\ 1 \leq s \leq N_z - 1}} (u_{i,j,s}^k - u|_{\Gamma}) \right| < \varepsilon.$$

Расчёты проводились при следующих начальных и граничных условиях: $T_1 = 100C^\circ$, $T_0 = 0C^\circ$, $\varepsilon = 10^{-7}$.

Число разбиений $N_x = N_y = N_z = 50$, шаг по времени $\tau = 10^{-6}$ с.

Таким образом $\tau \sim h$, что согласуется с [3; 8].

V_m – объемная доля стекловолокна в композите.

Из таблиц видно, что время, за которое выравнивается температура (порядка миллисекунд), мало по сравнению с характерным временем эксплуатации конструкций. Также видно, что при увеличении объемной доли стекловолокна в композиционном материале характерное время выравнивания температуры заметно уменьшается. Это объясняется тем, что при сравнимой плотности и теплоемкости теплопроводность стекла намного больше, чем у пластиков, выступающих связующим.

Таблица 9

Связующее полиимид

V_m	$l_x,$ 10-6 м.	$l_y,$ 10-6 м.	$l_z,$ 10-6 м.	$d_x = l_x^1 - l_x^2,$ 10-6 м.	$d_y = l_y^1 - l_y^2,$ 10-6 м.	$w = \frac{d}{l}$	$w_y = \frac{d_y}{l_y}$	$T,$ 10-3 с.
0,15	43	43	43	13	13	0,3	0,3	11,05
0,3	30	30	30	13	13	0,44	0,44	4,02
0,4	25	25	25	13	13	0,52	0,52	2,451
0,5	22	22	22	13	13	0,6	0,6	1,69

Таблица 10

Связующее полиэфирсульфон

V_m	$l_x,$ 10-6 м.	$l_y,$ 10-6 м.	$l_z,$ 10-6 м.	$d_x = l_x^1 - l_x^2,$ 10-6 м.	$d_y = l_y^1 - l_y^2,$ 10-6 м.	$w = \frac{d}{l}$	$w_y = \frac{d_y}{l_y}$	$T,$ 10-3 с.
0,15	44	44	44	13	13	0,28	0,28	8,598
0,3	30	30	30	13	13	0,43	0,43	3,23
0,4	25	25	25	13	13	0,51	0,51	2,04
0,5	22	22	22	13	13	0,59	0,59	1,446

Таблица 11

Связующее полисульфон

V_m	$l_x,$ 10-6 м.	$l_y,$ 10-6 м.	$l_z,$ 10-6 м.	$d_x = l_x^1 - l_x^2,$ 10-6 м.	$d_y = l_y^1 - l_y^2,$ 10-6 м.	$w = \frac{d}{l}$	$w_y = \frac{d_y}{l_y}$	$T,$ 10-3 с.
0,15	46	46	46	13	13	0,28	0,28	6,782
0,3	31	31	31	13	13	0,42	0,42	2,804
0,4	26	26	26	13	13	0,49	0,49	1,857
0,5	23	23	23	13	13	0,57	0,57	1,369

Достоверность результатов

В этом разделе предпринимается попытка оценить достоверность полученных результатов.

Последовательность сеток

Для одномерной задачи была построена последовательность сеток. Было исследовано поведение решения задачи в зависимости от числа разбиений N_x . При этом остальные параметры задачи были зафиксированы.

Расчёты проводились при следующих начальных и граничных условиях: $T_1 = 100C^\circ$, $T_0 = 0C^\circ$, $\varepsilon = 10^{-7}$. В качестве критерия остановки процесса принималось условие:

$$dT = \left| \max_{1 \leq i \leq N_x - 1} (u_i^{k+1} - u_i^k) \right| < \varepsilon.$$

Шаг по времени $\tau = 10^{-6}$ с.

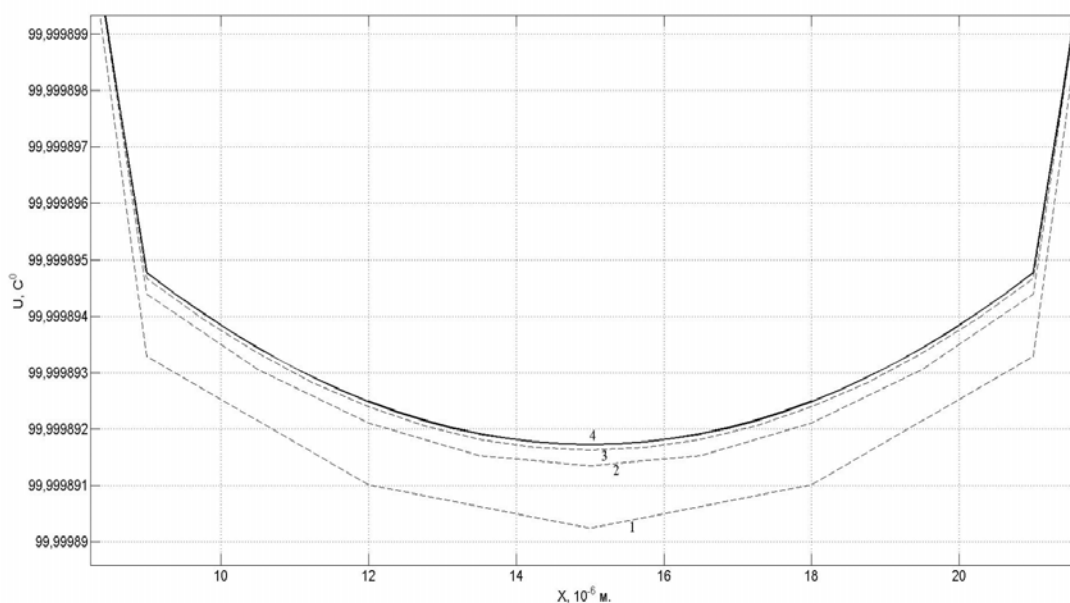


Рис. 5. Профиль графика температуры в случае одномерной задачи

Интенсивность армирования была принята $w = 0,4$. $l_x = 30 \times 10^{-6}$. Это соответствует массовой доли армирующего волокна $V_m = 0,3$ для композиции, составленной из стекловолокна и полиимида.

На рисунке 5 представлен профиль графика температуры на момент остановки расчета. Линии 1 соответствует решение задачи при $N = 10$, линии 2 при $N = 20$, линии 3 при $N = 40$, линии 4 при $N = 80$. При увеличении числа узлов сетки наблюдается сходимость решения разностной задачи.

Аналогичная последовательность сеток была построена для трехмерной задачи. На рисунке 6 представлен профиль графика температуры в момент остановки процесса вдоль трех прямых, проходящих через центр параллелепипеда:

$$y = \frac{h_y}{2}, z = \frac{h_z}{2} \quad (a);$$

$$x = \frac{h_x}{2}, y = \frac{h_y}{2} \quad (б);$$

$$x = \frac{h_x}{2}, z = \frac{h_z}{2} \quad (в).$$

Линиям 1 соответствует решение задачи при $N = 10$, линиям 2 при $N = 20$, линиям 3 при $N = 40$, линиям 4 при $N = 60$. При увеличении числа узлов сетки наблюдается сходимость решения разностной задачи.

Также для небольших размерностей сеток ($N = 40$) результат, полученный с применением экономичной схемы (2.3) – (2.6), сравнивался с результатом, полученным с применением чисто неявной схемы. Результаты представлены в таблице 12.

Чисто неявная постановка задачи предполагает, что каждому узлу сетки в соответствие ставится уравнение. Таким образом, это позволяет явно удовлетворить условию идеального теплового контакта во всех точках.

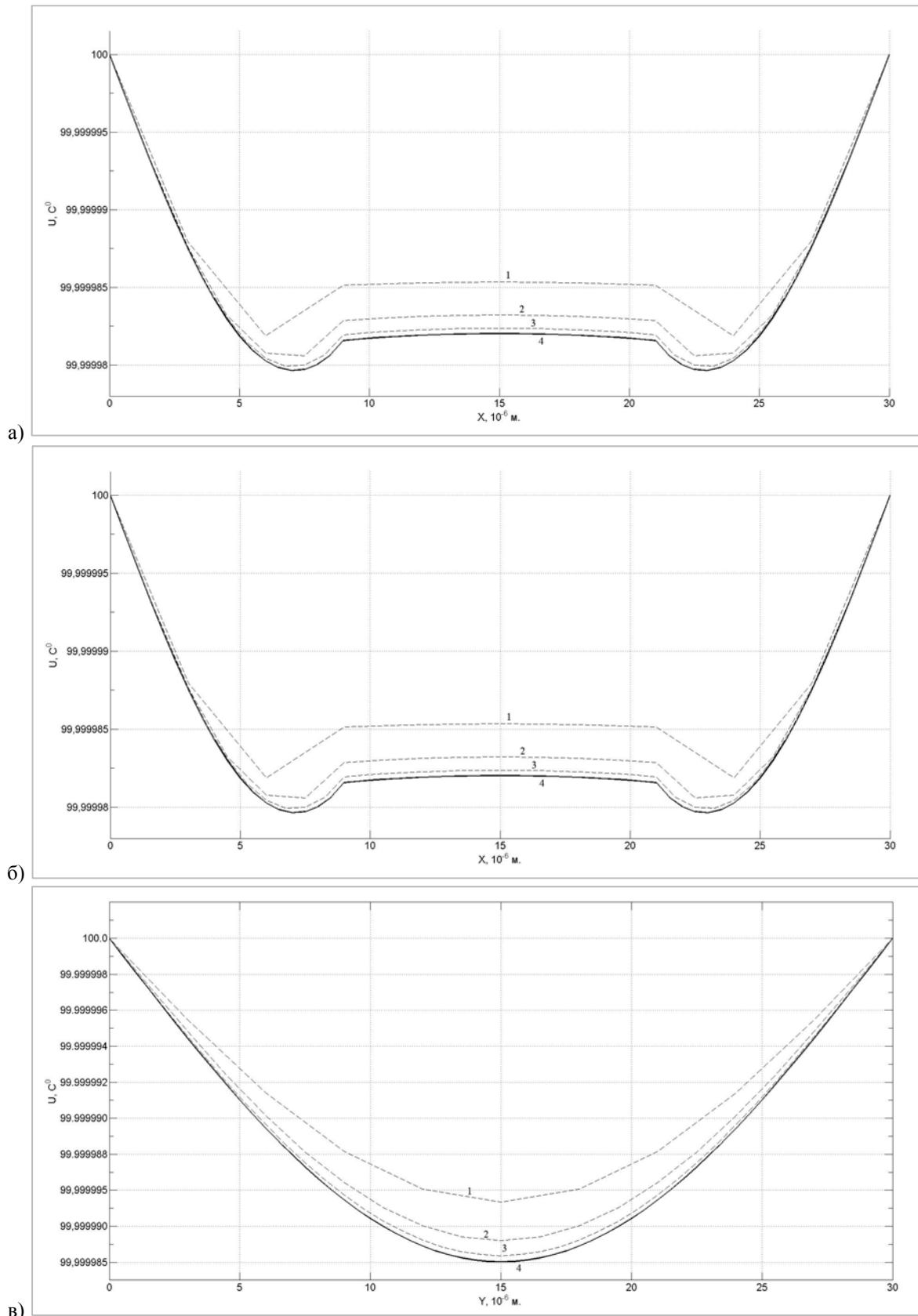


Рис. 6. Распределение температуры вдоль координатных осей

Сравнение чисто неявной и экономической разностных схем

Vm	$l_x,$ 10-6 м.	$l_y,$ 10-6 м.	$d_x,$ 10-6 м.	$d_y,$ 10- 6 м.	w	w_y	ТЭКОНОМ, 10-3 с.	ТНЕЯВН, 10-3 с.	$\varepsilon, \%$
0,15	43	43	13	13	0,3	0,3	18,454	17,756	3,93
0,3	30	30	13	13	0,44	0,44	8,778	8,473	3,6
0,5	22	22	13	13	0,6	0,6	4,189	4,05	3,43

Из таблицы 12 видно, что использованная экономичная разностная схема дает достаточно высокую точность.

Также при дальнейшем увеличении числа узлов сетки результаты, полученные при использовании экономической разностной схемы (2.3) – (2.6) и чисто неявной схемы, сближаются, а погрешность, соответственно, уменьшается.

Зависимость времени установления стационарного режима задачи от начальных и граничных условий

Было проведено исследование зависимости времени установления стационарного режима задачи в зависимости от начальных данных. В частности, изменялось значение $\Delta T = T_1 - T_0$.

Расчёты проводились с использованием разностной схемы (3.3) – (3.6) при следующих параметрах:

$N = 20, \varepsilon = 10^{-7}, \tau = 10^{-6}$ с.

Связующее – полиимид. Геометрические параметры пластинки следующие:

- $l_x = l_y = l_z = 43 \times 10^{-6}$ м., $w_x = w_z = 0,3$.
- $l_x = l_y = l_z = 30 \times 10^{-6}$ м., $w_x = w_z = 0,44$.
- $l_x = l_y = l_z = 22 \times 10^{-6}$ м., $w_x = w_z = 0,6$.

Таблица 13

Зависимость времени установления стационарного режима задачи от $\Delta T, 10^{-3}$ с

ΔT	0,1	1	10	50	100
1	6,853	7,956	9,06	9,831	10,163
2	2,779	3,228	3,676	3,99	4,125
3	1,097	1,275	1,453	1,577	1,631

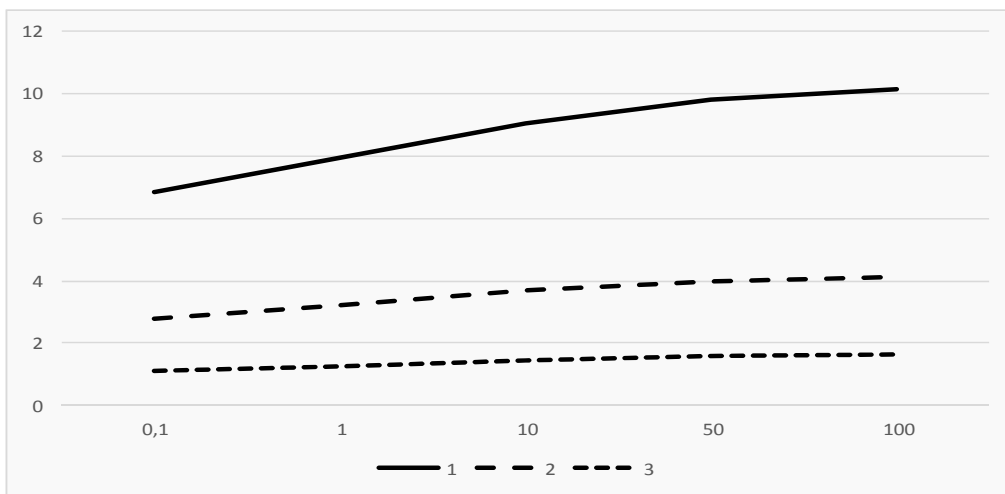


Рис. 7. Время установления стационарного режима в зависимости от $\Delta T, 10^{-3}$ с

Из таблицы 13 и рисунка 7 видно, что даже значительное изменение ΔT не оказывает существенного влияния на время установления стационарного режима задачи.

Выводы

Задача рассматривалась в трех постановках: одномерной, двумерной и трехмерной. Полученные результаты во всех трех вариантах постановки задачи имеют одинаковый порядок (порядка 10^{-3} с) и много

меньше, чем характерное время эксплуатации тонкостенных конструкций из композиционных материалов. Поэтому можно сделать вывод о правомерности допущения о равенстве температуры в фазах композита.

Литература

1. Андреев А. Н. Дифференциальные уравнения связанной задачи термоупругого деформирования слоистой композитной оболочки // Известия Алтайского государственного университета. (Серия: Математика и механика. Управление, вычислительная техника и информатика). Физика. Барнаул: Издательство Алтайского государственного университета. 2012. № 1/1(73). С. 11 – 13.
2. Андреев А. Н. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
3. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
5. Композиционные материалы: Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин, Н. А. Алфуртов, А. И. Бейль, В. А. Бунаков, И. А. Дымков, А. Ф. Ермоленко, И. Г. Жигун, П. А. Зиновьев, Т. Я. Киндис, В. В. Клейменов, А. А. Круклиньш, А. А. Кульков, Ф. В. Мануйлов, Б. Г. Попов, Г. Г. Портнов, О. С. Сироткин, А. М. Скудра, И. А. Соловьев, Ю. М. Тарнопольский, Ю. С. Царахов; под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
6. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Рациональное проектирование армированных конструкций. Новосибирск: Наука, 2002. 488 с.
7. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
9. Справочник по композиционным материалам: в 2 кн. Кн. 1 / под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
10. Справочник по композиционным материалам: в 2 кн. Кн. 2 / под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
11. Material: Polyimide. Режим доступа: <http://www.mit.edu/~6.777/matprops/polyimide.htm> (дата обращения: 16.05.2014).
12. Polysulfon (PSU). Режим доступа: <http://www.makeitfrom.com/material-data/?for=Polysulfone-PSU> (дата обращения: 16.05.2014).
13. Polyethersulfone (PES, Radel A). Режим доступа: <http://www.makeitfrom.com/material-data/?for=Polyether-sulfone-PES-Radel-A> (дата обращения: 16.05.2014).

Информация об авторе:

Станиславович Алексей Вячеславович – программист «ПКП РИФ», соискатель кафедры алгебры и геометрии КемГУ, alexey.st@bk.ru.

Alexey V. Stanislavovich – post-graduate student at the Department of Algebra and Geometry, Kemerovo State University.

Статья поступила в редколлегию 18.09.2014 г.