

## SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE KOMPOZİT BİR PLAKTAKİ YER DEĞİŞTİRME VE GERİLME ANALİZİ

Abdullah YILDIZ<sup>1</sup>, Mustafa ERÖZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Sakarya Üniv. Fen-Ed. Fak., Matematik Bölümü, Adapazarı, [yildiz@sakarya.edu.tr](mailto:yildiz@sakarya.edu.tr)

<sup>2</sup>Sakarya Üniv. Fen-Ed. Fak., Matematik Bölümü, Adapazarı, [meroz@sakarya.edu.tr](mailto:meroz@sakarya.edu.tr)

### ÖZET

Bu çalışmada kenarlarından ankastre -sert kenetlenmiş ve üst yüzeyin orta noktasındaki bir kuvvetin etkisi altında bırakılmış bir kompozit plağın şeklindeki yer değiştirmelerin ve gerilmelerin analizi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılmıştır. İncelenen sınır değer probleminde kompozit malzeme ve geometrisi ile ilgili parametreler değiştirilerek yer değiştirmeler ve gerilmelerdeki etkisine bakılmıştır.

**Anahtar Kelimeler** – Kompozit malzeme, sonlu elemanlar yöntemi, yer değiştirme analizi, gerilme analizi.

## DISPLACEMENT and STRESS ANALYSIS OF A COMPOSITE PLATE via FINITE ELEMENT METHOD

### ABSTRACT

In this study, the analysis of displacement and stress in a composite plate under a force from the top side and which is rigidly supported from both sides is done using finite element method. The parameters relevant to geometry of the problem and composite material are changed and the effect of this change to displacement and stress is investigated.

**Keywords** - Composite material, finite element method, displacement analysis, stress analysis.

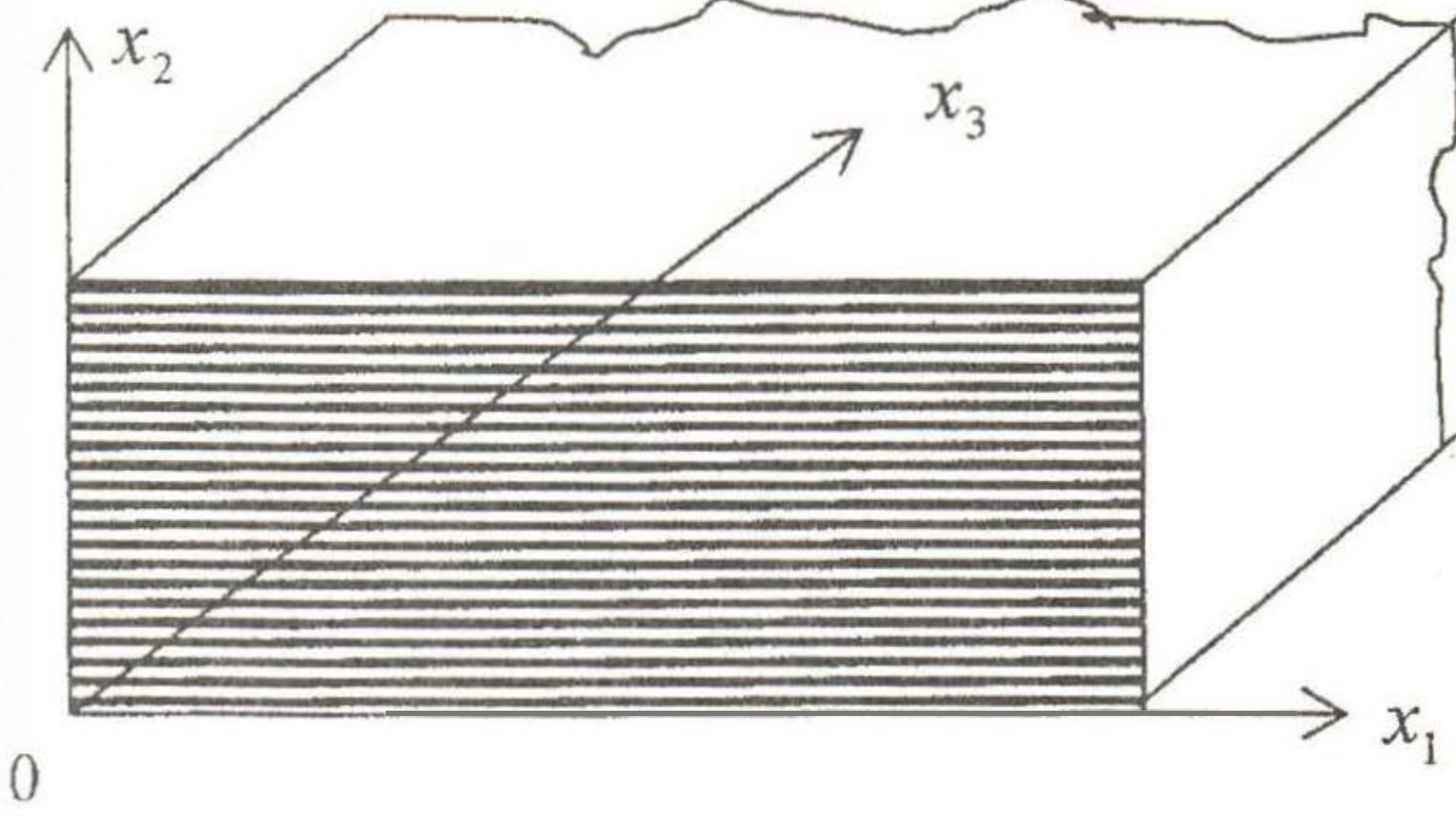
### I.GİRİŞ

Aralarında kimyasal reaksiyon bulunmayan iki maddenin makroskopik ölçüde bir araya getirilmesi ile elde edilen kompozit malzemeler gün geçtikçe daha sık kullanılmaya başlanmıştır. Bu nedenle; kompozit malzemedir hazırlanmış maddelerin statik ve dinamik problem analizlerine ihtiyaç artmıştır [1, 2, 3]. Kompozit malzemenin bileşenlerine güçlendirici ve matris adı verilmektedir [4, 5]. Kompozit malzemeleri konu alan

araştırma ve yayınların bir listesi kaynaklar bölümünde verilmiştir. Bu çalışmada, sonlu eleman çözümü esnasında bilinear Lagrange şekil fonksiyonları kullanılarak, ele alınan kompozit plaktaki yer değiştirme ve gerilmelerin analizi yapılmıştır [6]. Elde edilen sayısal sonuçlara Mathematica bilgisayar paketinde yazarlar tarafından yazılan programlar ile ulaşılmıştır. İnceleme esnasında lineer elastisite teorisinden denge denklemleri kullanılmıştır.

## II.PROBLEMİN ORTAYA KONULMASI VE SAYISAL ÇÖZÜM

### II.1 Problemin Geometrisi



Şekil 1. İncelenen problemin geometrisi.

$x_1, x_2, x_3$  üç boyutlu uzayda koordinat eksenlerini temsil etmek üzere, ele alınan kompozit plak  $0 \leq x_1 \leq l$ ,  $0 \leq x_2 \leq h$  ve  $-\infty \leq x_3 \leq +\infty$  geometrisine sahip olsun. Bu çalışmada  $u_1$ ,  $x_1$  istikametindeki ve  $u_2$ ,  $x_2$  istikametindeki yer değiştirmeleri ifade etmektedir. İnceleme esnasında

$$A = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l, 0 \leq x_2 \leq h \} \quad (1)$$

düzlemi ele alınarak düzlem şekil değiştirme göz önünde tutulmuştur.

### II.2 Problemin Formülasyonu

Denge denklemleri ele alınan problem için

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i=1,2, \quad j=1,2 \quad (2)$$

yapısındadır. Elastisite kuramında Hooke yasası ile verilen gerilmeler ve deformasyon (şekil değiştirmeler) arasındaki bağıntı  $\sigma = D\varepsilon$  biçimindedir. Burada  $\sigma$  vektörü  $\sigma^T = \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \}$  ve  $\varepsilon$  deformasyon tensörü  $\varepsilon^T = \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12} \}$  ile verilir. Burada kompozit malzeme söz konusu olduğundan  $D$  matrisi kompozit malzemenin mekanik özellikleri kullanılarak

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$

biçiminde verilir [7].  $D$  matrisinin elemanları güçlendirici ve matrisin mekanik özellikleri ile kompozit madde içindeki hacim oranları kullanılarak elde edilmiştir. Kompozit malzemedeki matrisin ve güçlendiricinin sırasıyla Young modüllerini  $E_1, E_2$ , Poisson oranlarını  $\nu_1, \nu_2$  ve hacim oranlarını  $\xi_1, \xi_2$  ile gösterebiliriz. Bu durumda  $D$  matrisinin elemanları

$$E_1 = \frac{1}{2(1+\nu_1)}, \quad E_2 = \frac{1}{2(1+\nu_2)}, \quad EE = E_2 / E_1$$

$$El_1 = \frac{\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}, \quad El_2 = \frac{EE\nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}$$

$$\Delta = (El_1 + 2E_1)\eta_2 + (El_2 + 2E_2)\eta_1$$

olmak üzere

$$d_{11} = E_1\eta_1 + E_2\eta_2 + (El_1 + E_1)\eta_1 + (El_2 + 2E_2)\eta_2 - \frac{\eta_1\eta_2(El_1 - El_2)^2}{\Delta}$$

$$d_{12} = El_1\eta_1 + El_2\eta_2 - \frac{\eta_1\eta_2(El_1 - El_2)[(El_1 + 2E_1) - (El_2 + 2E_2)]}{\Delta}$$

$$d_{22} = (El_1 + 2E_1)\eta_1 + (El_2 + 2E_2)\eta_2 - \frac{\eta_1\eta_2[(El_1 + 2E_1) - (El_2 + 2E_2)]^2}{\Delta}$$

$$d_{66} = \frac{E_1E_2}{E_1\eta_2 + E_2\eta_1}$$

biçimindedir.  $\varepsilon$  deformasyon tensörü ile  $u$  yer değiştirmeleri arasındaki bağıntı simetriden

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i=1,2, \quad j=1,2 \quad (4)$$

biçiminde verilmektedir [8, 9]. Son olarak ele alınan problemin sınır koşullarını verelim:

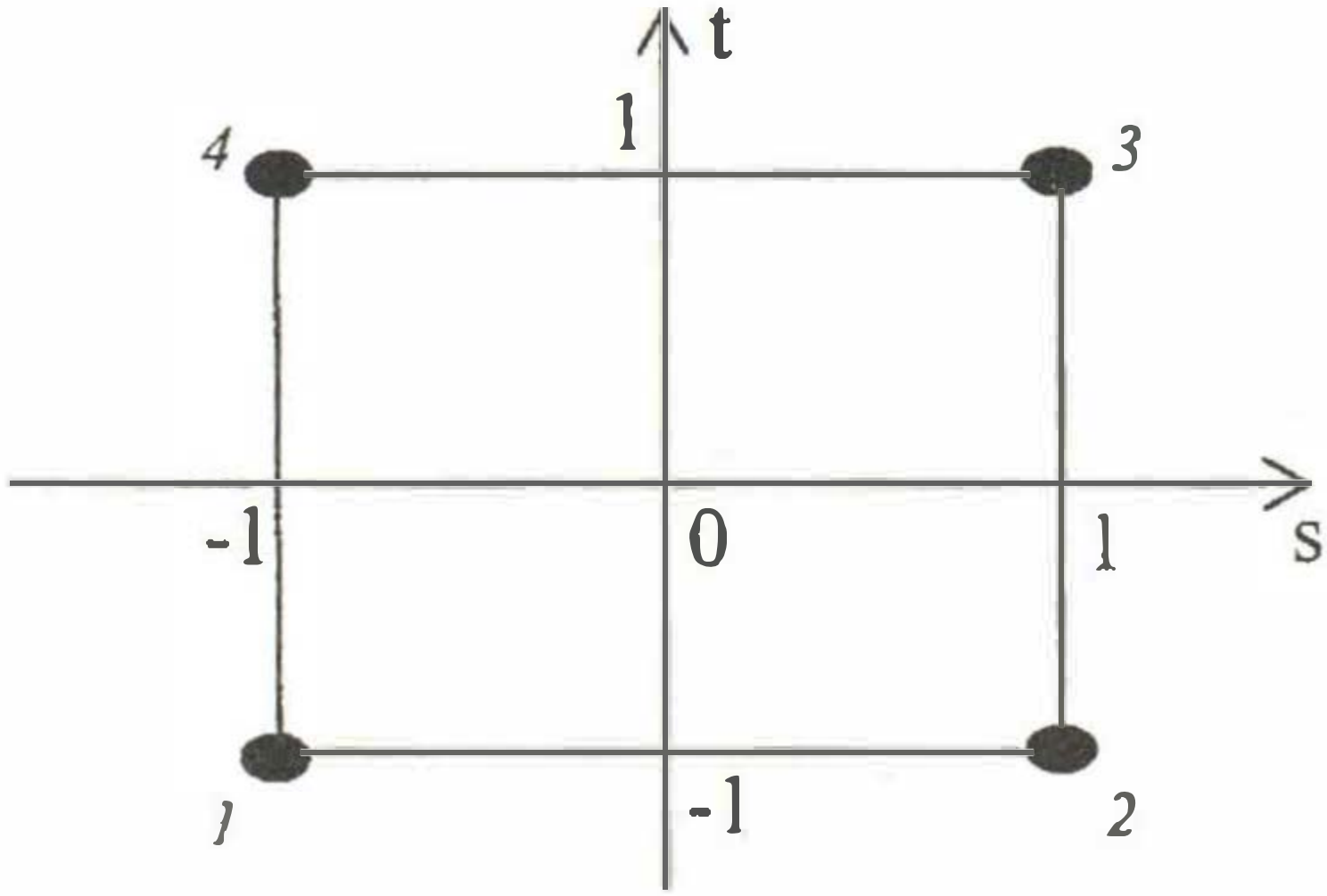
$$\begin{aligned} (u_1)_{x_1=0} &= (u_1)_{x_1=l} = 0, & (u_2)_{x_1=0} &= (u_2)_{x_1=l} = 0 \\ (\sigma_{12})_{x_2=0} &= 0, & (\sigma_{12})_{x_2=h} &= 0 \\ (\sigma_{22})_{x_2=0} &= 0, & (\sigma_{22})_{x_2=h} &= -p \end{aligned} \quad (5)$$

(5) denklemlerinde  $p$  sabittir. Böylece (1)-(2) denklemleri ve (5) sınır koşulları ile çözülecek problem oluşturulur.

Denge durumunda  $A$  bölgesi üzerinde toplam potansiyel enerji fonksiyoneli

$$J = \frac{1}{2} \iint_A \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dA - \int_{\partial A} p_i(s) u_i(s) ds, \quad i, j=1,2 \quad (6)$$

dir. Burada  $\partial A$ ,  $A$  bölgesinin sınırıdır.  $A$  bölgesini dikdörtgen sonlu elemanlara bölerek her bir eleman üzerinde bilinear Lagrange baz fonksiyonlarını seçelim.



Şekil 2. Pilot sonlu eleman ve düğüm noktaları.

Bu durumda Şekil 2'de verilen pilot sonlu eleman için bilinear baz fonksiyonları

$$\begin{aligned} S_1(s,t) &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \\ S_2(s,t) &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \\ S_3(s,t) &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \\ S_4(s,t) &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \end{aligned} \quad (7)$$

olur. Yer değiştirme tabanlı sonlu eleman yöntemi kullanıldığından bilinmeyenler her bir düğüm noktasında  $\mathbf{u}^T = \{u_1, u_2\}$  yer değiştirmeleri olacaktır. Bu durumda  $e_k$  sonlu elemanında

$$u_1^k = \sum_{i=1}^4 \alpha_i S_i, \quad u_2^k = \sum_{i=1}^4 \beta_i S_i \quad (8)$$

yer değiştirmelerini elde ederiz.  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  bilinmeyen katsayıları Ritz yöntemi ile belirlenerek her bir sonlu eleman üzerindeki cevap (8) formunda ifade edilir. (8) ifadeleri (6) fonksiyonelinde yerine yazılarak

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} \quad (9)$$

matris denkleminde ulaşılır. (9) denkleminde  $\mathbf{K}$  rijitlik matrisinin elemanları

$$K_{ij} = \iint_A B_i^T D B_j dA \quad (10)$$

$\mathbf{f}$  vektörünün elemanları

$$f_i = \int_S p_i(s) S_i(s) dS \quad (11)$$

ve  $B_i$  matrisi de

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial S_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial S_i}{\partial x_2} & \frac{\partial S_i}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

biçiminde verilir [10]. Elde edilen yer değiştirmeler ve  $\sigma = DB\mathbf{u}$  bağıntısı kullanılarak  $\sigma$  gerilmeleri elde edilir. Mathematica programı ile elde edilen sayısal sonuçlar aşağıda irdelenmiş ve ilgili sonuçlar grafiklerde gösterilmiştir. Bu çalışmada  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$  ve  $\xi_1 = \xi_2 = 0.5$  olduğunu kabul edeceğiz. Sonlu eleman analizi esnasında  $x_2$  yönünde 4 sonlu eleman,  $x_1$  yönünde 80 sonlu eleman kullanılarak 790 serbestlik derecesi ile çalışılmıştır.

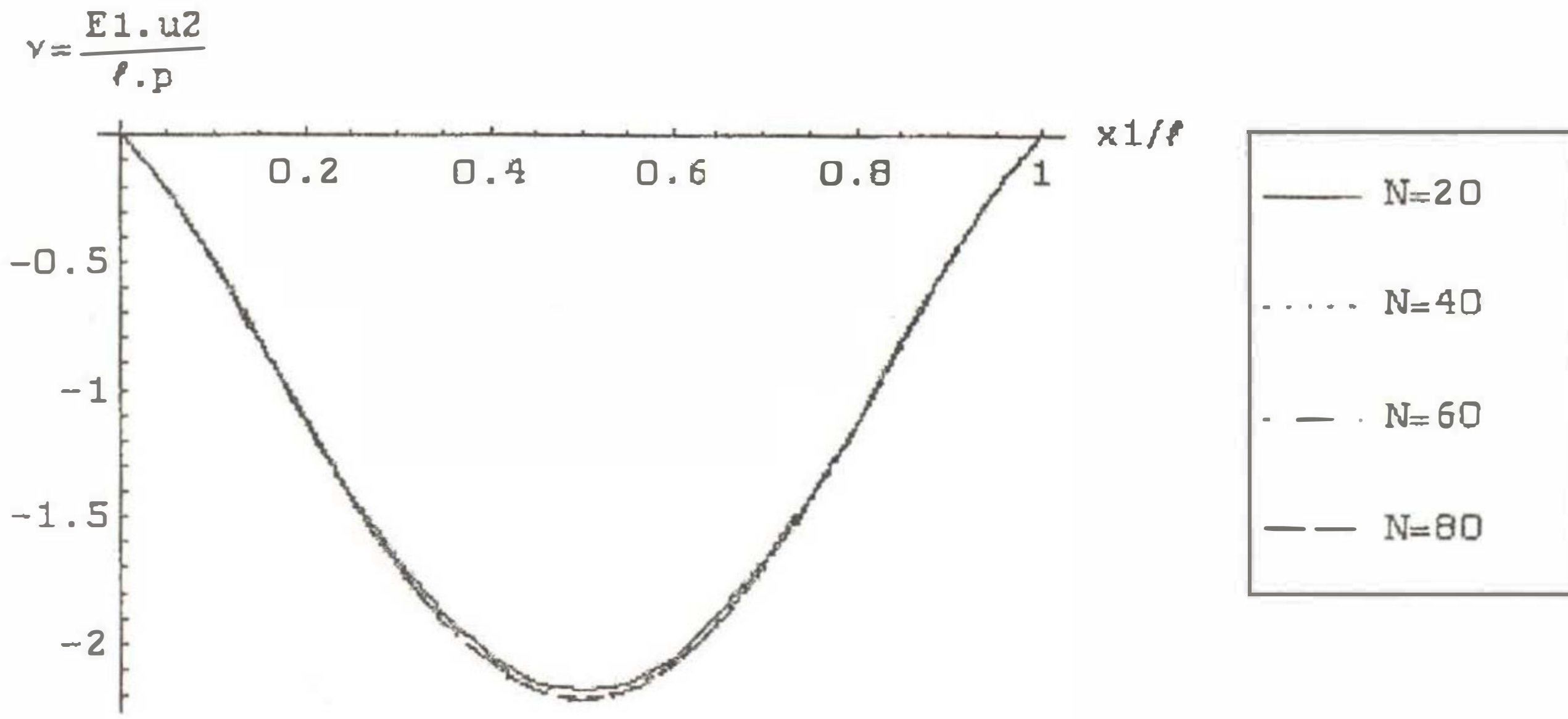
### III. SONUÇ

Grafiklerden anlaşıldığı üzere kompozit malzemedeki  $E_2/E_1$  oranı arttırıldıkça  $x_2$  yönündeki yer değiştirmeler azalmıştır. Ancak  $E_2/E_1$  in arttırılması  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  nin  $x_1$  yönündeki dağılımında az etki göstermekte ve burada farklılık plağın sınırına yakın yerlerde olmaktadır. Ayrıca  $h/\ell$  oranındaki değişimin  $x_2$  yönündeki yer değiştirmeye büyük oranda etkisi görülmektedir.  $h/\ell$  oranındaki değişimin  $x_1$  yönündeki dağılımında  $\sigma_{11}$  gerilme değerleri artmaktadır. Seçilen bir  $x_2$  yönü değeri için  $h/\ell$  arttıkça  $\sigma_{11}$  gerilme değerleri artmaktadır.

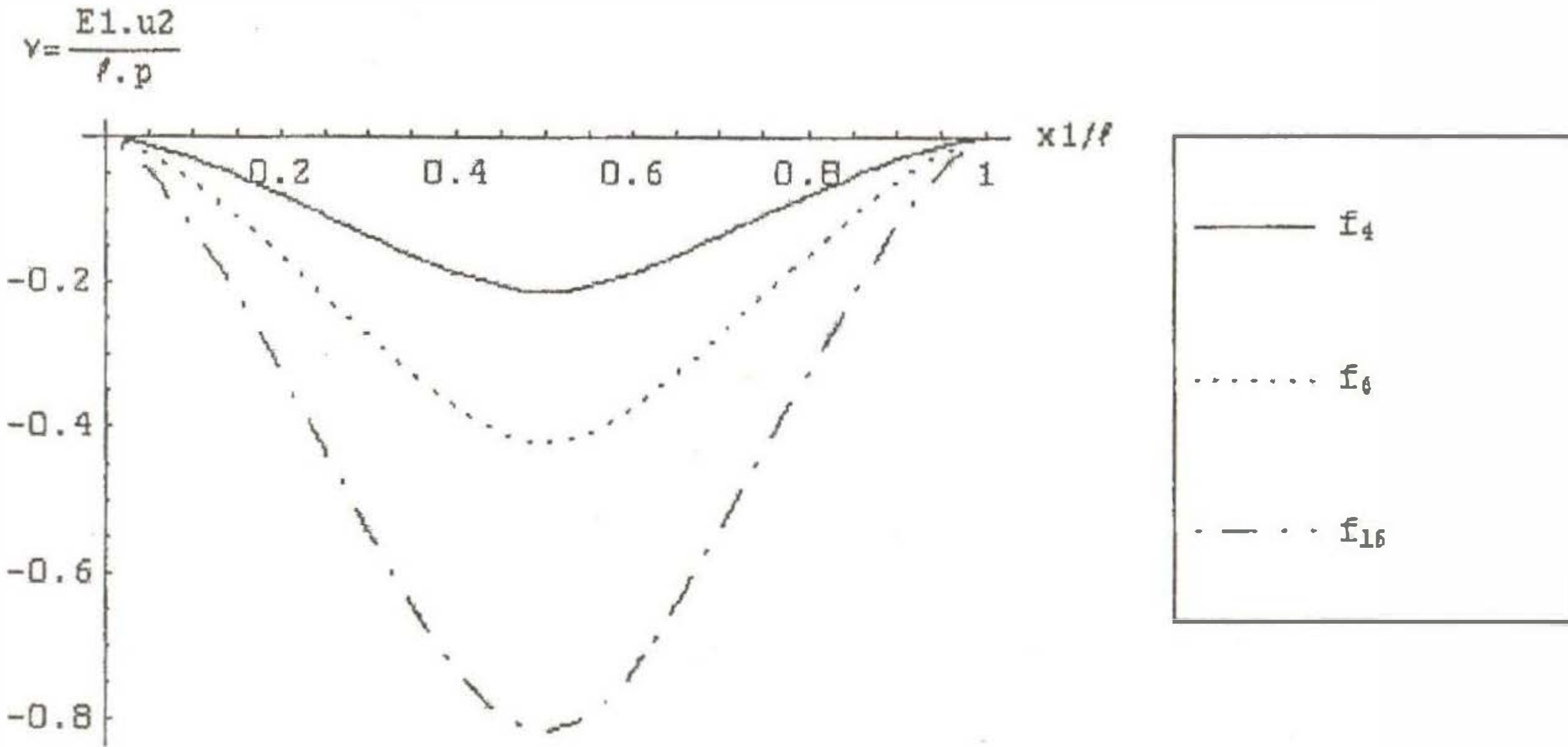
Sonuç olarak, kompozit plaktaki parametrelerin değiştirilmesi ile yer değiştirmelerdeki değişim sınırlardan uzaklaştıkça artmakta, ancak gerilmelerdeki değişim ise sınır noktalarına yaklaştıkça artmaktadır. Böylece malzeme parametrelerinin değişiminin kompozit plaktaki yer değiştirmenin dağılımına etkisinin büyük olduğu görülmüştür.

### KAYNAKLAR

- [1]. Vasiliev, V. , Morozov, E. *Mechanics and Analysis of Composite Materials*, Elsevier, Amsterdam. 2001
- [2]. Gibson, R. *Principles of Composite Material Mechanics*, MacGraw-Hill, New York. 1994
- [3]. Jones, R.M. *Mechanics of Composite Materials, 2nd Ed.*, Taylor&Francis, Virginia. 1999
- [4]. Akbarov, S.D. ,Yahnioglu, N. *Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemedeki Yapılmış Yapı Elemanlarının Statikine Uygun Sınır Değer Problemlerinin SEY ile İncelenmesi*, Doktora Tezi, YTÜ, İstanbul. 1996
- [5]. Akbarov, S.D., Guz, A.N. *Mechanics of Curved Composites*, Kluwer Academics Publishers. (2000)
- [6]. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method, Vol.1*, MacGraw-Hill. (1988)
- [7]. Christensen, R.M. *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley and Sons Inc. 1979
- [8]. Eringen, A.C., Şuhubi, E.S., *Elastodynamics Finite Motions, Vol.1*, Academic Pres, New York, London, 1975
- [9]. Guz, A.N., *Elastic waves in a Body with Initial Stresses, I.General Thweory*, Naukova Dumka, Kiev, 1986
- [10]. Hutton, D.V. *Fundamentals of Finite Element Analysis*, MacGraw-Hill, New York. 2004

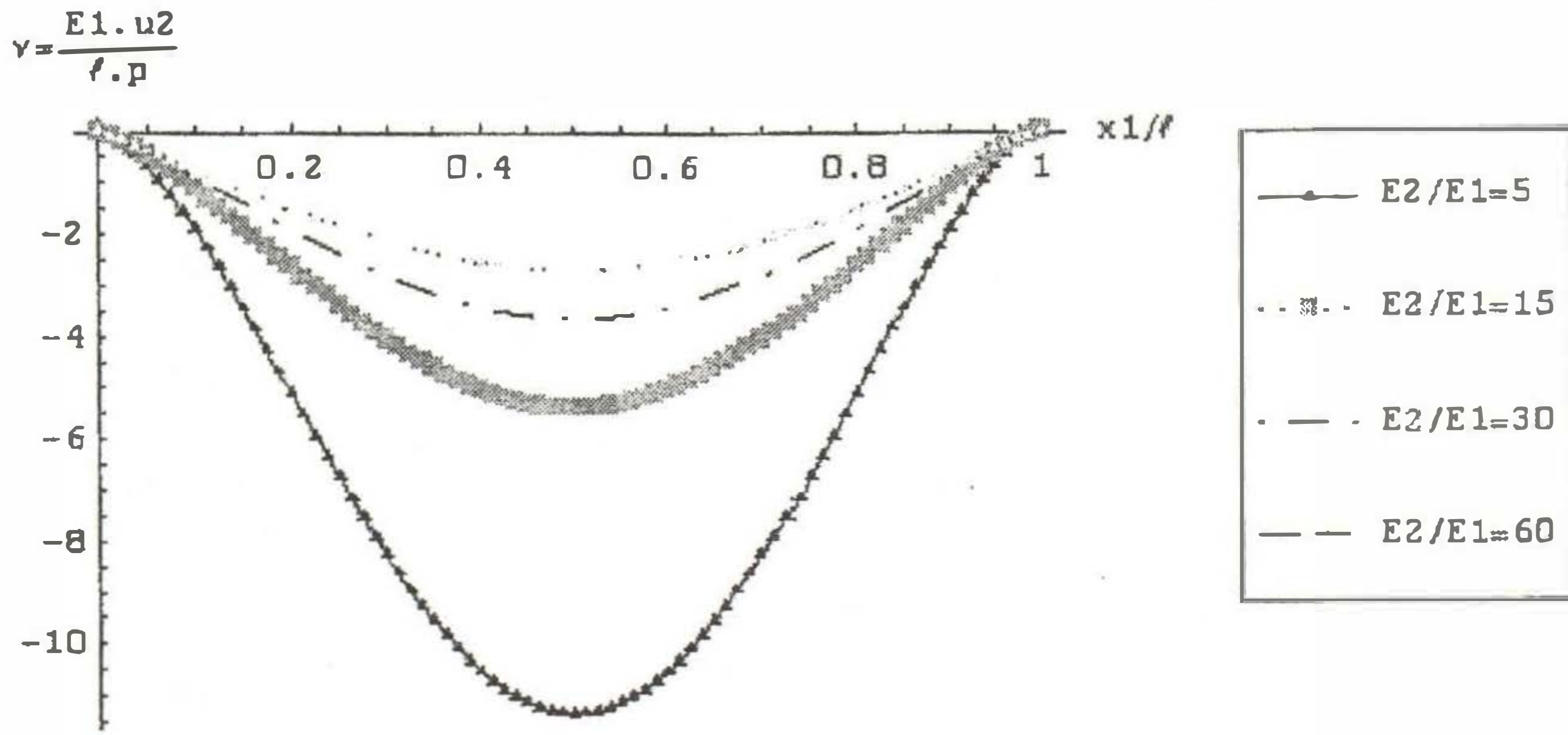


Şekil 3.  $x_1$  yönündeki sonlu eleman sayısının değişiminin  $\frac{x_2}{l} = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{l} \right)$  kesitindeki yer değiştirmeye etkisi. ( $E_2 / E_1 = 5$ ,  $h / l = 0.2$ )

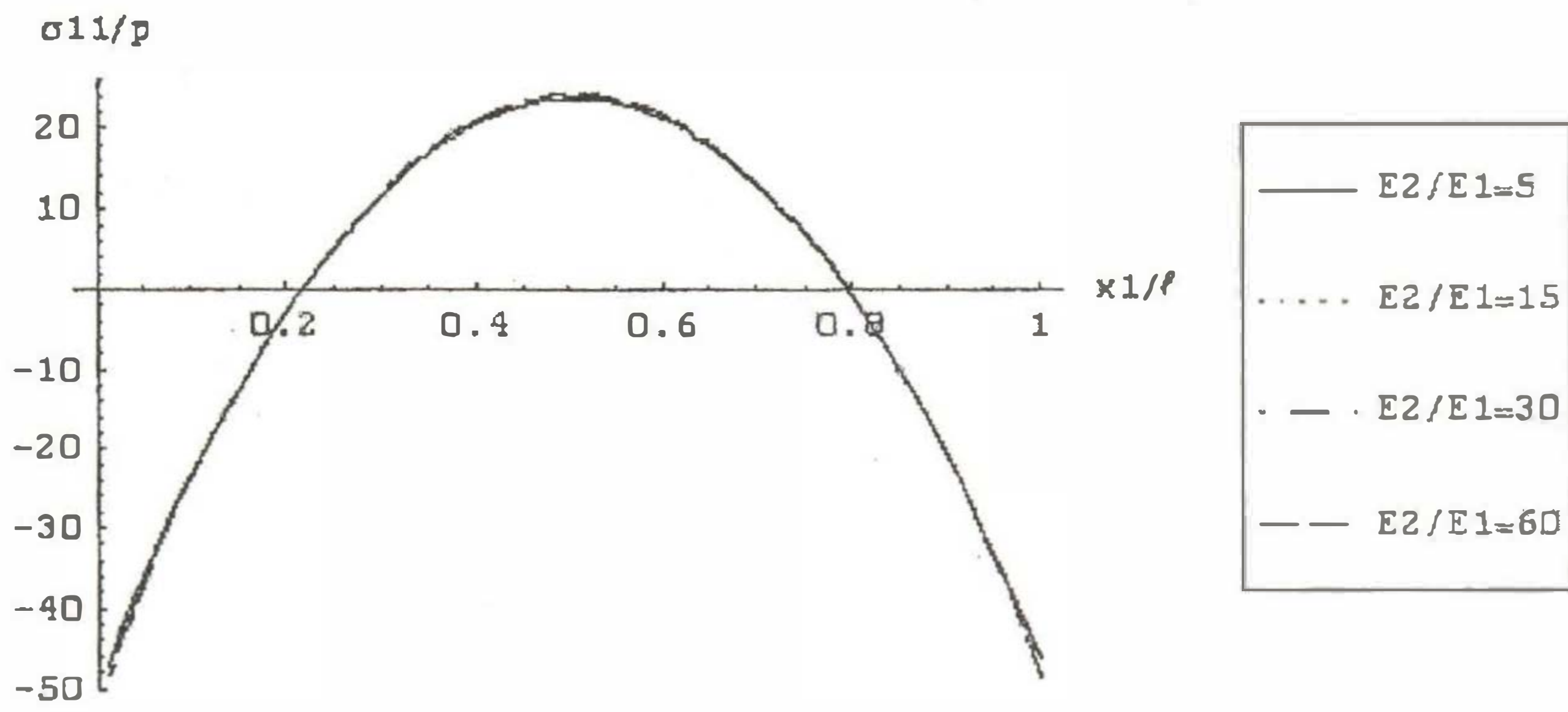


Şekil 4. Uygulanan yükün miktarının artırılması ile  $\frac{x_2}{l} = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{l} \right)$  kesitindeki yer değiştirmeye etkisi. ( $E_2 / E_1 = 5$ ,  $h / l = 0.2$ )

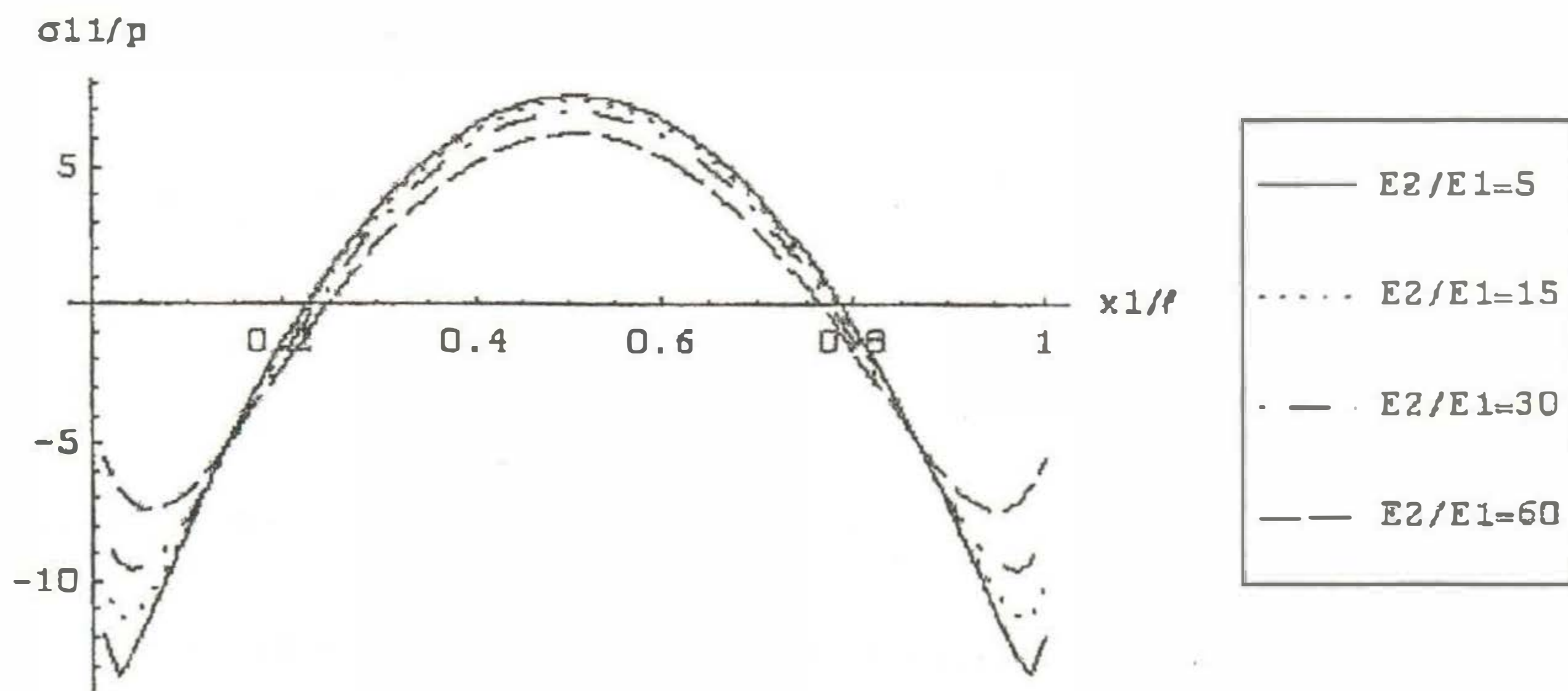
( $x_1 / 2l$  noktasına göre simetrik olarak  $f_4$ :4 eleman,  $f_8$ :8 eleman,  $f_{16}$ :16 eleman üzerinde yük var.)



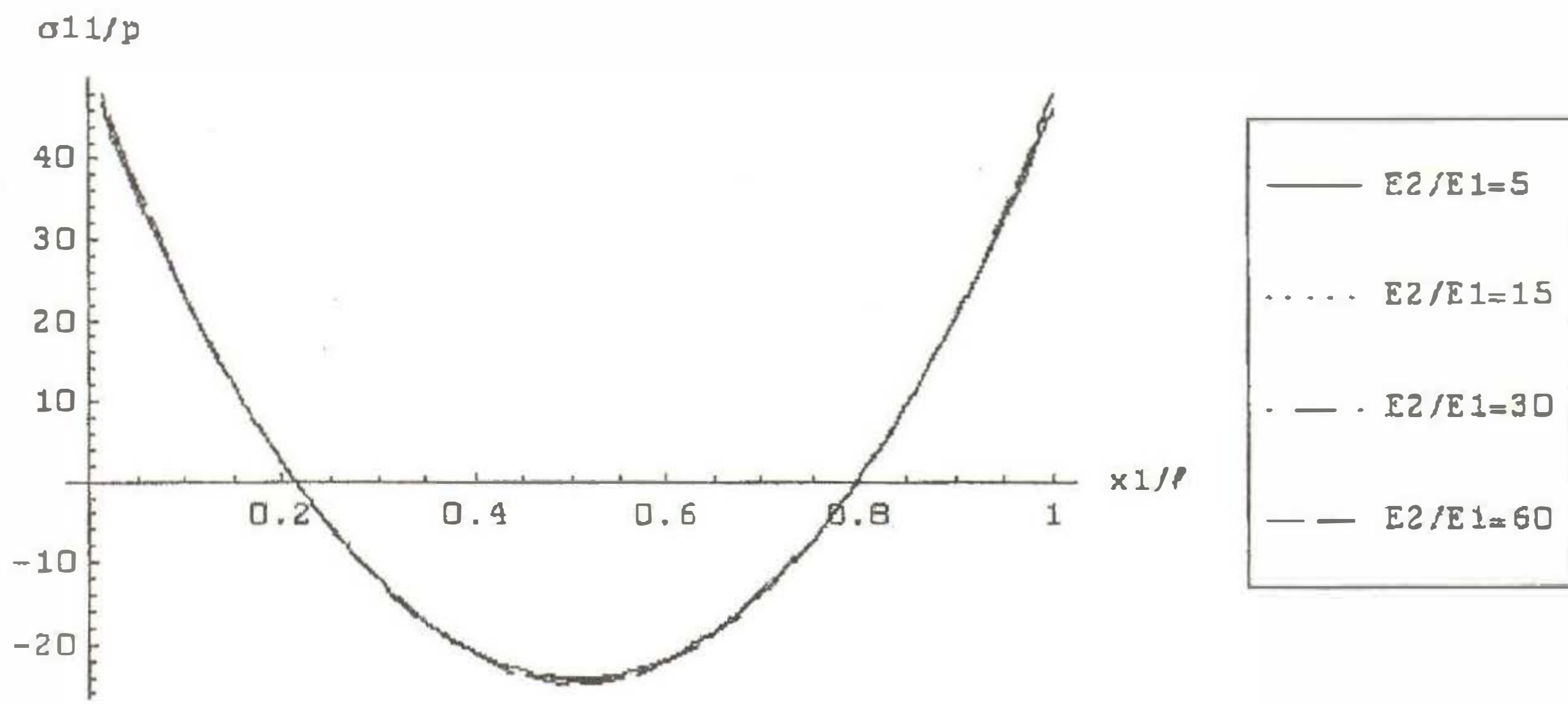
Şekil 5.  $E_2/E_1$  oranındaki değişimin  $\frac{x_2}{\ell} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\ell}\right)$  kesitindeki yer değiştirmeye etkisi. ( $N = 80$ ,  $h/\ell = 0.1$ )



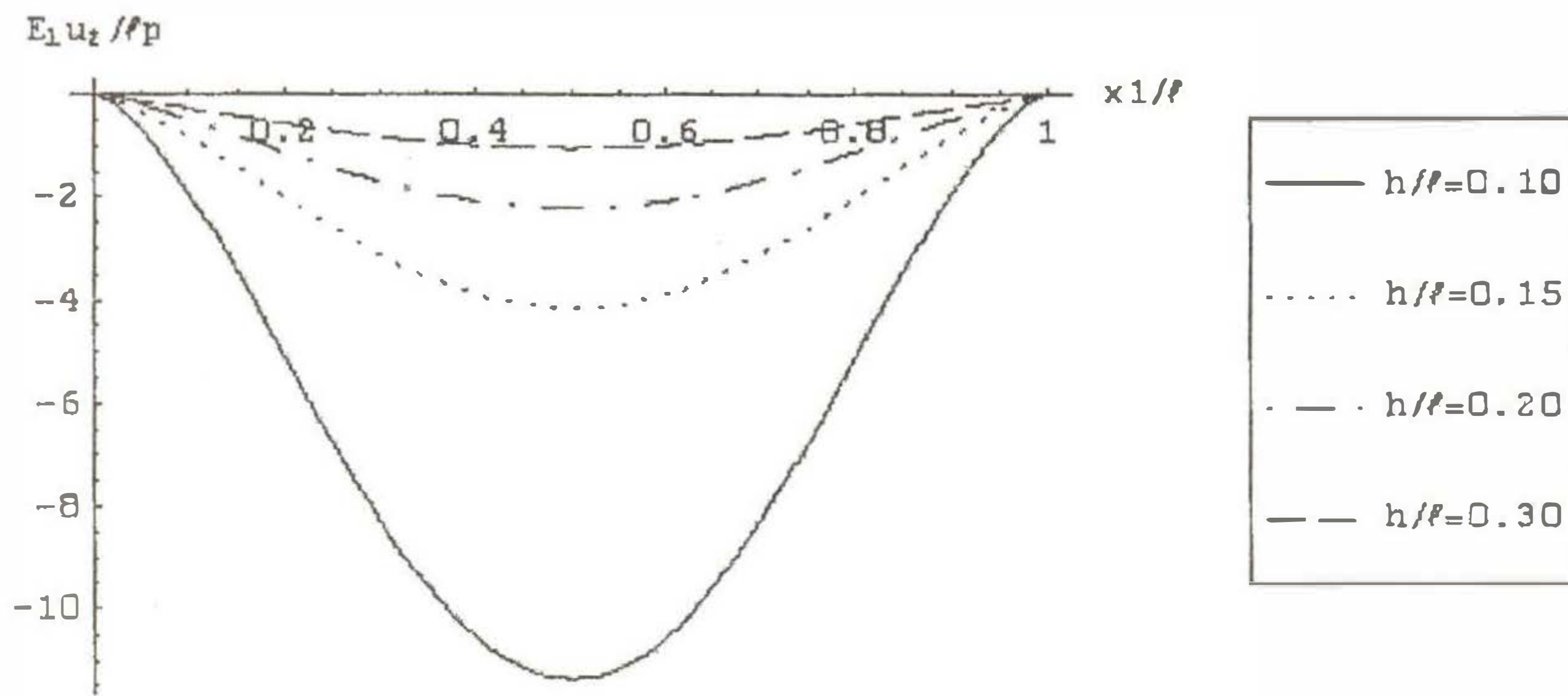
Şekil 6a.  $E_2/E_1$  oranındaki değişimin  $x_2/\ell = 0.0125$  kesitindeki  $\sigma_{11}/p$  gerilmesine etkisi. ( $N = 80$ ,  $h/\ell = 0.1$ )



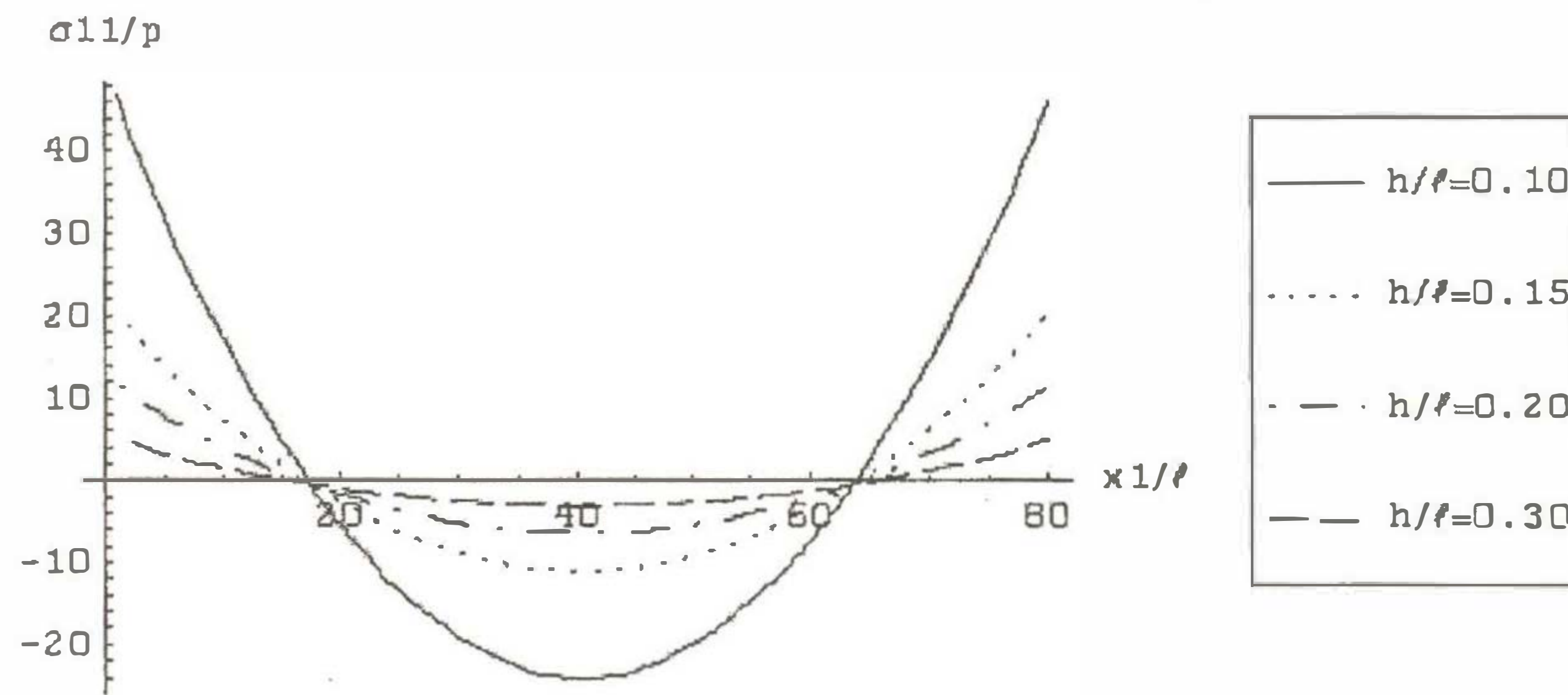
Şekil 6b.  $E_2/E_1$  oranındaki değişimin  $x_2/\ell = 0.0375$  kesitindeki  $\sigma_{11}/p$  gerilmesine etkisi. ( $N = 80$ ,  $h/\ell = 0.1$ )



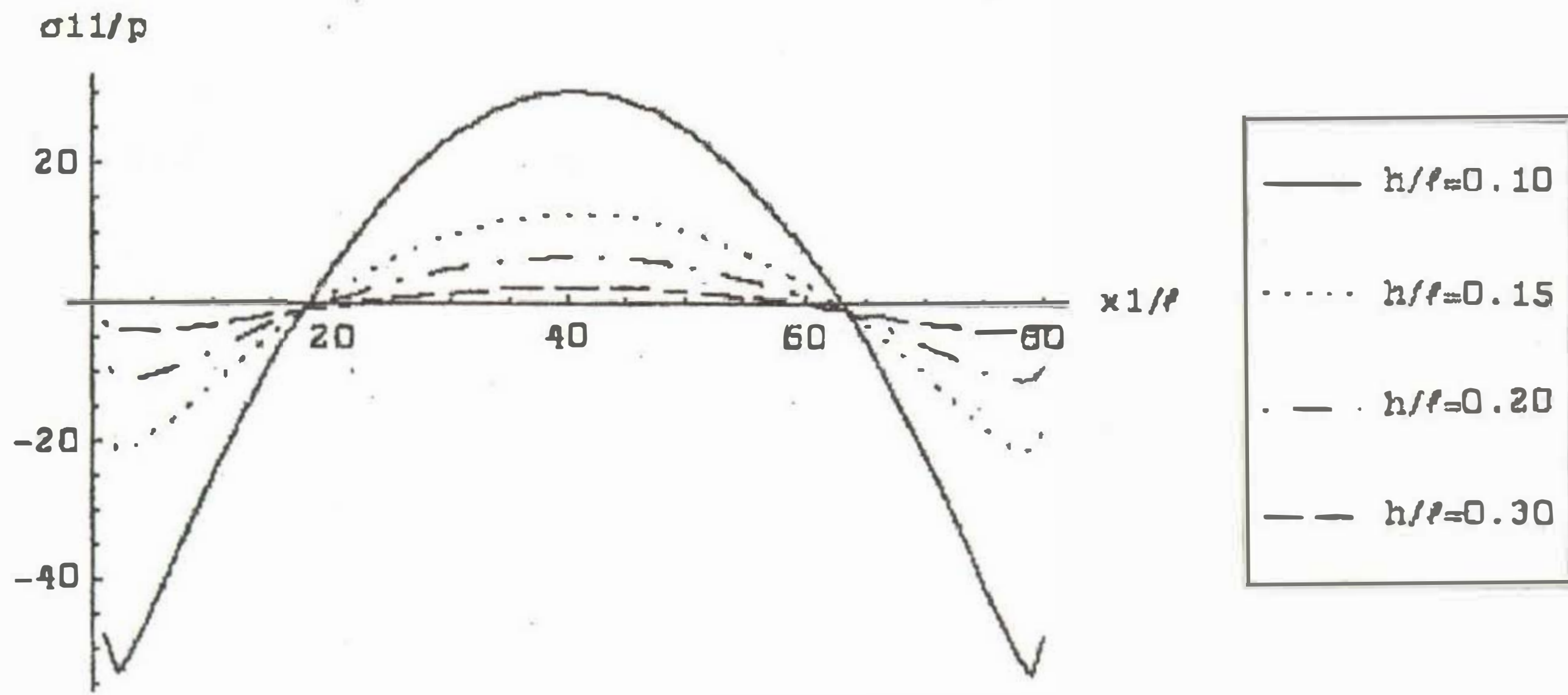
Şekil 6c.  $E_2 / E_1$  oranındaki değişimin  $x_2 / \ell = 0.0875$  kesitindeki  $\sigma_{11} / p$  gerilmesine etkisi. ( $N = 80$ ,  $h / \ell = 0.1$ )



Şekil 7.  $h / \ell$  oranındaki değişimin  $\frac{x_2}{\ell} = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\ell} \right)$  kesitindeki yer değiştirmeye etkisi. ( $N = 80$ ,  $E_2 / E_1 = 5$ )



Şekil 8a.  $h / \ell$  oranındaki değişimin  $x_2 / \ell = 0.0875$  kesitindeki  $\sigma_{11} / p$  gerilmesine etkisi. ( $N = 80$ ,  $E_2 / E_1 = 5$ )



Şekil 8b.  $h/l$  oranındaki değişimin  $x_2/l = 0.0375$  kesitindeki  $\sigma_{11}/p$  gerilmesine etkisi. ( $N = 80$ ,  $E_2/E_1 = 5$ )