

**И.Ф. ЗАНЕВСКИЙ**, д-р техн. наук, проф., Технический университет им. К. Пулаского, Радом, Польша

## КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ СТРЕЛОК-ЛУК

Методом Лагранжа создана математическая модель взаимодействия стрелка с луком в форме системы девяти дифференциальных уравнений и начальных условий. Соответствующая задача Коши решена методом Рунге-Кутты с применением программы NDSolve из пакета Mathematica. Модель показала пригодность для изучения основных параметров системы стрелок-лук. Ил.: 3. Библиогр.: 12 назв.

**Ключевые слова:** математическая модель, стрелок, лук, задача Коши, Mathematica.

**Постановка проблемы.** Аналитические исследования процесса совместного движения стрелы и лука проводились в предположении о неподвижности точки контакта рукоятки лука и руки стрелка [1 – 4]. Таким образом, тело стрелка не принималось в расчёт, хотя по экспериментальным данным удерживающая лук рука вместе с рукояткой лука во время ускоренного движения стрелы с тетивой не остаются неподвижными [5 – 7].

**Анализ литературы.** В [1] описана компьютерная модель внутренней баллистики современного спортивного лука. В [8] была предложена модель согласования параметров спортивного лука с параметрами тела стрелка в статической постановке задачи. В [9] рассмотрена проблема стабилизации положения лука в вертикальной плоскости. В [10] представлена модель вибрационных процессов, сопровождающих выстрел из лука. В [11] изложены результаты моделирования совместного перемещения стрелы, тетивы и лука. В [12] с помощью оптоэлектронной системы зафиксированы движения рукоятки лука и руки стрелка. В то же время, практически пригодной модели для изучения процессов взаимодействия тела спортсмена с луком пока не создано.

**Цель статьи** – разработать компьютерную модель взаимодействия стрелка с луком во время совместного движения стрелы и тетивы.

**Механико-математическая модель системы.** Кинетическая  $T_{archer}$  и потенциальная  $P_{archer}$  энергия тела стрелка, а также диссипативная функция Релея  $\Phi_{archer}$  при взаимодействии с луком во время совместного движения стрелы с тетивой представлены выражениями (рис. 1 а – в):

$$\begin{aligned}
 T_{archer} &= \frac{1}{2} (m_{1\xi} \xi_s'^2 + m_{2\xi} \xi_H'^2 + m_\eta \eta_H'^2); \\
 P_{archer} &= \frac{1}{2} [c_{1\xi} \xi_s^2 + c_{2\xi} (\xi_s - \xi_H)^2 + c_\eta \eta_H^2]; \\
 \Phi_{archer} &= \frac{1}{2} [k_{1\xi} \xi_s'^2 + k_{2\xi} (\xi_s' - \xi_H')^2 + k_\eta \eta_H'^2],
 \end{aligned} \tag{1}$$

в которых чёрточкой обозначена производная по времени ( $' \equiv d/dt$ ).

Кинетическая энергия рукоятки, стабилизатора и прицела представлена выражением (рис. 1  $z, \vartheta$ ):

$$T_{handle} = \frac{1}{2} \int_{m_h} (\xi_h'^2 + \eta_h'^2) dm_h, \tag{2}$$

где  $\xi_h = \xi_H + y + x\kappa$ ;  $\eta_h = \eta_H + x - y\kappa$ ;  $\kappa$  – угловое перемещение рукоятки относительно точки контакта с рукою стрелка  $H$ ;  $Hxy$  – прямоугольная система координат, привязанная к рукоятке лука.

Выражение кинетической энергии плеч (3):

$$T_l = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &(m_U + m_L) (\xi_H'^2 + \eta_H'^2) + (m_U h_U^2 + m_L h_L^2) \kappa'^2 + \\ &+ I_U (\theta'_U + \kappa')^2 + I_L (\theta'_L - \kappa')^2 + 2(m_U r_U - m_L r_L) \xi'_H \kappa' + \\ &+ 2\kappa' \left[ \begin{aligned} &m_U r_U h_U (\theta'_U + \kappa') \cos(\theta_U + \kappa) - \\ &- m_L r_L h_L (\theta'_L - \kappa') \cos(\theta_L - \kappa) \end{aligned} \right] + \\ &+ 2\xi'_H \left[ \begin{aligned} &m_U r_U (\theta'_U + \kappa') \cos(\theta_U + \kappa) + \\ &+ m_L r_L (\theta'_L - \kappa') \cos(\theta_L - \kappa) \end{aligned} \right] - \\ &- 2\eta'_H \left[ \begin{aligned} &m_U r_U (\theta'_U + \kappa') \sin(\theta_U + \kappa) - \\ &- m_L r_L (\theta'_L - \kappa') \sin(\theta_L - \kappa) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}, \tag{3}$$

где  $m_{U/L}$  – масса плеч;  $I_{U/L}$  – моменты инерции плеч относительно осей крепления к рукоятке (точки  $H_{U/L}$ );  $r_{U/L}$  – расстояния от точек  $H_{U/L}$  до центров масс плеч.

Выражения потенциальной энергии плеча и стрелы [17]:

$$P_{U/L} = \frac{1}{2} c_{U/L} (\theta_{U/L} + \varphi_{U/L})^2; P_{s(U/L)} = \frac{f(s_{U/L} - s_{U/L}^*)^2}{2s_{U/L}^*}, \tag{4}$$

где;  $c_U, c_L$  – жёсткость плеч.

Выражения кинетической и потенциальной энергии стрелы:

$$T_{string} = \frac{1}{2} \frac{m_s}{3} \left[ \xi_A'^2 + \eta_A'^2 + \frac{2s_U^*}{s^*} (\xi_{TU}'^2 + \eta_{TU}'^2) + \frac{2s_L^*}{s^*} (\xi_{TL}'^2 + \eta_{TL}'^2) \right], \quad (5)$$

где  $m_s$  – масса тетивы;  $s_{U/L}, s_{U/L}^*$  – длина ветви тетивы в растянутом и нерастянутом состоянии;  $f$  – распределённая жёсткость тетивы.



Рис. 1. Схема системы стрелок-лук в проекции на вертикальную плоскость (а); схема модели тела стрелка в продольном (б) и поперечном (в) направлениях; схема модели лука (г) и стрелы (д).

Выражение кинетической и потенциальной энергии стрелы [11]:

$$T_{arrow} = \frac{1}{2} \int_0^{l_a} \mu_a(z_a) (\xi_a'^2 + \eta_a'^2) dz_a + \frac{1}{2} m_P [\xi_a'^2 + \eta_a'^2]_{z_a=l_a}; \quad (6)$$

$$P_{arrow} = m_a r_A \left[ \frac{1}{2} \xi_A'' (\psi^2 - \psi_0^2) + g(\psi - \psi_0) \right],$$

где  $l_a$  – длина стрелы;  $\mu_a$  – распределённая масса древка стрелы;  $z_a$  – привязанная к стреле продольная координата;  $m_p$  – масса наконечника;  $\psi_0$  – начальный угол подъёма стрелы.

Подстановкой выражений (1) – (6) в уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = 0,$$

была получена система дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщённых координат  $q_i \equiv \xi_s, \xi_H, \eta_H, \kappa, \theta_U, \theta_L, \xi_A, \eta_A, \psi$ ,  $i = \overline{1, 9}$ .

Решение соответствующей задачи Коши при начальных условиях [12] было получено методом Рунге-Кутты с помощью программы NDSolve из пакета Mathematica.

### Программа NDSolve (Mathematica)

```

ξΔ0 = 0.7576; ηΔ0 = 0.0426237; θU0 = 0.765512; θL0 = 0.794188; mΔ = 0.0023;
mU = 0.107; mL = 0.107; mH = 2.13; rU = 0.228; rL = 0.228; lU = 0.531;
lL = 0.531; hU = 0.342; hL = 0.342; SU = 0.780; SL = 0.840; v = 25515;
IU = 0.00682; IL = 0.00682; IH = 0.213; cU = 69.1; cL = 69.1; φU = 0.604672;
φL = 0.607552; IA = 0.00736; ma = 0.0224; rA = 0.5103; la = 0.783;
ηp0 = 0.0426237; g = 9.81; xCH = -0.021; yCH = -0.034; m1ξ = 26; m2ξ = 3.8;
mη = 2.1; c1ξ = 11600; c2ξ = 1900; cη = 943; k1ξ = 237; k2ξ = 78; kη = 45;
ψ0 = (ηp0 - ηΔ0) / la; ζ = -ArcTan[(ηA'[t] + rA*ψ'[t]) / ξA'[t]];
sU = √(SUη2 + SUξ2); sL = √(SLη2 + SLξ2); eU = (v*(sU - SU)) / (sU*SU); eL = (v*(sL - SL)) / (sL*SL);
SUη = ηH[t] + hU + lU*b1 - ηA[t]; SUξ = ξH[t] + hU*x[t] + lU*b2 - ξA[t];
SLη = ηH[t] - hL - lL*b3 - ηA[t]; SLξ = ξH[t] - hL*x[t] + lL*b4 - ξA[t];
b1 = Cos[x[t] + θU[t]]; b2 = Sin[x[t] + θU[t]];
b3 = Cos[-x[t] + θL[t]]; b4 = Sin[-x[t] + θL[t]];
system = {m1ξ*ξs''[t] + c1ξ*ξs[t] + k1ξ*ξs'[t] - c2ξ*(ξH[t] - ξs[t]) -
k2ξ*(ξH'[t] - ξs'[t]) == 0,
(mH + mU + mL + m2ξ)*ξH''[t] + c2ξ*ξH[t] - c2ξ*(ξH[t] - ξs[t]) + k2ξ*(ξH'[t] - ξs'[t]) +
(mH*xCH + mU*hU - mL*hL)*x''[t] + mU*rU*(b1*(θU''[t] + x''[t]) -
b2*(θU'[t] + x'[t])2) + mL*rL*(b3*(θL''[t] - x''[t]) -
b4*(θL'[t] - x'[t])2) + eU*SUξ + eL*SLξ == 0,

```

$$\begin{aligned}
& (m_H + m_U + m_L + m_{\eta}) * \eta_H''[t] + c_{\eta} * \eta_H[t] + k_{\eta} * \eta_H'[t] - m_H * y_{CH} * x''[t] - \\
& m_U * r_U * (b_2 * (\theta_U''[t] + x''[t]) + b_1 * (\theta_U'[t] + x'[t])^2) + \\
& m_L * r_L * (b_4 * (\theta_L''[t] - x''[t]) + b_3 * (\theta_L'[t] - x'[t])^2) \\
& + e_U * S_{U\eta} + e_L * S_{L\eta} == 0, (m_A + m_a) * \xi_A''[t] - e_U * S_{U\xi} - e_L * S_{L\xi} == 0, \\
& (m_A + m_a) * \eta_A''[t] + m_a * r_A * \psi''[t] + m_a * g - e_U * S_{U\eta} - e_L * S_{L\eta} == 0, \\
& I_A * \psi''[t] + m_a * r_A * (\xi_A''[t] * \psi[t] + g + \eta_A''[t]) == 0, \\
& I_U * (\theta_U''[t] + x''[t]) + m_U * r_U * h_U * b_1 * x''[t] + m_U * r_U * (b_1 * \xi_H''[t] \\
& - b_2 * \eta_H''[t]) + c_U * (\theta_U[t] + \varphi_U) + e_U * l_U * (S_{U\xi} * b_1 - S_{U\eta} * b_2) == 0, \\
& I_L * (\theta_L''[t] - x''[t]) - m_L * r_L * h_L * b_3 * x''[t] + m_L * r_L * (b_3 * \xi_H''[t] + \\
& b_4 * \eta_H''[t]) + c_L * (\theta_L[t] + \varphi_L) + e_L * l_L * (S_{L\xi} * b_3 + S_{L\eta} * b_4) == 0, \\
& (I_H + I_U + I_L + m_U * h_U^2 + m_L * h_L^2) * x''[t] + I_U * \theta_U''[t] - I_L * \theta_L''[t] + \\
& m_U * r_U * h_U * (b_1 * (\theta_U''[t] + 2 * x''[t]) - b_2 * (\theta_U'[t] + x'[t])^2) - \\
& m_L * r_L * h_L * (b_3 * (\theta_L''[t] - 2 * x''[t]) - b_4 * (\theta_L'[t] - x'[t])^2) + \\
& (m_H * x_{CH} + m_U * (h_U + b_1 * r_U) - m_L * (h_L + b_3 * r_L)) * \xi_H''[t] - \\
& (m_H * y_{CH} + m_U * r_U * b_2 + m_L * r_L * b_4) * \eta_H''[t] + \\
& e_U * (S_{U\xi} * (l_U * b_1 + h_U) - S_{U\eta} * l_U * b_2) - \\
& e_L * (S_{L\xi} * (l_L * b_3 + h_L) + S_{L\eta} * l_L * b_4) == 0, \\
& \xi_A[0] == \xi_{A0}, \eta_A[0] == \eta_{A0}, \xi_s[0] == 0, \xi_H[0] == 0, \eta_H[0] == 0, \theta_L[0] == \theta_{L0}, \\
& \theta_U[0] == \theta_{U0}, \psi[0] == \psi_0, \psi'[0] == 0, x[0] == 0, \xi_A'[0] == 0, \eta_A'[0] == 0, \\
& \xi_s'[0] == 0, \xi_H'[0] == 0, \eta_H'[0] == 0, \theta_L'[0] == 0, \theta_U'[0] == 0, x'[0] == 0; \\
& t_0 = 0; t_1 = 0.01579; \\
& \text{solution} = \text{NDSolve}[\text{system}, \{\xi_s, \xi_H, \eta_H, \xi_A, \eta_A, \psi, \theta_L, \theta_U, x\}, \\
& \{t, t_0, t_1\}, \text{Method} \rightarrow \text{ExplicitRungeKutta}]
\end{aligned}$$

**Результаты моделирования** для современного спортивного лука, соответствующего стандарту FITA (Международной федерации стрельбы из лука), представлены в графической форме (рис. 2, 3).

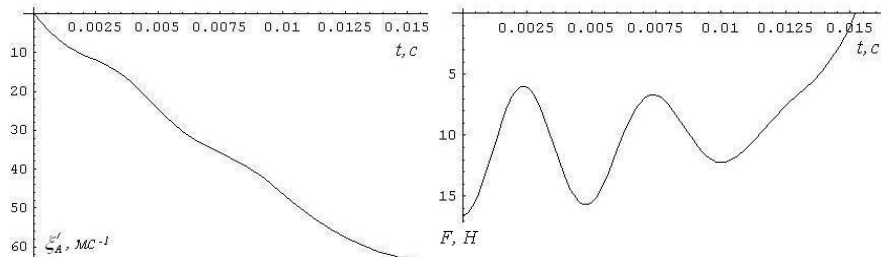


Рис. 2. Продольная скорость стрелы лука и сила отдачи лука.

Сила отдачи рукоятки лука по величине невелика и составляет приблизительно 3% от величины силы полного растяжения лука. Сила отдачи передаётся через тело стрелка на опору, уменьшаясь вследствие амортизации приблизительно в 20 раз. Величины соответствующих перемещений верхней части туловища стрелка находятся в пределах одного миллиметра.

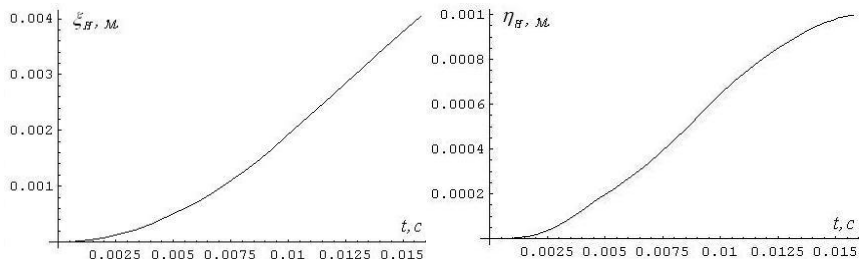


Рис. 3. Продольная и поперечная координаты рукоятки лука и руки стрелка.

**Выводы.** Результаты моделирования системы стрелок-лук хорошо коррелируют с экспериментальными данными [6, 12], в частности, относительно существенной нелинейности характера процесса совместного движения стрелы с тетивой.

**Список литературы:** 1. *Заневский И.Ф.* Компьютерная модель внутренней баллистики стрелы лука / *И.Ф. Заневский* // Вестник НТУ "ХПИ". Серия "Информатика и моделирование". – 2011. – № 36. – С. 78–86. 2. *Zanevskyy I.* Recoil and vibration in an archery bow equipped with a multi-rod stabilizer / *I. Zanevskyy*. – Shock and Vibration. – 2012. – Vol. 19. – №. 2. – P. 231–246. 3. *Pekalski R.* Modelling and simulation research of the competitor-bow-arrow system: Unpublished doctoral dissertation / *R. Pekalski*. – Warszawa: AWF, 1987. 4. *Zanevskyy I.* Mathematical and computer model of sport archery bow and arrow interaction / *I. Zanevskyy* // International Journal of Computer Science in Sport. – 2011. – Vol. 10. – №. 2. – P. 33–42. 5. *Kooi B.W.* Bow-arrow interaction in archery / *B.W. Kooi* // Journal of Sports Sciences. – 1998. – № 16. – P. 721–731. 6. *Ohsima S.* Simulation of the shape and dynamics of Japanese bow – Application of large deflection theory / *S. Ohsima, A. Ohtsuki* / The Book of the 4<sup>th</sup> International Conference on Engineering of Sport, Kioto. – 2002. – P. 102–107. 7. *Park J.L.* Compound-archery-bow nocking-point locus in the vertical plane / *J.L. Park* // Proc. IMechE, Part P // Journal of Sports Engineering and Technology. – 2009. – Vol. 224. – № 4. – P. 141–153. 8. *Zanevskyy I.* Bow tuning in the vertical plane / *I. Zanevskyy* // Sports Engineering. – 2006. – Vol. 9. – № 4. – P. 77–86. 9. *Zanevskyy I.* Modeling and computer simulation of bow stabilization in the vertical plane / *I. Zanevskyy* // International Journal of Sports Science and Engineering. – 2008. – Vol. 2. – № 1. – P. 3–14. 10. *Zanevskyy I.* Modeling of the archery bow and arrow vibrations / *I. Zanevskyy* // Shock and Vibration. – 2009. – Vol. 16. – № 4. – P. 203–212. 11. *Zanevskyy I.* Archer-bow-arrow behaviour in the vertical plane / *I. Zanevskyy* // Acta of Bioengineering and Biomechanics. – 2008. – Vol. 8. – № 1. – P. 65–82. 12. *Edelmann-Nusser J.* Motion of the bow during aiming and releasing the shot / *J. Edelmann-Nusser, M. Gruber, A. Gollhofer* / Conference Proceedings Archive, 19 International Symposium on Biomechanics in Sports, University of San Francisco. – 2001. – P. 162–165.

УДК 799.322.2:623.446.4

**Комп'ютерна модель системи стрілець-лук / Заневський І.П.** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2012. – № 62 (968). – С. 76 – 82.

Методом Лагранжа створено математичну модель взаємодії стрільця з луком у формі системи де'яти диференціальних рівнянь і початкових умов. Відповідну задачу Коші розв'язано методом Рунге-Кутта із застосуванням програми NDSolve з пакету Mathematica. Модель показала придатність для вивчення основних параметрів системи стрілець-лук. Іл.: 3. Бібліогр.: 12 назв.

**Ключові слова:** математична модель, стрілець, лук, задача Коші, Mathematica.

UDC 799.322.2:623.446.4

**Computer model of the archer and bow system / Zanevskyy I.P.** // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2012. – №. 62 (968). – P. 76 – 82.

A mathematical model of the archer and bow interaction was created using Lagrange method as a system of nine differential equations and initial conditions. Corresponding Cauchy problem was solved using Runge-Kutta method and NDSolve programs from Mathematica package. The model showed its possibility for studying of the main parameters of the archer and bow system. Figs.: 3. Refs.: 12 titles.

**Keywords:** mathematical model, archer, bow, Cauchy problem, Mathematica.

*Поступила в редакцію 08.07.2012*