УДК 532.546:519.63

Х.М. ГАМЗАЕВ, канд. техн. наук, доц., Азербайджанская государственная нефтяная академия, Баку, Азербайджан

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОВОДОНАПОРНОГО РЕЖИМА ПЛАСТА

Для описания упруговодонапорного режима разработки пласта предлагается модель типа Стефана, которая характеризуется наличием неизвестной границы раздела жидкостей. Условие на границе раздела считается неизвестным и взамен этого задается дополнительное условие на фиксированной границе пласта. Для численного решения поставленной задачи предложен вычислительный алгоритм на основе методов выпрямления фронтов и разностной аппроксимации. Табл.: 1. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: упруговодонапорный режим, пласт, метод выпрямления фронтов, разностная аппроксимация.

Постанова задачи. Известно, что большинство нефтяных месторождений приурочено к водоносным пластам и разрабатывается в условиях упруговодонапорного режима. При проявлении этого режима движение нефти к скважинам происходит не только за счет потенциальной энергии упругой деформации пласта и нефти, а также в силу давления краевой воды [1]. В большинстве случаев вытеснение нефти краевой водой происходит полностью и в пласте образуется четкая граница раздела двух жидкостей, движущаяся по неизвестному заранее закону.

Предположим, что рассматривается недеформируемый, однородный горизонтально расположенный нефтеносный пласт протяженностью L, постоянной толщины и ширины. В сечении пласта $x=0$ расположена галерея эксплуатационных скважин, а внешняя граница пласта окружена краевой водой, находящейся под давлением $p_s(t)$. Пусть в момент времени $t=0$ впускается в эксплуатацию галерея эксплуатационных скважин и в пласте возникает упруговодонапорный режим. За счет потенциальной энергии упругой деформации нефти и за счет давления краевой воды происходит прямолинейно-параллельное течение нефти к скважинам. По мере отбора нефти через галерею краевая вода поступает в пласт, полностью замещая поры занятые нефтью, и образуется четкая граница раздела вода–нефть. Предполагается, что нефть является слабосжимаемой жидкостью и ее движения в пласте подчиняются закону Дарси. Тогда уравнение, описывающее нестационарное прямолинейно-параллельное течение нефти в пласте с учетом активного продвижения краевой воды можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \ (x,t) \in \Omega_s = \{0 < x < s(t), \quad 0 < t \le T\}, \qquad (1)$$

где $P(x,t)$ – давление в пласте; $\chi = \dfrac{k}{\mu\beta m}$; k – абсолютная проницаемость пласта; μ – вязкость нефти; β – коэффициент объемного сжатия нефти; m – коэффициент пористости пласта; $s(t)$ – положение границы раздела вода–нефть.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ распределение давления в нефтеносном пласте и положение границы раздела жидкостей известны, т.е. для уравнения (1) имеем следующие начальные условия

$$s(0) = L, \qquad (2)$$

$$P\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s(0). \qquad (3)$$

Предположим, что изменение давления во времени на галерее эксплуатационных скважин описывается функцией $f(t)$. Тогда на границе пласта $x = 0$ будем иметь следующее условие

$$P\big|_{x=0} = f(t). \qquad (4)$$

На границе раздела вода–нефть $x = s(t)$ давление нефти должно быть равно давлению краевой воды

$$P\big|_{x=s(t)} = p_s(t), \qquad (5)$$

и должно быть выполнено условие материального баланса

$$m\frac{ds}{dt} = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{x=s(t)}. \qquad (6)$$

Следует отметить, что прямая задача упруговодонапорного режима пласта, состоящая в нахождении функций $P(x,t)$, $s(t)$, удовлетворяющих уравнениям (1), (6) и заданным условиям (2) – (5), относится к задаче типа Стефана [2, 3].

Однако необходимо отметить, что в упруговодонапорном режиме пласта давление краевой воды не доступно для непосредственного измерения. Следовательно, функция $p_s(t)$ неизвестна и также подлежит определению. Очевидно, что для корректной постановки задачи необходимо задавать дополнительное условие. Пусть дополнительное условие задается на границе пласта $x = 0$

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{x=0} = q(t). \qquad (7)$$

Таким образом, требуется определить функции $P(x,t)$, $s(t)$, $p_s(t)$ из уравнения (1), (6) и условий (2) – (5), (7). Задачу (1) – (7) можно отнести к классу граничных обратных задач [4, 5]. Существенной особенностью данной задачи является наличие подвижной границы раздела жидкостей, закон перемещения которого определяется в ходе решения задачи. Однако граничные обратные задачи для Стефановской модели типа (1) – (7) мало исследованы [6, 7].

Метод решения. Используя метод выпрямления фронтов, преобразуем задачу (1) – (7). Путем замены переменных

$$y = \frac{x}{s(t)}, \ t = t \ , \ P(x,t) = P(y,t) \, ,$$

область задания уравнения (1) Ω_s отобразим на область $\Omega = \{0 < y < 1, \ 0 < t \le T\}$.

Тогда уравнения (1), (6) и условия (2) – (5), (7) принимают вид

$$s^2(t)\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + ys(t)\frac{ds}{dt}\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (y,t) \in \Omega = \{0 < y < 1, \ 0 < t \le T\},$$

$$s(t)\frac{ds}{dt} = -\chi\beta \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{y=1} , \tag{8}$$

$$P\big|_{t=0} = \varphi(y) \, , \ \ 0 \le y \le 1 \, , \tag{9}$$

$$s(0) = L \, , \tag{10}$$

$$P\big|_{y=0} = f(t) \, , \tag{11}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu s(t) q(t) / k \, , \tag{12}$$

$$P\big|_{y=1} = p_s(t) \, . \tag{13}$$

Для перехода к разностной задаче введем равномерную разностную сетку в области $\overline{\Omega}$: $\varpi_{h\tau} = \{(y_i, t_j): \ y_i = ih, \ t_j = j\tau, \ h = L/N, \tau = T/M,$ $i = 0, \ 1, \ 2, \ldots, N, \ j = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, M\}$. Подставляя (8) в уравнение (7), разностные аналоги уравнений (7), (8) на сетке $\varpi_{h\tau}$ запишем в виде

$$s^{2j} \ \frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\tau} = \chi \frac{P_{i+1}^{j+1} - 2P_i^{j+1} + P_{i-1}^{j+1}}{h^2} - \chi\beta y_i \, \frac{P_N^j - P_{N-1}^j}{h} \frac{P_i^{j+1} - P_{i-1}^{j+1}}{h} \, ,$$

$$\frac{s^{2j+1} - s^{2j}}{\tau} = -2\chi\beta \, \frac{P_N^{j+1} - P_{N-1}^{j+1}}{h} \, ,$$

$$i=\overline{1,N-1},\ j=\overline{0,M-1}.$$

Полученную систему разностных уравнений преобразуем к виду

$$a_i P_{i-1}^{j+1} - c_i P_i^{j+1} + b_i P_{i+1}^{j+1} = -d_i,\ i=\overline{1,N-1},\ j=\overline{0,M-1}, \tag{14}$$

$$s^{2\,j+1} = s^{2\,j} - 2\tau\chi\beta \frac{P_N^{j+1} - P_{N-1}^{j+1}}{h}, \tag{15}$$

где $a_i = \chi + \chi\beta y_i (P_N^j - P_{N-1}^j)$; $b_i = \chi$; $c_i = a_i + b_i + s^{2j} h^2/\tau$; $d_i = s^{2j} P_i^j h^2/\tau$.

К уравнениям (14), (15) добавим разностные аналоги начальных и граничных условий (9) – (13):

$$P_i^0 = \varphi_i, \tag{16}$$

$$P_0^{j+1} = f^{\,j+1}, \tag{17}$$

$$P_0^{j+1} = P_1^{j+1} - h\mu q^j s^j / k, \tag{18}$$

$$P_N^{j+1} = p_s^{j+1}, \tag{19}$$

$$s^0 = L. \tag{20}$$

Для решения системы разностных уравнений (14), (16) – (19) используем подход, предложенный в [8]. Решение этой системы представляется в виде

$$P_i^{j+1} = \alpha_{i+1} P_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \tag{21}$$

где $\alpha_{i+1} = b_i/(c_i - \alpha_i a_i)$, $\beta_{i+1} = (a_i\beta_i + d_i)/(c_i - \alpha_i a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$,

$\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -h\mu q^j s^j / k$.

Для определения зависимости между P_N^{j+1} и P_0^{j+1} в явном виде соотношение (21) запишется при $i=0$

$$P_0^{j+1} = \alpha_1 P_1^{j+1} + \beta_1.$$

Подставив сюда выражение для P_1^{j+1}, т.е. $P_1^{j+1} = \alpha_2 P_2^{j+1} + \beta_2$, будем иметь

$$P_0^{j+1} = \alpha_1\alpha_2 P_2^{j+1} + \alpha_1\beta_2 + \beta_1.$$

Далее, подставляя в последнее уравнение выражения для $P_2^{j+1}, P_3^{j+1}, \ldots, P_{N-1}^{j+1}$, получим формулу, в которой P_0^{j+1} выражается через P_N^{j+1}

$$P_0^{j+1} = P_N^{j+1} \prod_{i=1}^{N} \alpha_i + \sum_{i=2}^{N} \beta_i \prod_{n=1}^{i-1} \alpha_n + \beta_1.$$

Отсюда, учитывая (17), (19), получим

$$p_s^{\,j+1} = \frac{f^{\,j+1} - \sum_{i=1}^{N} \beta_i \prod_{n=1}^{i-1} \alpha_n - \beta_1}{\prod_{i=1}^{N} \alpha_i}. \qquad (22)$$

Определив p_s^{j+1} по формуле (22), можно последовательно найти $P_{N-1}^{j+1}, P_{N-2}^{j+1}, \ldots, P_1^{j+1}$ по рекуррентной формуле (21). А положение границы раздела жидкостей можно определить как положительный корень уравнения (15). При переходе на следующий временной слой описанная процедура вычислений снова повторяется.

Таким образом, предложенный численный метод позволяет в каждом временном слое определить распределение давления в нефтеносном пласте и положение подвижной границы.

Результаты численных расчетов. Для выяснения эффективности предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты по следующей схеме: для заданных функций $q(t)$, $s(t)$ решалась прямая задача (7) – (9), (12). Найденная зависимость $f(t) = P(0,t)$ принималась за точные данные для численного решения обратной задачи по восстановлению $p_s(t)$. Первая серия расчетов выполнялась с использованием этих невозмущенных данных. Вторая серия расчетов проводились при наложении на $f(t)$ некоторой функции, моделирующей погрешность экспериментальных данных $\tilde{f}(t) = f(t) + \delta(\sigma(t) - 0.5)$, где $\sigma(t)$ – случайный процесс, моделируемый с помощью датчика случайных чисел, δ – уровень погрешности.

Расчеты выполнялись на пространственно-временной разностной сетке с шагами $h = 0.04$, $\tau = 2$ сут. Результаты численного эксперимента, проведенного для случая $\beta = 10^{-8}$ Па$^{-1}$, $k = 5 \cdot 10^{-12}$ м^2, $\mu = 0.003\,\text{Па}\cdot c$, L = 200 м, $s(t) = L - 2\sqrt{t}$, $m = 0.3$, $\varphi(x) = 200$ атм., при использовании невозмущенных и возмущенных входных данных представлены в таблице; в ней t – время; $p_s^{\,t}$ – точные значения функции $p_s(t)$; $\overline{p_s}$ – вычисленные значения $p_s(t)$ при невозмущенных данных; $\tilde{p}_s$ – вычисленные значения $p_s(t)$ при возмущенных данных. Для возмущения входных данных использовалась погрешность уровня $\delta = 5$ атм.

Таблица

Результаты численного эксперимента

t, сут.	10	20	30	40	50	60	70	80	90
p_s^t	215.97	220.51	222.11	222.09	221.00	219.13	216.65	213.67	210.29
$\overline{p_s}$	215.97	220.51	222.11	222.09	221.00	219.13	216.65	213.67	210.29
$\tilde{p}_s$	214.94	220.20	219.16	220.82	219.20	217.53	218.46	210.58	211.26

Как показывают результаты численного эксперимента, при использовании невозмущенных входных данных искомая функция $p_s(t)$ восстанавливается точно. При использовании возмущенных входных данных, в которых погрешность имеет флуктуационный характер, искомая функция $p_s(t)$ восстанавливается с относительной погрешностью приблизительно в 2 %. При уменьшении уровня погрешности решение восстанавливается более точно.

Выводы. Предложена математическая модель упруговодонапорного режима разработки пласта и алгоритм ее численного решения.

Список литературы: **1.** *Басниев К.С.* Нефтегазовая гидромеханика / *К.С..Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг*. – М. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 544 с. **2.** *Рубинштейн Л.И.* Проблема Стефана / *Л.И. Рубинштейн.* – Рига, Звайгзне, 1967. – 232 с. **3**. *Самарский А.А.* Вычислительная теплопередача / *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич.* – М.: Едиториал, 2003. – 784 с. **4.** *Самарский А.А.* Численные методы решения обратных задач математической физики / *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич*. – М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 480 с. **5.** *Алифанов О.М.* Экстремальные методы решения некорректных задач / *О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев.* – М.: Наука, 1988. – 288 с. **6.** *Гольдьман Н.Л.* Классическое и обобщенное решение двухфазной граничной обратной задачи Стефана / *Н.Л. Гольдьман* // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – № 3. – С. 133–143. **7.** *Лобанова В.В.* Решение одной обратной задачи Стефана с линейной подвижной границей / *В.В. Лобанова* // Математический журнал. Алматы. – 2006. – № 2. – С. 76–80. **8**. *Гамзаев Х.М.* Численное решение некорректной задачи однофазного течения в двумерном пласте / *Х.М. Гамзаев* // Проблемы управления и информатики. – Киев. – 2008. – № 5. – С. 74-84.

Статью представил д.т.н., проф., зав. кафедрой систем информации НТУ "ХПИ" А.А. Серков.

УДК 532.546:519.63

Чисельне моделювання пруговодонапірного режиму пласта / Гамзаев Х.М. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2012. – № 62 (968). – С. 26 – 32.

Для опису пруговодонапірного режиму розробки пласта пропонується модель типу Стефана, яка характеризується наявністю невідомого кордону розділу рідин. Умова на межі розділу вважається невідомою і замість цього задається додаткова умова на фіксованому кордоні пласта. Для чисельного розв'язання поставленої задачі запропонований обчислювальний алгоритм на основі методів випрямлення фронтів і різницевої апроксимації. Табл. 1. Бібліогр.: 8 назв.

Ключові слова: пруговодонапірний режим, пласт, метод випрямлення фронтів, різницево апроксимація.

UDC 532.546:519.63

Numerical modeling of elastic water drive mode of layer / Gamzaev Kh.M. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2012. – №. 62 (968). – P. 26 – 32.

For the description of water drive development mode of the reservoir proposed model of the type of Stephen, which is characterized by the presence of unknown border of section of liquids. The condition on the boundary is considered to be unknown, and instead set additional condition on the fixed boundary layer. For the numerical solution of the set task proposed numerical algorithm based on the methods of rectification of the fronts and difference approximation. Tabl.: 1. Refs.: 8 titles.

Keywords: elastic water drive mode, the layer, the method of straightening fronts, difference approximation.